國立政治大學應用數學系
數學教學碩士在職專班學位論文

最大係數多項式之快速計算法

Fast Computation of Largest Coefficient Polynomials

學生：林容溶撰
指導教授：蔡炎龍博士

中華民國 102 年 1 月 10 日

Contents

Abstract **iii**

中文摘要 **iv**

1 緒論 **1**

2 背景知識 **3**

3 熱帶多項式 **5**

4 比較一元二次多項式和一元二次熱帶多項式的不同 **8**

4.1 討論二次項係數為 0 時的熱帶多項式分解法 8

4.2 討論二次項係數不為 0 時的熱帶多項式分解法 12

4.3 最大係數的判斷及利用最大係數做因式分解 18

5 二元二次熱帶多項式的快速畫圖法 **32**

5.1 一元二次的熱帶齊次多項式 32

5.2 xy 的係數不為 0 所對應的三角形切割 38

6 結論 **44**

Bibliography **46**

Abstract

The goal of this thesis is to find fast computing methods of largest coefficient tropical polynomials. First, we compare the difference between classical polynomials and tropical polynomials. In order to have the unique representation for any tropical polynomials, we have to define so called the largest coefficient polynomial. We then discuss the property of the largest coefficient polynomials of degree two. Finally, we find different methods to determine of the largest coefficient polynomials with arbitrary degrees.

中文摘要

本篇主要討論快速計算最大係數熱帶多項式的方法。首先我們比較古典幾何和熱帶幾何中多項式的異同。為了讓熱帶多項式有如古典多項式的唯一表示，我們必須要定義最大係數多項式。接著我們討論一元二次最大係數多項式的性質，並更進一步找出任意次數最大係數多項式的判斷與計算方式。

第 1 章　緒論

熱帶幾何 (tropical geometry)是近代發展中代數幾何學的一支，熱帶幾何起源於 1980 年代，最早是由一位巴西的數學家兼計算機科學家 Imre Simon 所發展的；而「熱帶」一詞是因為部份的法國數學家對於巴西的印象，因而稱做熱帶幾何。最近幾年，熱帶幾何漸漸受到重視，大家也開始了解到熱帶幾何在代數幾何學上和計算機代數學上有重要的應用。熱帶幾何的一些觀念也逐漸發展至具有一般性的定義。在文章中，將會先介紹熱帶幾何的基礎觀念以及基本運算；在熱帶半環 (tropical semiring)中，由實數“$\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$”所構成的集合，重新定義加法和乘法，稱為熱帶加法和熱帶乘法，並分別以 $\oplus$、$\odot$ 符號表示熱帶加法和熱帶乘法，以便和古典幾何學的加法做區隔。在熱帶幾何中，我們會發現：數字的運算變簡單了！而且熱帶幾何仍然保有加法交換律、加法結合律、乘法交換律、乘法結合律，以及乘法分配律，並且具有加法和乘法的單位元素；只是在熱帶幾何中，熱帶加法和熱帶乘法的單位元素和我們原本所知道的並不一樣喔！[3] 接著第三章介紹熱帶多項式，並說明何謂熱帶多項式的根，以及如何算熱帶多項式的根，並且畫出熱帶多項式的圖形。在第三章中我們可以發現熱帶幾何可以說是分片線性化的代數幾何。而在研究熱帶多項式的過程中，不免常常和古典幾何學中的多項式混淆，(在這篇文章中，我將古典幾何學中的多項式稱為一般多項式)，在屢屢犯錯中，雖然常常令我一個頭兩個大，但也讓我在錯誤中學習，而獲得了更多，也漸漸體會到熱帶幾何好玩、有趣的地方，因此寫了第四章，熱帶多項式和一般多項式的不同，雖然簡單但卻是最重要最基礎的概念，也提醒其他同樣對熱帶幾何有研究熱誠的夥伴，小心這些小細節!另外還比較了一元二次熱帶多項式其實也有十字交乘，只是在此，稱為十字交“加”應該更為貼切。但是，卻又發現有些熱帶多項式無法做十字交加的因式分解，因為並非最大係數多項式，所以引出最大係數 (largest coefficient)和最大係數多項式 (largest coefficient polynomial) 的定義，使得熱帶多項式的因式分解唯一、更完善而且因式分解的方法簡單快速!因此，試著找出一個熱帶多項式是否有快速的方法可以判斷是否

為最大係數多項式？答案是肯定的！一個一元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bx \oplus c$，若 $b \geq \dfrac{(c-a)}{2}$，則此熱帶多項式為最大係數多項式。若是最大係數多項式，則因式分解即：$ax^2 \oplus bx \oplus c = a(x \oplus (b-a)) \odot (x \oplus (c-a-b))$。更進一步討論出 n 次方的最大係數多項式的判斷，一個一元 n 次熱帶多項式：

$f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus ... \oplus a_r x^r$，則 $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1}x^{n-1} \oplus ... \oplus b_r x^r$ 稱為 $f(x)$ 的最大係數多項式，其中 $b_i = \max\{\{a_i\} \cup \{\dfrac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j} \mid r \leq j < i < k \leq n\}\}$。我們也知道若是 x^i 項的係數不是最大係數，則該項可被忽略不計的。進一步證明，最大係數只和該項的前後項的最大係數有關。熱帶多項式 $a_k x^k \oplus ... \oplus a_l x^l \oplus ... \oplus a_i x^i \oplus ... \oplus a_j x^j \oplus ...$，其中 $k > l > i > j$。假設 x^i 項的係數 a_i 已經是最大係數，所以 $a_i \geq \dfrac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j}$，則 x^l 項的最大係數 $b_l = \dfrac{a_i(k-l)+a_k(l-i)}{k-i}$。也就是說最大係數 b_l 不受 $a_j x^j$ 項的影響。

第五章探討二元二次熱帶多項式的根及其圖形，兩個未知數讓熱帶多項式變得複雜許多，因此試著找是否有快速的方法畫二元二次熱帶多項式的圖形以及因式分解。[1][2]

第 2 章　背景知識

所謂的熱帶幾何是指在定義域一實數 $\mathbb{R}$ 再加上 $\{-\infty\}$ 中，定義熱帶幾何的二元運算如下：

定義 2.0.1. 若 x、$y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，則

(1) $x \oplus y = \max\{x, y\}$。也就是說，熱帶加法是求出兩個元素的最大值。

(2) $x \odot y = x + y$。而熱帶乘法是求出兩個元素的和。

範例 2.0.1. $4 \oplus 8 = \max\{4, 8\} = 8.$

範例 2.0.2. $4 \odot 8 = 4 + 8 = 12.$

根據以上的定義，我們可以發現 $-\infty$ 是熱帶加法的單位元素，因為 $-\infty \oplus a = \max\{-\infty, a\} = a$，其中 $a \in \mathbb{R}$；而 0 是熱帶乘法的單位元素。而且在此定義下仍保有加法交換律、加法結合律、乘法交換律、乘法結合律，以及分配律。

範例 2.0.3. 加法交換律 $4 \oplus 8 = 8 \oplus 4 = \max\{4, 8\} = 8.$

範例 2.0.4. 加法結合律

$$(4 \oplus 8) \oplus 7 = \max\{4, 8\} \oplus 7 = 8 \oplus 7 = \max\{8, 7\} = 8.$$

$$4 \oplus (8 \oplus 7) = 4 \oplus \max\{8, 7\} = 4 \oplus 8 = \max\{4, 8\} = 8.$$

範例 2.0.5. 乘法交換律 $4 \odot 8 = 4 + 8 = 12 = 8 + 4 = 8 \odot 4.$

範例 2.0.6. 乘法結合律

$$(4 \odot 8) \odot 7 = (4 + 8) \odot 7 = 12 \odot 7 = 12 + 7 = 19.$$

$4 \odot (8 \odot 7) = 4 \odot (8+7) = 4 \odot 15 = 4 + 15 = 19.$

範例 **2.0.7.** 分配律 $4 \odot (8 \oplus 7) = 4 \odot \max\{8,7\} = 4 \odot 8 = 4 + 8 = 12.$

範例 **2.0.8.** 分配律 $4 \odot 8 \oplus 4 \odot 7 = \max\{4+8, 4+7\} = \max\{12, 11\} = 12.$

也有其他熱帶幾何的研究者將熱帶加法定義為最小值，也就是 $a \oplus b = \min\{a, b\}$。在此不多做描述。[4]

第 3 章　熱帶多項式

令變數 x_1、x_2、...、x_n 為代表熱帶半環 $(\mathbb{R} \cup \{\text{-}\infty\}, \odot, \oplus)$中不等於 $-\infty$ 的元素。一個熱帶多項式 (tropical polynomial)我們可以表示為

$$p(x^1, x^2...x^n) = a_1 \odot x_1^{i_{11}} x_2^{i_{12}} ... x_n^{i_{1n}} \oplus a_2 \odot x_1^{i_{21}} x_2^{i_{22}} ... x_n^{i_{2n}} \oplus ... a_2 \odot x_m^{i_{m1}} x_2^{i_{m2}} ... x_n^{i_{mn}}$$

一個熱帶多項式函數 $p(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是將 $\mathbb{R}^n$ 中的元素代入給定有限個線性函數，並取出最大值。那麼，在熱帶多項式 $p(x)$ 的根到底代表甚麼呢?下面我們將取一元三次熱帶多項式為例子。

範例 3.0.9. 當 $n = 1$ 時，考慮一元三次熱帶多項式的一般情況。

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d \tag{3.0. 1}$$

更明確的說，熱帶多項式應該寫成

$$p(x) = a \odot x^{\odot 3} \oplus b \odot x^{\odot 2} \oplus c \odot x \oplus d \tag{3.0. 2}$$

但是為了方便比較一般的多項式，所以在這篇文章中，若沒有特別標示，我們會將次方的乘號省略，也就是以 3.0. 1式表示。
根據熱帶幾何的運算，$p(x)$ 代表取 $\{a + x^3, b + x^2, c + x, d\}$ 的最大值，其中在熱帶幾何運算中 $x^3 = x \odot x \odot x = x + x + x = 3x$，同理 $x^2 = 2x$，即

$$p(x) = \max\{a + 3x, b + 2x, c + x, d\}$$

而此函數圖形代表 xy 平面上，這 4 條線 $y = 3x + a, y = 2x + b, y = x + c, y = d$ 中，取 y 的最大值。也就是說，$p(x)$ 的圖形是由四條直線中取出較高的線段所組成。如果在 $d - c \leq c - b \leq b - a$ 的條件下畫出這四條線，則 $p(x)$ 的圖形在 $x = b - a, x = c - b, x = d - c$ 時為折點，如圖 3.1，所以我們可以將 $p(x)$ 分解成三個一次式的乘積：

$$p(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c)) \tag{3.0. 3}$$

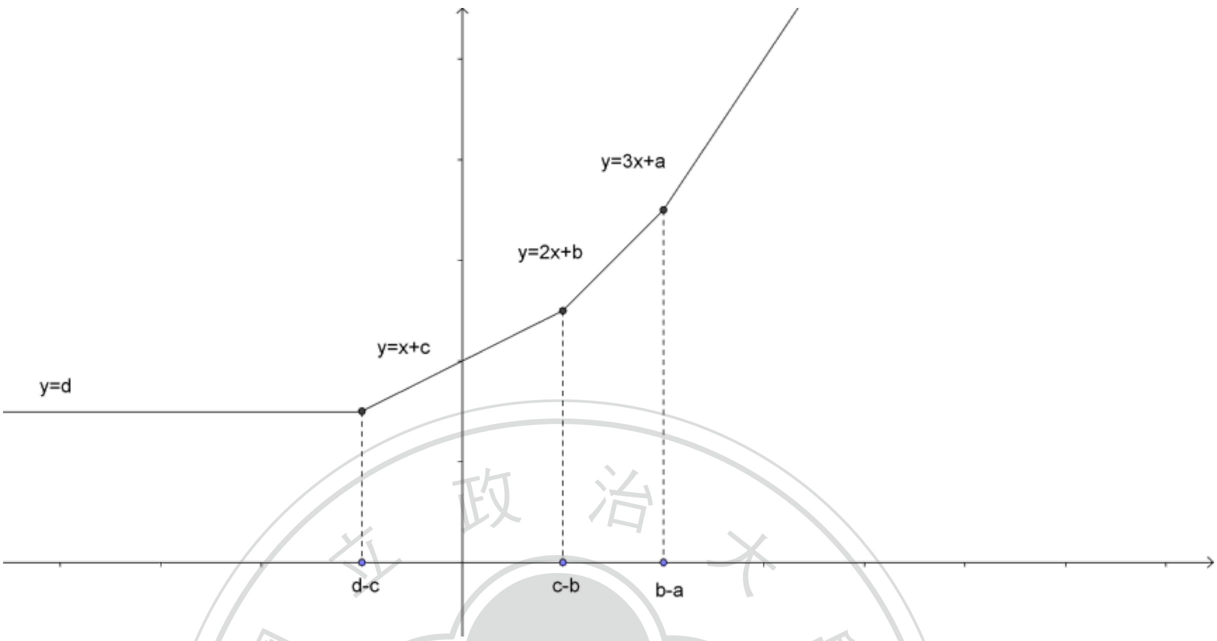


圖 3.1: $p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$ 的函數圖形

仿照一般多項式的概念，我們可以說 $\{b-a, c-b, d-c\}$ 為 $p(x)$ 的根。因此我們有下列的定義：

定義 3.0.2. 令熱帶多項式函數 $p(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，則熱帶多項式 $p(x)$ 的根為 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ 代入給定有限個線性函數中，使得最大值至少出現兩次$\}$，稱此集合為超曲面 *(hypersurface)*，並以符號 $H(p)$ 代表此集合。[5]

在範例 3.0.9中我們已得到一元三次的熱帶多項式 $p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$ 的 $H(p) = b-a, c-b, d-c$。那麼，如果是一元二次方程式，是不是如同一般多項式一樣，有快速的分解法呢?再者，如果是兩個變數的多項式的根又該如何找呢？現在讓我們用定義 3.0.2實際操作一次熱帶多項式找根的方法，如下範例 3.2。

範例 3.0.10. 考慮二元一次熱帶多項式 $p(x) = x \oplus y \oplus 1$ 的根，並在 xy 平面上畫出 $H(p)$ 的圖形。

根據定義 $H(p)$ 是在集合 $\max\{x, y, 1\}$ 中的最大值至少能出現兩次以上。所以，先分別假設最大值為 3 個元素中的其中一項，然後再檢驗此最大值是否能出現兩次，並逐一收集所有滿足條件的 xy 值畫在 xy 平面上。討論方法如下：
$\max\{x, y, 1\}$

(1) 如果最大值是 x，而且 $x = y \geq 1$

(2) 如果最大值是 x，而且 $x = 1 \geq y$

(3) 如果最大值是 y，而且 $y = 1 \geq x$

所以二元一次熱帶多項式 $p(x) = x \oplus y \oplus 1$ 的函數圖形如圖 3.0.10。

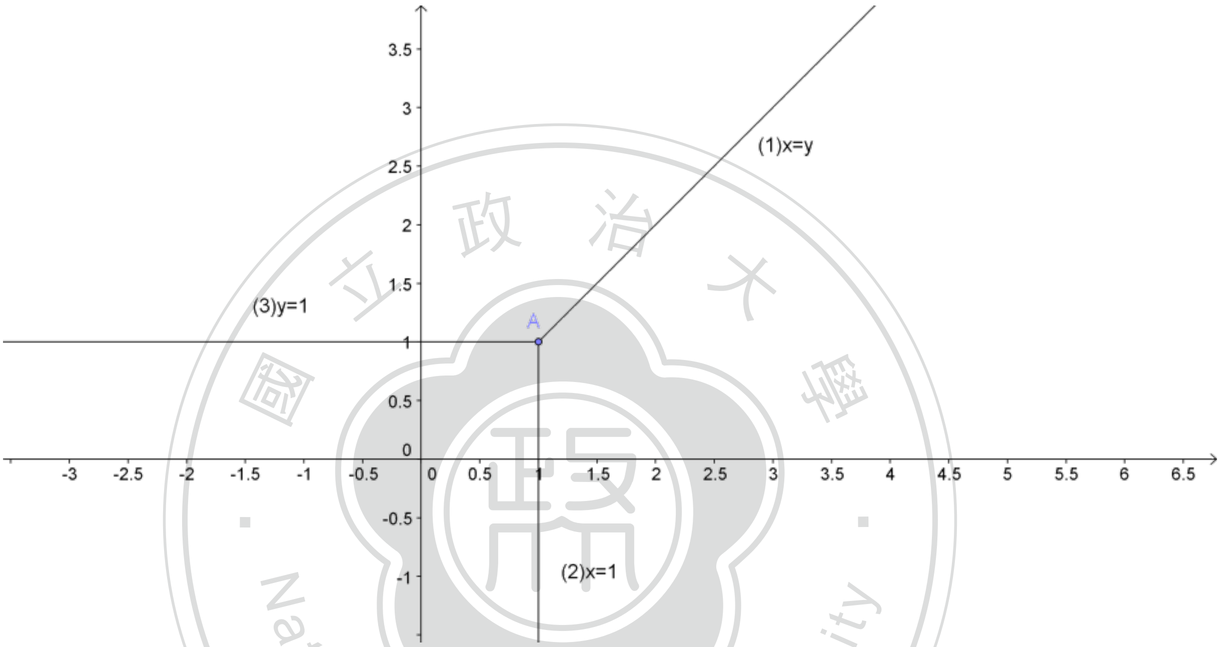


圖 3.2: $p(x) = x \oplus y \oplus 1$ 的函數圖形

第 4 章　比較一元二次多項式和一元二次熱帶多項式的不同

一般來說，要找一元二次方程式的根有 2 種方法，分別是十字交乘和公式解。令人感興趣的是：若是一元二次熱帶多項式，是否也可以用類似的方法做因式分解?

4.1　討論二次項係數為 0 時的熱帶多項式分解法

模仿十字交乘的方法，我們先固定二次項和常數項，然後找一次項的係數，我們先看範例 4.1.1

範例 **4.1.1.** $x^2 \oplus ax \oplus 1$

在一般的多項式中，若是此多項式可以做因式分解，我們知道 a 可填的數字只有 2，因為 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$，而且是唯一分解。在這裡是利用常數項 $1 = 1{\times}1$，所以一次項係數就是 $1 + 1 = 2$。但是熱帶幾何中的加法是取最大值，熱帶乘法則是加法，所以我們將常數項的拆法改成加法 $1 = 1 + 0$ 試試看，而且為了區分熱帶多項式和一般多項式的不同，將範例 4.1.1的式子改為 $x^2 \oplus ax \oplus 1$，則試試 1 和 0 的組合：

$(x \oplus 0) \odot (x \oplus 1) = x^2 \oplus 1x \oplus 0x \oplus 1 = \max\{2x, 1x, 1\} = x^2 \oplus 1x \oplus 1$

所以 $a = 1$ 時，則熱帶多項式可因式分解，即

$$p(x) = x^2 \oplus 1x \oplus 1 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 1) \tag{4.1. 1}$$

特別注意到的是在熱帶多項式中，未知數的係數被省略是 0，因為熱帶多項式的乘法單位元素是 0；而當常數項被省略不寫時，代表常數項是 -∞，所以被省略，

因為熱帶多項式的加法單位元素是 $-\infty$。例如上式 4.1 中，若將 0 省略，則得到式子 $x \odot (x \oplus 1)\ x^2 \oplus x \neq x_2 \oplus 1x \oplus 1$。而且 $x^2 \oplus 1x \neq x^2 \oplus 1x \oplus 0$。

利用和範例 4.1.1同樣的方法，找出下列熱帶多項式可做因式分解的 a 值，並試著歸納出可因式分解的規則。

範例 **4.1.2.** $x^2 \oplus ax \oplus 2$，2 拆成兩數相加 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，則有此兩種組合。

(1) $(x \oplus 0) \odot (x \oplus 2) = x^2 \oplus 2x \oplus 2$

(2) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 1) = x^2 \oplus 1x \oplus 2$

所以 a =1 或 2 時，則熱帶多項式可因式分解。

範例 **4.1.3.** $x^2 \oplus ax \oplus 3$，$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) $(x \oplus 0) \odot (x \oplus 3) = x^2 \oplus 3x \oplus 3$

(2) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 2) = x^2 \oplus 2x \oplus 3$

所以 a =2 或 3 時，則熱帶多項式可因式分解。

範例 **4.1.4.** $x^2 \oplus ax \oplus 4$，$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) $(x \oplus 0) \odot (x \oplus 4) = x^2 \oplus 4x \oplus 4$

(2) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 3) = x^2 \oplus 3x \oplus 4$

(3) $(x \oplus 2) \odot (x \oplus 2) = x^2 \oplus 2x \oplus 4$

所以 a =2 或 3 或 4 時，則熱帶多項式可因式分解。

範例 **4.1.5.** $x^2 \oplus ax \oplus 5$，$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $(x \oplus 0) \odot (x \oplus 5) = x^2 \oplus 5x \oplus 5$

(2) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 4) = x^2 \oplus 4x \oplus 5$

(3) $(x \oplus 2) \odot (x \oplus 3) = x^2 \oplus 3x \oplus 5$

所以 a =3 或 4 或 5 時，則熱帶多項式可因式分解。

範例 4.1.6. $x^2 \oplus ax \oplus 6$，$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $(x \oplus 0) \odot (x \oplus 6) = x^2 \oplus 6x \oplus 6$

(2) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 5) = x^2 \oplus 5x \oplus 6$

(3) $(x \oplus 2) \odot (x \oplus 4) = x^2 \oplus 4x \oplus 6$

(4) $(x \oplus 3) \odot (x \oplus 3) = x^2 \oplus 3x \oplus 6$

所以 a =3 或 4 或 5 或 6 時，則熱帶多項式可因式分解。

小結 1：二次項係數為 0 的快速因式分解方法

步驟 1 將熱帶多項式的常數項拆成兩數相加。

步驟 2 檢查一次項係數是否為兩數中較大的值；若是，則可因式分解，反之，則不能因式分解。

用下面範例 4.1.7和範例 4.1.8做具體說明。

範例 4.1.7. 常數項拆成兩數和後，一次項係數為其中較大的值：$x^2 \oplus 20x \oplus 23 = \max\{2x, 20 + x, 23\}$，可分解成

$$\begin{aligned}(x \oplus 3) \odot (x \oplus 20) &= x^2 \oplus 20 \odot x \oplus 3 \odot x \oplus 3 \odot 20 \\ &= \max\{2x, 20 + x, 3 + x, 23\} \\ &= \max\{2x, 20 + x, 23\}\end{aligned}$$

所以 $x^2 \oplus 20x \oplus 23 = (x \oplus 3) \odot (x \oplus 20)$，可因式分解。

範例 **4.1.8.** 常數項拆成兩數和後，一次項係數不為其中較大的值：$x^2 \oplus 3x \oplus 23 = \max\{2x, 3+x, 23\}$，承上，可得知此多項式無法因式分解成兩個一次式相乘。所以 $x^2 \oplus 3x \oplus 23$，不可因式分解。

在範例 4.1.7和範例 4.1.8中，可以推得若一次項係數大於常數項的一半時，則熱帶多項式可以因式分解，因為在熱帶幾何中，熱帶加法為取最大值的關係。例如範例 4.1.7中的熱帶多項式 $x^2 \oplus ax \oplus 23$，若一次項係數大於 $\frac{23}{2} = 11.5$ 時，則此熱帶多項式可以因式分解；即 $a \geq 12$ 時，可以因式分解。

接下來利用同樣的方法來討論二次項係數不為 0 的熱帶多項式。

4.2 討論二次項係數不為 0 時的熱帶多項式分解法

範例 **4.2.1.** $2x^2 \oplus ax \oplus 1$，將二次項係數 2 拆成兩數相加，所以有兩種組合 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，常數項也拆成兩數相加，所以有一種組合 $(0、1)$。

(1) 檢查 $(0, 2)$ 的組合

$$\begin{aligned}(0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 1) &= 0x \odot 2x \oplus 0x \odot 1 \oplus 0 \odot 2x \oplus 0 \odot 1 \\ &= \max\{x + 2 + x, x + 1, 2 + x, 1\} \\ &= \max\{2x + 2, 2 + x, 1\} \\ &= 2x^2 \oplus 2x \oplus 1\end{aligned}$$

所以 $2x^2 \oplus 2x \oplus 1 = (0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 1)$

(2) 別忘了檢查交換成 $(2, 0)$ 的組合

$$\begin{aligned}(2x \oplus 0) \odot (0x \oplus 1) &= 2x \odot 0x \oplus 2x \odot 1 \oplus 0 \odot 0x \oplus 0 \odot 1 \\ &= \max\{2 + x + x, 2 + x + 1, 0 + x, 1\} \\ &= \max\{2x + 2, 3 + x, 1\} \\ &= 2x^2 \oplus 3x \oplus 1\end{aligned}$$

所以 $2x^2 \oplus 3x \oplus 1 = (2x \oplus 0) \odot (0x \oplus 1)$

(3) 檢查 $(1, 1)$ 的組合

$$\begin{aligned}(1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 1) &= 1x \odot 1x \oplus 1x \odot 1 \oplus 0 \odot 1x \oplus 0 \odot 1 \\ &= \max\{2x + 2, x + 2, 1 + x, 1\} \\ &= \max\{2x + 2, 2 + x, 1\} \\ &= 2x^2 \oplus 2x \oplus 1\end{aligned}$$

所以 $2x^2 \oplus 2x \oplus 1 = (1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 1)$

在範例 4.2.1中發現：當我們在求一次項的係數時，是用乘法分配展開後，得到較大的一次項係數即為所求。這個過程和一般多項式的十字交乘似乎雷同，只是在熱帶多項式中，熱帶加法是求出兩個元素的最大值，而熱帶乘法是求出兩個元素的和。因此，原本在一般多項式中的十字交“乘”，在這裡改為“十字交加”可能更為恰當。讓我們用十字交加的方法再檢驗一次範例 4.2.1看看是否正確：

(1) $2x^2 \oplus 2x \oplus 1$

$$\begin{array}{ccc} 0\text{x} & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 0 \\ 2\text{x} & & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{x+1 or 2+x}} \end{array}$$

利用十字交加後得到一次項係數為 $x+1$ or $2+x$，選擇較大的數，因此 $2x^2 \oplus 2x \oplus 1 = (0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 1)$。

(2) $2x^2 \oplus 3x \oplus 1$

$$\begin{array}{ccc} 2\text{x} & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 0 \\ 0\text{x} & & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{2+x+1 or x}} \end{array}$$

利用十字交加後得到一次項係數為 $2+x+1 = 3+x$ or x，選擇較大的數，因此 $2x^2 \oplus 3x \oplus 1 = (2x \oplus 0) \odot (0x \oplus 1)$。

(3) $2x^2 \oplus 2x \oplus 1$

$$\begin{array}{ccc} 1\text{x} & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 0 \\ 1\text{x} & & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{1+x+1 or 1+x}} \end{array}$$

利用十字交加後得到一次項係數為 $1+x+1 = 2+x$ or $1+x$，選擇較大的數，因此 $2x^2 \oplus 2x \oplus 1 = (1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 1)$。

在範例 4.9 中也發現到 $2x^2 \oplus 2x \oplus 1 = (0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 1) = (1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 1)$，因式分解不唯一!

再試試二次項係數和常常數項都有兩種以上的組合，十字交加是否成立?

範例 **4.2.2.** $2x^2 \oplus ax \oplus 2$，二次項可能拆成 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，常數項可拆成 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 檢查二次項 $(0,2)$ 配常數項 $(0,2)$ 的組合

$$\begin{aligned}(0x\oplus 0)\odot(2x\oplus 2)&=0x\odot 2x\oplus 0x\odot 2\oplus 0\odot 2x\oplus 0\odot 2\\&=\max\{2x+2,x+2,2+x,2\}\\&=2x^2\oplus 2x\oplus 2\end{aligned}$$

所以 $2x^2\oplus 2x\oplus 2=(0x\oplus 0)\odot(2x\oplus 2)$；一次項係數為“十字交加”後較大的數，即

$$\begin{array}{ccc}\text{0x} & & \text{2}\\ & \times & \\ \text{2x} & & \text{2}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{x+2 or 2+x}}\end{array}$$

(2) 檢查二次項 $(0,2)$ 配常數項 $(2,0)$ 的組合

$$\begin{aligned}(0x\oplus 2)\odot(2x\oplus 0)&=0x\odot 2x\oplus 0x\odot 0\oplus 2\odot 2x\oplus 2\odot 0\\&=\max\{2x+2,x,4+x,2\}\\&=\max\{2x+2,4+x,2\}\\&=2x^2\oplus 4x\oplus 2\end{aligned}$$

所以 $2x^2\oplus 4x\oplus 2=(0x\oplus 2)\odot(2x\oplus 0)$；一次項係數為“十字交加”後較大的數，即

$$\begin{array}{ccc}\text{0x} & & \text{2}\\ & \times & \\ \text{2x} & & \text{0}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{x or 2+2+x}}\end{array}$$

(3) 檢查二次項 $(0,2)$ 配常數項 $(1,1)$ 的組合

$$\begin{aligned}(0x\oplus 1)\odot(2x\oplus 1)&=0x\odot 2x\oplus 0x\odot 1\oplus 1\odot 2x\oplus 1\odot 1\\&=\max\{2x+2,1+x,x+3,2\}\\&=\max\{2x+2,x+3,2\}\\&=2x^2\oplus 3x\oplus 2\end{aligned}$$

所以 $2x^2\oplus 3x\oplus 2=(0x\oplus 1)\odot(2x\oplus 1)$；一次項係數為“十字交加”後較大的數，即

$$\begin{array}{ccc} 0x & \times & 1 \\ 2x & & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x+1 \text{ or } 1+2+x} \end{array}$$

(4) 檢查二次項 $(1,1)$ 配常數項 $(0,2)$ 的組合

$$\begin{aligned}(1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 2) &= 1x \odot 1x \oplus 1x \odot 2 \oplus 0 \odot 1x \oplus 0 \odot 2 \\ &= \max\{2x+2, x+3, 1+x, 2\} \\ &= \max\{2x+2, x+3, 2\} \\ &= 2x^2 \oplus 3x \oplus 2\end{aligned}$$

所以 $2x^2 \oplus 3x \oplus 2 = (1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 2)$；一次項係數為"十字交加"後較大的數，即

$$\begin{array}{ccc} 1x & \times & 0 \\ 1x & & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{1+x+2 \text{ or } 1+x} \end{array}$$

(5) 檢查二次項 $(1,1)$ 配常數項 $(1,1)$ 的組合

$$\begin{aligned}(1x \oplus 1) \odot (1x \oplus 1) &= 1x \odot 1x \oplus 1x \odot 1 \oplus 1 \odot 1x \oplus 1 \odot 1 \\ &= \max\{2x+2, 2+x, x+2, 2\} \\ &= \max\{2x+2, x+2, 2\} \\ &= 2x^2 \oplus 2x \oplus 2\end{aligned}$$

所以 $2x^2 \oplus 2x \oplus 2 = (1x \oplus 1) \odot (1x \oplus 1)$；一次項係數為"十字交加"後較大的數，即

$$\begin{array}{ccc} 1x & \times & 1 \\ 1x & & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{1+x+1 \text{ or } 1+1+x} \end{array}$$

在範例 4.2.2中發現十字交加恆成立，而且熱帶多項式的一元二次因式分解不唯一；例如：

$$2x^2 \oplus 2x \oplus 2 = (0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 2) = (1x \oplus 1) \odot (1x \oplus 1)$$

$$2x^2 \oplus 3x \oplus 2 = (0x \oplus 1) \odot (2x \oplus 1) = (1x \oplus 0) \odot (1x \oplus 2)$$

小結 2：二次項係數不為 0 的快速因式分解方法

步驟 **1** 將熱帶多項式的二次項和常數項拆成兩數相加。

步驟 **2** 檢查一次項係數是否為“十字交加”後較大的數。

範例 **4.2.3.** 利用小結 2 的方法做熱帶多項式的因式分解 $3x^2 \oplus 6x \oplus 4$

步驟 **1** 二次項可拆成 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，常數項可拆成 $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 。

步驟 **2** 利用十字交加檢查一次項係數：

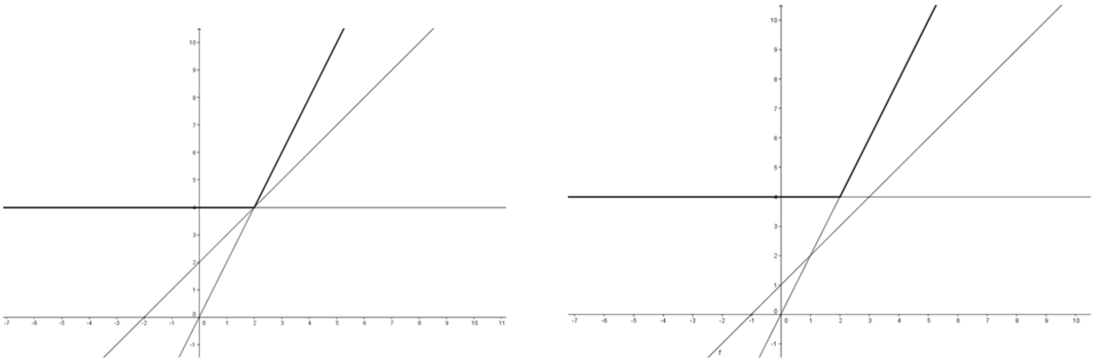
0x ╳ 0 3x ╳ 4 x+4 or 3+x **4x** or 3x	0x ╳ 4 3x ╳ 0 x or 4+3+x x or **7x**	0x ╳ 1 3x ╳ 3 x+3 or 1+3+x 3x or **4x**	0x ╳ 3 3x ╳ 1 x+1 or 3+3+x 1x or **6x**
0x ╳ 2 3x ╳ 2 x+2 or 2+3+x 2x or **5x**	1x ╳ 0 2x ╳ 4 1+x+4 or 2+x **5x** or 2x	1x ╳ 4 2x ╳ 0 1+x or 4+2+x 1x or **6x**	1x ╳ 1 2x ╳ 3 1+x+3 or 1+2+x **4x** or 3x
1x ╳ 3 2x ╳ 1 1+x+1 or 3+3+x 2x or **5x**	1x ╳ 2 2x ╳ 2 1+x+2 or 2+2+x 3x or **4x**		

由上列“十字交加”後，可得 $3x^2 \oplus 6x \oplus 4 = (0x \oplus 3) \odot (3x \oplus 1) = (1x \oplus 4) \odot (2x \oplus 0)$ 並不唯一。

但是利用十字交加做因式分解時，卻發現有無法因式分解的熱帶多項式，例如: $x^2 \oplus x \oplus 4$。因此我們想知道：什麼樣的熱帶多項式無法做因式分解、這些無法因式分解的熱帶多項式，有甚麼特性？

4.3 最大係數的判斷及利用最大係數做因式分解

在一般的多項式中，若 $f(x) = g(x)$，若且唯若，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是一模一樣的多項式。(functionally equivalent)但是在熱帶多項式中，即使多項式的係數並不相同，但是畫出來的函數圖形卻有可能是一樣的。例如: $x^2 \oplus 2x \oplus 4$ 和 $x^2 \oplus 1x \oplus 4$ 不是一樣的多項式，但是畫出來的圖形卻是一樣的，如圖 4.1。



f(x)= $x^2 \oplus 2x \oplus 4$ g(x)= $x^2 \oplus 1x \oplus 4$

圖 4.1: $f(x)$ 和 $g(x)$ 是不一樣的多項式，但是畫出來的圖形卻是一樣的

定義 **4.3.1.** 若熱帶多項式 $f(x)$ 的係數 a_i 可以被 b 取代，而且不改變原本熱帶多項式的圖形，令此熱帶多項式為 $g(x)$，其中 $b > a_i$，則稱 a_i 是熱帶多項式 $f(x)$ 的最大係數 (largest cofficient)，g(x)是最大係數多項式 *(largest coefficient polynomial)*。

例如 $x^2 \oplus 2x \oplus 4 = x^2 \oplus 1x \oplus 4 = x^2 \oplus 0x \oplus 4$，因為畫出來的圖形都是一樣的(如圖 4.1)。其中 $x^2 \oplus 2x \oplus 4$ 即稱為最大係數多項式。
由圖 4.1不難發現：當熱帶多項式 $x^2 \oplus 2x \oplus 4$ 中的一次項係數若小於 2 是不會影響此熱帶多項式的圖形，也就是說不影響此熱帶多項式的最大值。因此接下來我們將藉由 4.1 和 4.2 節的範例來觀察最大係數多項式的特性。
範例 4.1.2中我們已得到

(1) $x^2 \oplus 2x \oplus 2 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 2)$

(2) $x^2 \oplus 1x \oplus 2 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 1)$

其中 $x^2 \oplus 1x \oplus 2$ 的圖形 (如圖 4.2)，發現三線有一交點，和圖 4.1的 $f(x) = x^2 \oplus 2x \oplus 4$ 一樣，而且在圖 4.2上畫出 $x^2 \oplus 0x \oplus 2$ 的圖形 (如圖 4.3)，$y = 0x$ 這條線是不影響此多項式的最大值的。所以 $x^2 \oplus 1x \oplus 2 = x^2 \oplus 0x \oplus 2$，而且 $x^2 \oplus 1x \oplus 2$ 是最大係數多項式。

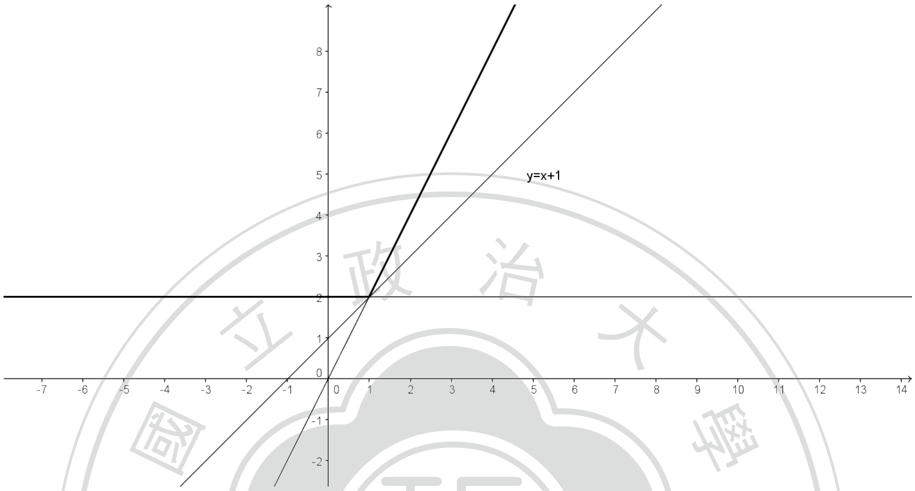


圖 4.2: $x^2 \oplus 1x \oplus 2$ 的圖形

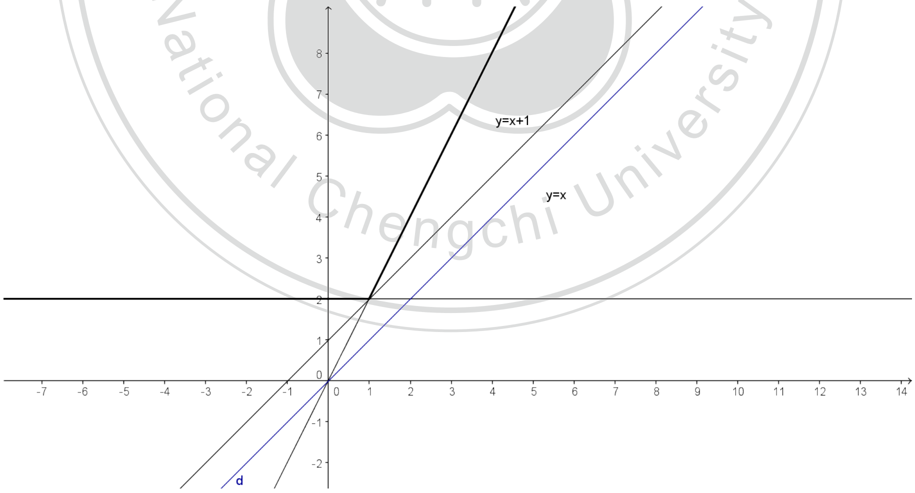


圖 4.3: $x^2 \oplus 1x \oplus 2$ 和 $x^2 \oplus 0x \oplus 2$ 合在一起的圖形

同理，在範例 4.1.3我們得到

(1) $x^2 \oplus 3x \oplus 3 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 3)$

(2) $x^2 \oplus 2x \oplus 3 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 2)$

而且 $x^2 \oplus 2x \oplus 3 = x^2 \oplus 1x \oplus 3 = x^2 \oplus 0x \oplus 3$，$x^2 \oplus 2x \oplus 3$ 是最大係數多項式。在範例 4.1.4我們得到

(1) $x^2 \oplus 4x \oplus 4 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 4)$

(2) $x^2 \oplus 3x \oplus 4 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 3)$

(3) $x^2 \oplus 2x \oplus 4 = (x \oplus 2) \odot (x \oplus 2)$

而且 $x^2 \oplus 2x \oplus 4 = x^2 \oplus 1x \oplus 4 = x^2 \oplus 0x \oplus 4$，$x^2 \oplus 2x \oplus 4$ 是最大係數多項式。在範例 4.1.5我們得到

(1) $x^2 \oplus 5x \oplus 5 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 5)$

(2) $x^2 \oplus 4x \oplus 5 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 4)$

(3) $x^2 \oplus 3x \oplus 5 = (x \oplus 2) \odot (x \oplus 3)$

而且 $x^2 \oplus 3x \oplus 5 = x^2 \oplus 2x \oplus 5 = x^2 \oplus 1x \oplus 5 = x^2 \oplus 0x \oplus 5$，$x^2 \oplus 3x \oplus 5$ 是最大係數多項式。在範例 4.1.6我們得到

(1) $x^2 \oplus 6x \oplus 6 = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 6)$

(2) $x^2 \oplus 5x \oplus 6 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 5)$

(3) $x^2 \oplus 4x \oplus 6 = (x \oplus 2) \odot (x \oplus 4)$

(4) $x^2 \oplus 3x \oplus 6 = (x \oplus 3) \odot (x \oplus 3)$

而且 $x^2 \oplus 3x \oplus 6 = x^2 \oplus 2x \oplus 6 = x^2 \oplus 1x \oplus 6 = x^2 \oplus 0x \oplus 6$，$x^2 \oplus 3x \oplus 6$ 是最大係數多項式。

觀察範例 4.1.2到範例 4.1.6，當二次項係數為 0 的熱帶多項式，利用一次項係數來判斷是否為最大係數多項式；當一次項係數大於等於常數項的一半時，則此多項式為最大係數多項式，也就和判斷是否可因式分解的方法一樣。這是因為當我們用十字交加做因式分解時，就已經挑選了較大的係數。
進一步發現，當常數項是偶數時，若一次項係數恰為常數項的一半，則此熱帶多項式可因式分解成完全平方式。例如：

範例 4.1.2中的 $x^2 \oplus 1x \oplus 2 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 1) = (x \oplus 1)^2$。

範例 4.1.4中的 $x^2 \oplus 2x \oplus 4 = (x \oplus 2) \odot (x \oplus 2) = (x \oplus 2)^2$。

範例 4.1.6中的 $x^2 \oplus 3x \oplus 6 = (x \oplus 3) \odot (x \oplus 3) = (x \oplus 3)^2$。

定理 4.3.2. 一元二次熱帶多項式 $x^2 \oplus bx \oplus c$，若 $b \geq \dfrac{c}{2}$，則稱此熱帶多項式為最大係數多項式。

在之前的例子中可以觀察得到。

那麼，為什麼要判斷熱帶多項式是否為最大係數多項式呢？

在 4.2 節中我們發現了，利用十字交加因式分解並不唯一，而且有些熱帶多項式無法因式分解。但是，若是最大系數多項式不但可以分解，而且會唯一，因此判斷最大系數多項式就顯得格外重要。接下來利用定義 4.3.3 做最大係數多項式的因式分解。

引理 4.3.3. 若一元二次熱帶多項式 $x^2 \oplus bx \oplus c$ 為最大係數多項式，則可因式分解為 $(x \oplus (b-0)) \odot (x \oplus (c-b))$。而且高次方的熱帶多項式也可用此方法，例如一元三次熱帶多項式 $x^3 \oplus bx^2 \oplus cx \oplus d = (x \oplus (b-0)) \odot (x \oplus (c-b)) \odot (x \oplus (d-c))$。

利用定義 4.3.3因式分解範例 4.1.2到範例 4.1.6，雖然方法不同，但會得到一模一樣的答案，在此不再重複書寫。

利用定義 4.3.3因式分解下面兩個特別的例子:

範例 4.3.1. 判斷 $x^2 \oplus 4x \oplus 1$ 是否為最大係數多項式並因式分解。
因為一次項係數是 $4 > \dfrac{1}{2}$，所以是最大係數多項式。
因式分解為 $(x \oplus (4-0)) \odot (x \oplus (1-4)) = (x \oplus 4) \odot (x \oplus -3)$。如圖 4.4。

範例 4.3.2. 判斷 $x^2 \oplus x \oplus 4$ 是否為最大係數多項式並因式分解。
因為一次項係數是 $1 > 2$，所以不是最大係數多項式。
因式分解的答案是錯的：$(x \oplus (0-0)) \odot (x \oplus (4-0)) = (x \oplus 0) \odot (x \oplus 4)$。如圖 4.5。由圖 4.5發現轉折點並非 0 和 4，而是 2。而且此圖形和範例 4.1.4的 (3) $x^2 \oplus 2x \oplus 4 = (x \oplus 2)^2$ 一樣；再一次應證 $x^2 \oplus x \oplus 4$ 不是最大係數多項式，而且 $x^2 \oplus x \oplus 4 = x^2 \oplus 2x \oplus 4$。

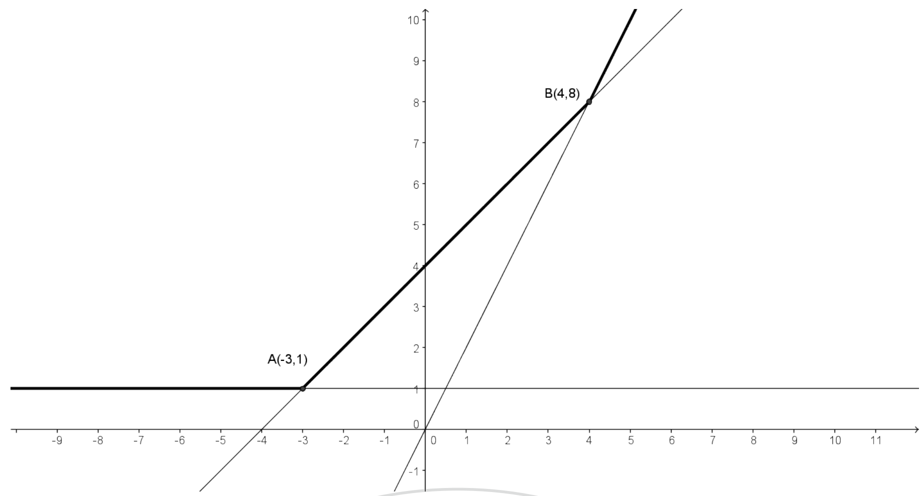


圖 4.4: $x^2 \oplus 4x \oplus 1 = (x \oplus 4) \odot (x \oplus -3)$ 的圖形

若一元二次熱帶多項式的二次項係數不是 0，又該如何判斷是否為最大係數多項式，則該如何因式分解呢？

定理 4.3.4. 一元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bx \oplus c$，若 $b \geq \dfrac{c-a}{2}$，則稱此熱帶多項式為最大係數多項式。

引理 4.3.5. 若一元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bx \oplus c$，提出公因式 a，則 $ax^2 \oplus bx \oplus c = a(x^2 \oplus (b-a)x \oplus (c-a))$，根據定義 *4.3.3*，可因式分解為 $a(x \oplus (b-a)) \odot (x \oplus (c-b))$。

有了定義 4.3.4，就可以判斷所有一元二次的熱帶多項式是否為最大係數多項式，再利用定義 4.3.5做因式分解，而且因式分解唯一。

利用定義 4.3.5重新再做一次範例 4.2.1的 (1) $2x^2 \oplus 2x \oplus 1$

$$\begin{aligned} 2x^2 \oplus 2x \oplus 1 &= 2 \odot (x^2 \oplus (2-2)x \oplus (1-2)) = 2 \odot (x^2 \oplus x \oplus -1) \\ &= 2 \odot (x \oplus (0-0)) \odot (x \oplus (-1-0)) = 2 \odot (x \oplus 0) \odot (x \oplus -1) \end{aligned}$$

和範例 4.2.1的 (1)因式分解的結果提出係數 2 後其實是一樣的。

$$\begin{aligned} 2x^2 \oplus 2x \oplus 1 &= (0x \oplus 0) \odot (2x \oplus 1) \\ &= 2 \odot (x^2 \oplus (2-2)x \oplus (1-2)) = 2 \odot (x^2 \oplus x \oplus -1) \\ &= 2 \odot (x \oplus (0-0)) \odot (x \oplus (-1-0)) = 2 \odot (x \oplus 0) \odot (x \oplus -1) \end{aligned}$$

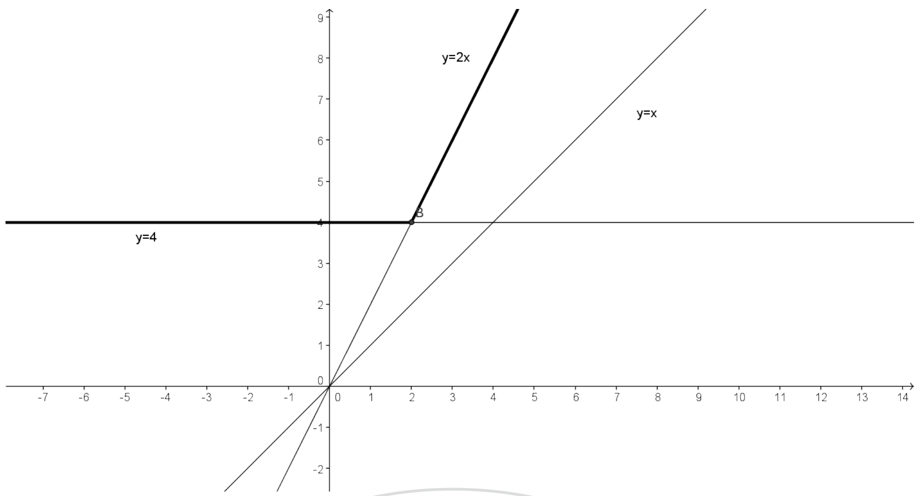


圖 4.5: $x^2 \oplus x \oplus 4 \neq (x \oplus 0) \odot (x \oplus 4)$

在此我們已經找到一元二次熱帶多項式的最大係數判斷法，而一元 n 次熱帶多項式的最大係數判斷也已經有公式 [2]，如定義 4.3.6。

定理 4.3.6. 若一熱帶多項式 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus ... \oplus a_r x^r$，則 $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1} x^{n-1} \oplus ... \oplus b_r x^r$ 稱為 $f(x)$ 的最大係數多項式，其中 $b_i = max\,\{\{a_i\} \cup \{\frac{(a_j(k-i)+a_k(i-j))}{(k-j)} \mid r \leq j < i < k \leq n\}\}$

Proof. 在熱帶多項式中 $a_k x^k \oplus a_i x^i \oplus a_j x^j$ 代表著三條直線，分別是 $y = a_k + kx$、$y = a_i + ix$、$y = a_j + jx$，如圖 4.6我們可以知道，其中第 x^i 項的最大係數 b_i，會發生在當三條直線 $y = a_i + ix$、$y = a_k + kx$、$y = a_j + jx$ 交於一點時。因此先求 $y = a_k + kx$ 和 $y = a_j + jx$ 的交點座標，由 $a_k + kx = a_j + jx$ 移項後可得 $x = \frac{a_j - a_k}{k-j}$，再代入 $y = a_k + kx$，可得 $y = a_k + k\frac{a_j - a_k}{k-j}$，所以得點座標為 $(\frac{a_j - a_k}{k-j}, a_k + k\frac{a_j - a_k}{k-j})$。將 $x = \frac{a_j - a_k}{k-j}$、$y = a_k + k\frac{a_j - a_k}{k-j}$，代入 $y = a_i + ix$，此時的 a_i 為最大係數 b_i，因此 $a_k + k\frac{a_j - a_k}{k-j} = b_i + i\frac{a_j - a_k}{k-j}$，移項後得 $b_i = a_k + k\frac{a_j - a_k}{k-j} - i\frac{a_j - a_k}{k-j} = \frac{a_k(k-j) + k(a_j - a_k) - i(a_j - a_k)}{k-j}$，所以可得定義 4.3.6中的最大係數 $b_i = \frac{a_k(i-j) + a_j(k-i)}{k-j}$。 □

範例 4.3.3. 判斷熱帶多項式 $3x^5 \oplus -6x^4 \oplus 7x^3 \oplus -8x \oplus 6$ 是否為最大係數多項式？

根據定義 4.3.6，最大係數 $b_i = \max\{\{a_i\} \cup \{\frac{a_j(k-i) + a_k(i-j)}{k-j} \mid r \leq j < i <$

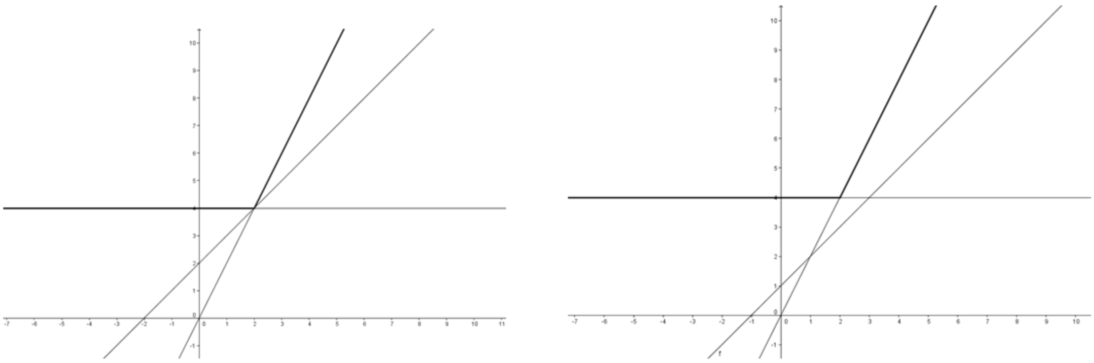


圖 4.6: 直線 $y = a_i + ix$ 當 a_i 一直變大，直到三條直線交於一點，此時 a_i 即為最大係數，以 b_i 表示。

$k \leq n\}\}$
因此先討論 4 次項係數 b_4，$i = 4$：

(1) $k = 5$，$a_k = 3$；$j = 0$，$a_j = 6$ $b_4 = \dfrac{6(5-4)+3(4-0)}{5-0} = \dfrac{6+12}{5} = \dfrac{18}{5}$

(2) $k = 5$，$a_k = 3$；$j = 1$，$a_j = -8$ $b_4 = \dfrac{-8 \times 1 + 3 \times 3}{4} = \dfrac{-8+9}{4} = \dfrac{1}{4}$

(3) $k = 5$，$a_k = 3$；$j = 3$，$a_j = 7$ $b_4 = \dfrac{7+3}{2} = 5$

所以 $b_4 = \max\{-6, \frac{18}{5}, \frac{1}{4}, 5\} = 5$，-6 並不是最大係數，因此這條線和根的圖形不相交。如圖 4.7。

3 次項係數 b_3，$i = 3$：

(1) $k = 5$，$a_k = 3$；$j = 0$，$a_j = 6$ $b_3 = \dfrac{6 \times 2 + 3 \times 3)}{5} = \dfrac{21}{5}$

(2) $k = 5$，$a_k = 3$；$j = 1$，$a_j = -8$ $b_3 = \dfrac{-8 \times 2 + 3 \times 2}{4} = \dfrac{-5}{2}$

(3) $k = 4$，$a_k = -6$；$j = 0$，$a_j = 6$ $b_3 = \dfrac{6 + (-6) \times 3}{4} = -3$

(4) $k=4$，$a_k=-6$；$j=1$，$a_j=-8$ $b_3=\dfrac{-8+(-12)}{3}=\dfrac{-20}{3}$

所以 $b_3=$max$\{7,\dfrac{21}{5},\dfrac{-5}{2},-3,\dfrac{-20}{3}\}=7$，7 是最大係數。

1 次項係數 b_1，$i=1$：

(1) $k=5$，$a_k=3$；$j=0$，$a_j=6$ $b_1=\dfrac{6\times 4+3\times 1)}{5}=\dfrac{27}{5}$

(2) $k=4$，$a_k=-6$；$j=0$，$a_j=6$ $b_1=\dfrac{6\times 3+(-6)\times 1}{4}=3$

(3) $k=3$，$a_k=7$；$j=0$，$a_j=6$ $b_1=\dfrac{12+7}{3}=\dfrac{19}{3}$

所以 $b_1=$max$\{-8,\dfrac{27}{5},3,\dfrac{19}{3}\}=\dfrac{19}{3}$，$-8$ 並不是最大係數，因此這條線和根的圖形不相交。如圖 4.7。

將範例 4.3.3 的熱帶多項式 $3x^5\oplus -6x^4\oplus 7x^3\oplus -8x\oplus 6$ 畫出來圖形如下圖 4.7。

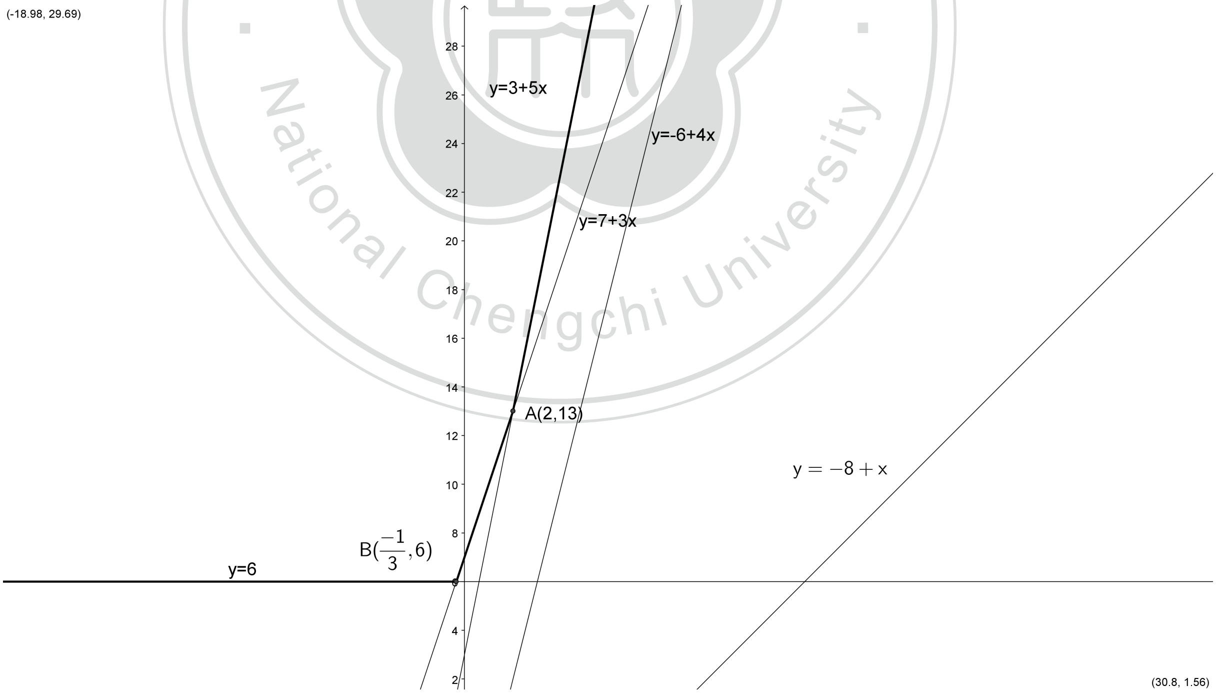


圖 4.7: $3x^5\oplus -6x^4\oplus 7x^3\oplus -8x\oplus 6$ 的圖形

在範例 4.3.3的熱帶多項式 $3x^5 \oplus -6x^4 \oplus 7x^3 \oplus -8x \oplus 6$，若將係數改為最大係數，則可得最大係數多項式 $3x^5 \oplus 5x^4 \oplus 7x^3 \oplus \frac{19}{3}x \oplus 6$，根據定義 4.3.5則可因式分解為 $3(x\oplus 2)\odot(x\oplus 2)\odot(x\oplus\frac{-2}{3}\times\frac{1}{2})\odot(x\oplus\frac{-1}{3}) = 3(x\oplus 2)\odot(x\oplus 2)\odot(x\oplus\frac{-1}{3})\odot(x\oplus\frac{-1}{3})$，其中因為缺二次項，一次項和三次項差 2，所以因式分解時需再調整乘 $\frac{1}{2}$，所以 $(x\oplus\frac{-2}{3}\times\frac{1}{2})$。最大係數多項式 $3x^5 \oplus 5x^4 \oplus 7x^3 \oplus \frac{19}{3}x \oplus 6 = 3(x\oplus 2)\odot(x\oplus 2)\odot(x\oplus\frac{-1}{3})\odot(x\oplus\frac{-1}{3})$，如圖 4.8。

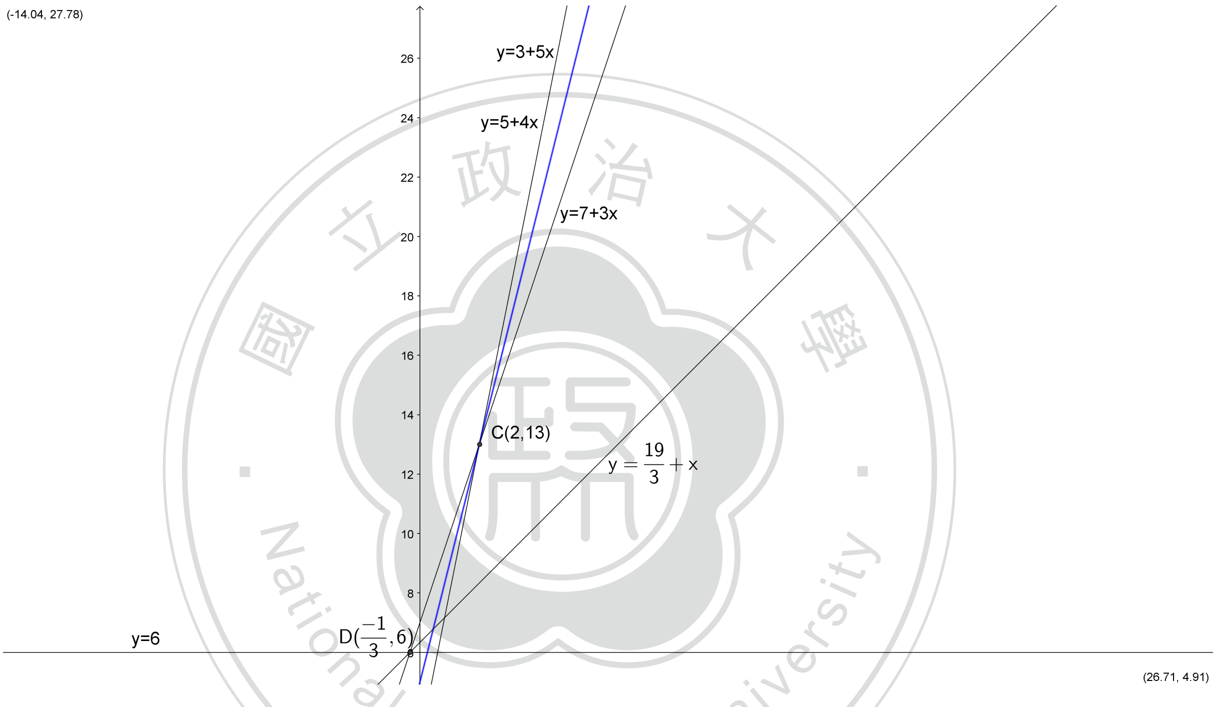


圖 4.8: 最大係數多項式 $3x^5 \oplus 5x^4 \oplus 7x^3 \oplus \frac{19}{3}x \oplus 6 = 3(x\oplus 2)\odot(x\oplus 2)\odot(x\oplus\frac{-1}{3})\odot(x\oplus\frac{-1}{3})$

定義 4.3.7. 一熱帶多項式按降冪排列 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus ... \oplus a_r x^r$，若後項係數減前項係數為遞減，則為最大係數多項式；反之，則不是最大係數多項式。

範例 4.3.4. 利用定義 4.3.7，判斷下列熱帶多項式是否為最大係數多項式？

(1) $x^2 \oplus 3x \oplus 4$ 因為 $(3-0) > (4-3)$，所以是最大係數多項式。

(2) $x^2 \oplus 3x \oplus 8$ 因為 $(3-0) < (8-3)$，所以不是最大係數多項式。

(3) $2x^3 \oplus 5x^2 \oplus 7x \oplus 6$ 因為 $(5-2) > (7-5) > (6-7)$，所以是最大係數多項式。

(4) $2x^3 \oplus 3x^2 \oplus 6x \oplus 10$ 因為 $(3-2) < (6-3) < (10-6)$，所以不是最大係數多項式。

(5) 範例 4.3.3 $3x^5 \oplus -6x^4 \oplus 7x^3 \oplus -8x \oplus 6$ 因為 $(-6-3) = -9$，$(7-(-6)) = 13$，$(-8-7) = -15$，$(6-(-8)) = 14$，其中 $-9 < 13$，$-15 < 14$，所以四次項係數 -6 和一次項係數 -8 不是最大係數。

接下來利用定義 4.3.6來觀察沒有缺項、一般型的最大係數的快速判斷法

範例 4.3.5. $a_4x^4 \oplus a_3x^3 \oplus a_2x^2 \oplus a_1x \oplus a_0$ x^3 項的最大係數 b_3：

(1) $\dfrac{a_3 + a_1}{2}$

(2) $\dfrac{2a_4 + a_1}{3}$

(3) $\dfrac{3a_3 + a_0}{4}$

$$b_3 = \max\{\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{2a_4 + a_1}{3}, \frac{3a_3 + a_0}{4}\}$$

x^2 項的最大係數 b_2：

(1) $\dfrac{a_3 + a_1}{2}$

(2) $\dfrac{a_4 + 2a_1}{3}$

(3) $\dfrac{2a_3 + a_0}{3}$

(4) $\dfrac{2a_4 + 2a_0}{4}$

$$b_2 = \max\{\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{a_4 + 2a_1}{3}, \frac{2a_3 + a_0}{3}, \frac{2a_4 + 2a_0}{4}\}$$

x 項的最大係數 b_1：

(1) $\dfrac{a_2 + a_0}{2}$

(2) $\dfrac{a_3+2a_0}{3}$

(3) $\dfrac{a_4+3a_0}{4}$

$b_3 = \max\{\dfrac{a_2+a_0}{2}, \dfrac{a_3+2a_0}{3}, \dfrac{a_4+3a_0}{4}\}$

由上列可以觀察出分母為分子係數和，分子的變化為由鄰近兩邊的係數開始為 $(1,1)$，下一次固定一邊，另一邊退一項，則不動的那邊係數加 1，分母也跟著加 1，再交換，固定另一邊，以此類推。

接下來我們觀察完全缺項的熱帶多項式該如何快速找最大係數?

那麼若是一元三次方的最大係數又該如何判斷呢?

範例 4.3.6. 一元三次的熱帶多項式 $2x^3 \oplus bx^2 \oplus cx \oplus 8$，則最大係數 b, c 為多少？假設沒有二次項，那麼 $2x^3 \oplus cx \oplus 8$ 中一次項的係數 c 最大值應為 $(2,8)$ 代入 $y = x + c$，$8 = 2 + c$，$c = 6$。
如圖 4.9，可得知一次項的最大係數為 6。

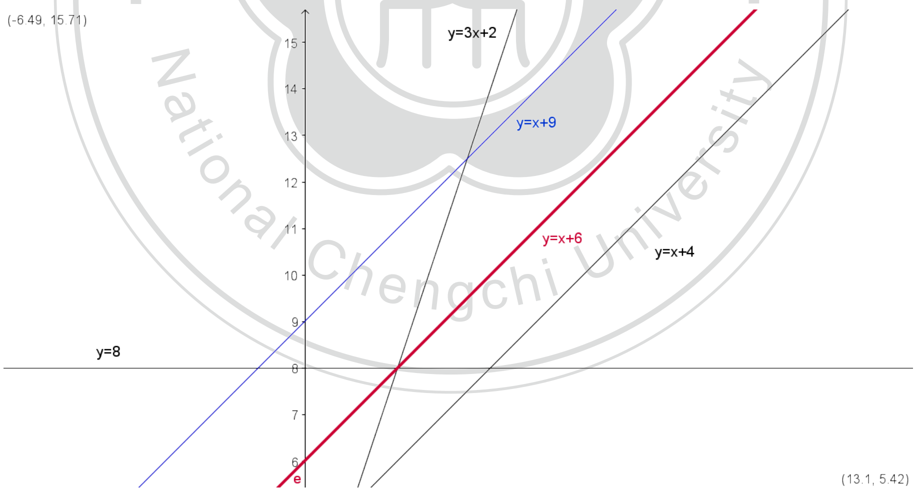


圖 4.9: $2x^3 \oplus cx \oplus 8$，c 最大值為 6

同理，假設沒有一次項，那麼 $2x^3 \oplus bx^2 \oplus 8$ 中一次項的係數 b 最大值應為 $(2,8)$ 代入 $y = 2x + b$，$8 = 2 \times 2 + b$，$b = 4$。
如圖 4.10，可得知二次項的最大係數為 4。

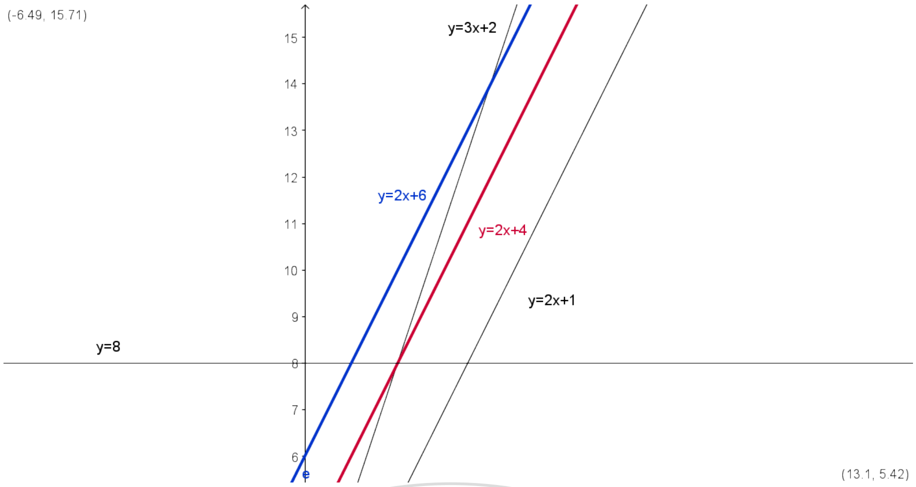


圖 4.10: $2x^3 \oplus bx^2 \oplus 8$，$b$ 最大值為 4

所以求得最大係數多項式為 $2x^3 \oplus 4x^2 \oplus 6x \oplus 8$，且可因式分解：

$$
\begin{aligned}
2x^3 \oplus 4x^2 \oplus 6x \oplus 8 &= 2 \odot (x^3 \oplus (4-2) \odot x^2 \oplus (6-2) \odot x \oplus (8-2)) \\
&= 2 \odot (x^3 \oplus 2 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 6) \\
&= 2 \odot (x \oplus (2-0)) \odot (x \oplus (4-2)) \odot (x \oplus (6-4)) \\
&= 2 \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus 2) \\
&= 2 \odot (x \oplus 2)^3
\end{aligned}
$$

圖形如圖 4.11

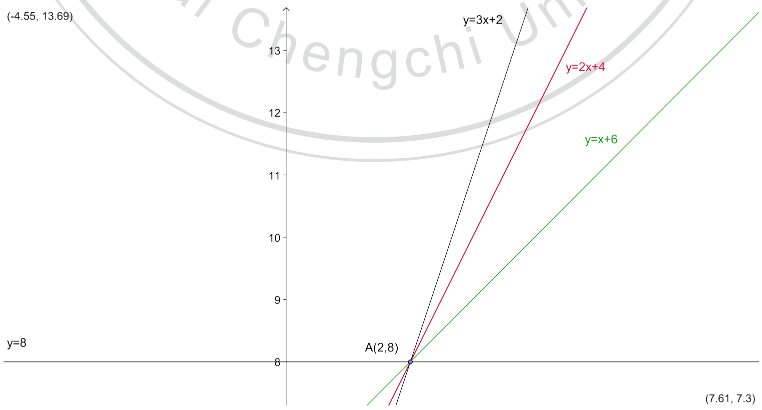


圖 4.11: 最大係數多項式為 $2x^3 \oplus 4x^2 \oplus 6x \oplus 8$，且可因式分解為 $2(x \oplus 2)^3$

我們也可以知道，若二次項或一次項的係數小於最大係數，則該項可忽略，

並不影響圖形。同理，若是最大係數多項式，則可以快速的因式分解。

範例 **4.3.7.** 因式分解 $2x^3 \oplus 5x^2 \oplus 7x \oplus 8$，並畫出其圖形。
由範例 4.3.6，我們已知道 $2x^3 \oplus 5x^2 \oplus 7x \oplus 8$ 為最大係數多項式，因此可因式分解：

$$\begin{aligned}
2x^3 \oplus 5x^2 \oplus 7x \oplus 8 &= 2 \odot (x^3 \oplus (5-2) \odot x^2 \oplus (7-2) \odot x \oplus (8-2)) \\
&= 2 \odot (x^3 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 6) \\
&= 2 \odot (x \oplus (3-0)) \odot (x \oplus (5-3)) \odot (x \oplus (6-5)) \\
&= 2 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus 1)
\end{aligned}$$

圖形如圖 4.12

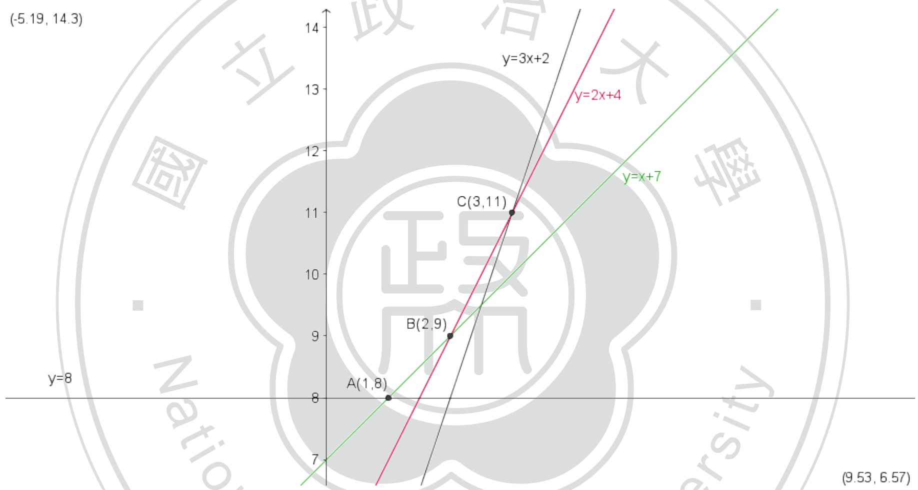


圖 4.12: 最大係數多項式為 $2x^3 \oplus 5x^2 \oplus 7x \oplus 8 = 2(x \oplus 3) \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus 1)$

我們可以知道，若二次項或一次項的係數小於最大係數，則該項可忽略，並不影響圖形。同理，若是最大係數多項式，則可以快速的因式分解。

從範例 4.3.5我們可以知道若不是最大係數時，則該項可忽略不計，再來我們要進一步證明，最大係數只和該項的前後項的最大係數有關，並不需要像定義 4.3.6比較所有的係數，如定理 4.3.8。

定理 **4.3.8.** 熱帶多項式 $a_k x^k \oplus ... \oplus a_l x^l \oplus ... \oplus a_i x^i \oplus ... \oplus a_j x^j \oplus ...$，其中 $k > l > i > j$。假設 x^i 項的係數 a_i 已經是最大係數，所以根據定義 *4.3.6*,$a_i \geq \dfrac{a_j(k-i) + a_k(i-j)}{k-j}$，則 x^l 項的最大係數 $b_l = \dfrac{a_i(k-l) + a_k(l-i)}{k-i}$。也就是說最大係數 b_l 不受 $a_j x^j$ 項的影響。

Proof. $b_l = \dfrac{a_i(k-l)+a_k(l-i)}{k-i}$，將 $a_i \geq \dfrac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j}$ 代入，

$$b_l \geq \frac{\dfrac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j}(k-l)+a_k(l-i)}{k-i}$$

$$b_l \geq \frac{a_j(k-i)(k-l)+a_k(i-j)(k-l)+a_k(l-i)(k-j)}{(k-j)(k-i)}$$

$$b_l \geq \frac{a_j(k-i)(k-l)+a_k(lk-lj-ik+ij+ik-il-kj+lj)}{k-j)(k-i)}$$

$$b_l \geq \frac{a_j(k-i)(k-l)+a_k(k-i)(l-j)}{(k-j)(k-i)}$$

$$b_l \geq \frac{a_j(k-l)+a_k(l-j)}{(k-j)}$$

計算結果和定義 4.3.6，$b_l \geq \dfrac{a_j(k-l)+a_k(l-j)}{k-j}$ 相同。 □

範例 **4.3.8.** 利用定理 4.3.8重新計算範例 4.3.3

$3x^5 \oplus -6x^4 \oplus 7x^3 \oplus -8x \oplus 6$ 由 5 次項係數 3 和常數項 6 先判定 x^3 項的係數是否為最大係數，x^3 項的最大係數 $b_3 \geq \dfrac{3\times 3+6\times 2}{5} = \dfrac{21}{5}$，所以 7 是 x^3 項的最大係數。x^4 項的最大係數 $b_4 = \dfrac{3+7}{2} = 5$。x 項的最大係數 $b_1 = \dfrac{7+6\times 2}{3} = \dfrac{19}{3}$。
計算結果與範例 4.3.3相同。

第 5 章　二元二次熱帶多項式的快速畫圖法

5.1　一元二次的熱帶齊次多項式

觀察一元二次的熱帶齊次多項式，是否可以從中找出所對應的三角形切割。

範例 **5.1.1.** $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 2 = \max\{2x, x+y, 2y, 2\}$

1 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = x + y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$。

2 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq x + y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$。

3 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2 \Rightarrow x = 1$；

$2x \geq x + y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow 1 \geq y$。

4 當 $x + y$ 為最大值，而且

$x + y = 2y \Rightarrow x = y$；

$x + y \geq 2 \Rightarrow x \geq y$；

$x + y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

5 當 $x+y$ 為最大值，而且

$x+y=2$；

$x+y \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$x+y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y=2 \Rightarrow y=1$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$；

$2y \geq x+y \Rightarrow y \geq x \Rightarrow 1 \geq x$。

依照六個條件畫出來的圖形如圖 5.1。

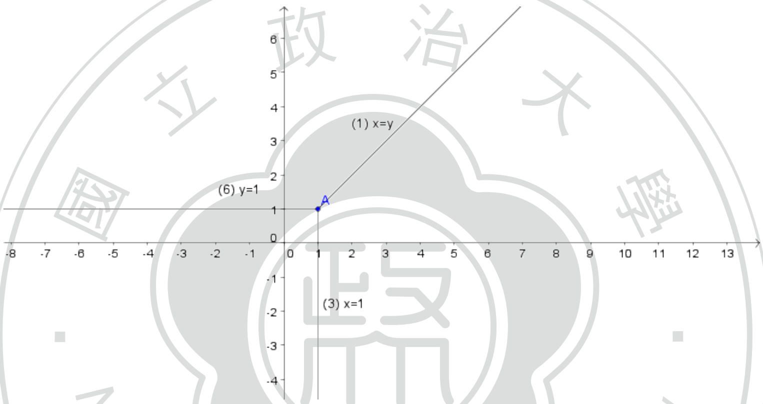


圖 5.1: $p(x)=x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 2$ 的函數圖形

由圖 5.1可以發現中心點為 $(1,1)$，而且以 $(1,1)$ 為中心有 3 條射線，分別向右上、左和下方。

範例 **5.1.2.** $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 3 = \max\{2x, x+y, 2y, 3\}$

1 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x=x+y \Rightarrow x=y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$。

2 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x=2y \Rightarrow x=y$；

$2x \geq x+y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 3 \Rightarrow$ 同 [1]。

3 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$；

$2x \geq x+y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow \dfrac{3}{2} \geq y$。

4 當 $x+y$ 為最大值，而且

$x+y=2y \Rightarrow x=y$；

$x+y \geq 3$；

$x+y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

5 當 $x+y$ 為最大值，而且

$x+y=3$；

$x+y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$；

$x+y \geq 2y \Rightarrow x \geq y$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y=3 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$；

$2y \geq x+y \Rightarrow y \geq x \Rightarrow \dfrac{3}{2} \geq x$。

依照六個條件畫出來的圖形如圖 5.2，發現中心位置移至 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$。

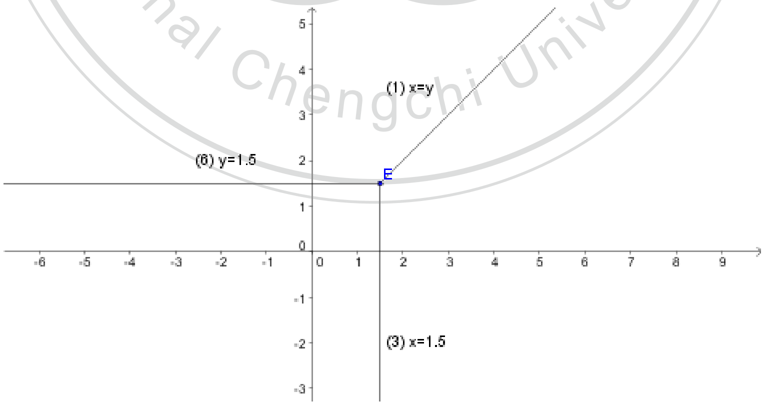


圖 5.2: $p(x)=x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 3$ 的函數圖形

範例 **5.1.3.** $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 0$ =max$\{2x, x+y, 2y, 0\}$，注意:常數項 0 要寫！

1 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = x + y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$。

2 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq x + y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 0 \Rightarrow$ 同 [1]。

3 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$；

$2x \geq x + y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow 0 \geq y$。

4 當 $x + y$ 為最大值，而且

$x + y = 2y \Rightarrow x = y$；

$x + y \geq 0$；

$x + y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

5 當 $x + y$ 為最大值，而且

$x + y = 0$；

$x + y \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$x + y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$；

$2y \geq x + y \Rightarrow y \geq x, 0 \geq x$。

依照六個條件畫出來的圖形如圖 5.3，中心位置是 $(0, 0)$。

特別注意的是：若常數項是 0 也不可以省略!因為條件將會不足，例如範例 5.1.4就是將範例 5.1.3的常數項省略。

範例 **5.1.4.** $x^2 \oplus xy \oplus y^2 = \max\{2x, x + y, 2y\}$

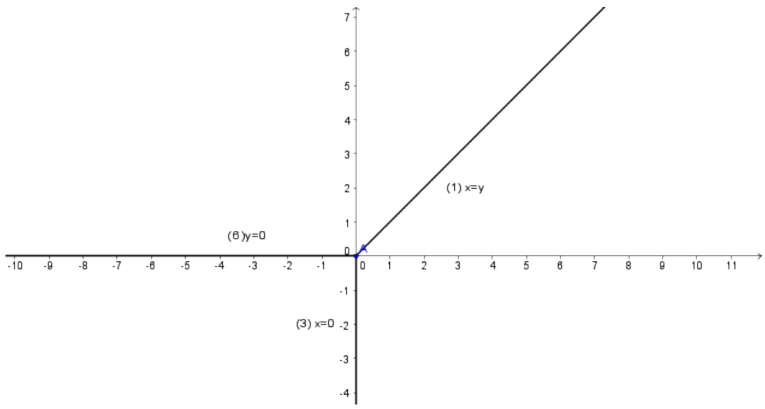


圖 5.3: $p(x) = x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 0$ 的函數圖形

1 當 $2x$ 為最大值，而且 $2x = x + y \Rightarrow x = y$；$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$。原本範例 5.1.3 後面的條件都不見了！

2 當 $2x$ 為最大值，而且 $2x = 2y \Rightarrow x = y$；$2x \geq x + y \Rightarrow x \geq y$。

3 沒有常數項了，無須做比較。

4 當 $x + y$ 為最大值，而且 $x + y = 2y \Rightarrow x = y$；$x + y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

依照上列條件發現此圖形只有一條線: $x = y$。和範例 5.1.3的圖形完全不同。因為在熱帶多項式中，當我們把常數項省略時，其實是代表常數項是 $-\infty$ 而不是 0。因此當常數項是 0 時也不可以省略！

小結：在一元二次的熱帶齊次多項式中，將可能產生最大值的情況做連線，分別是 x^2, xy, y^2 和常數項，所以連接 (2,0)、(1,1)、(0,2)和 (0,0)，所以一般式 $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus c$ 其所對應的三角形切割的中心點必為 $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$，以中心點出發分別作三角形三邊的垂直線即為所對應的三角形切割，如圖 5.4。

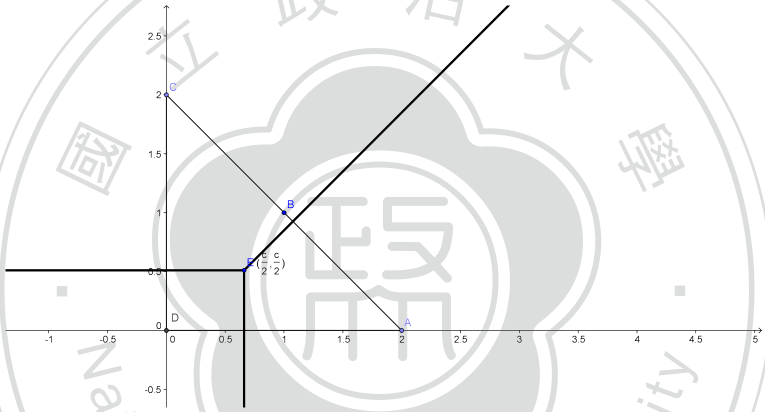


圖 5.4: $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus c$ 所對應的三角形切割的中心點必為 $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$

5.2 xy 的係數不為 0 所對應的三角形切割

範例 **5.2.1.** $x^2 \oplus 2xy \oplus y^2 \oplus 0 = \max\{2x, 2+x+y, 2y, 0\}$

1 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2 + x + y \Rightarrow x - y = 2$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$。

所以 $x - y = 2$，$x \geq 0$。

2 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq 2 + x + y \Rightarrow x - y \geq 2$；

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$；不合。

3 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$；

$2x \geq 2 + x + y \Rightarrow x - y \geq 2$，$x = 0$ 代入，得 $-y \geq 2$，$y \leq -2$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow 0 \geq y$。

所以 $x = 0, y \leq -2$。

4 當 $2 + x + y$ 為最大值，而且

$2 + x + y = 2y \Rightarrow x - y + 2 = 0$；

$2y \geq 0$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

所以 $x - y + 2 = 0$，$y \geq 0$，$y \geq x$。

5 當 $2 + x + y$ 為最大值，而且

$2 + x + y = 0$；

$2 + x + y \geq 2y$；

$2 + x + y \geq 2x$。

所以是線段 $(-2, 0)$、$(0, -2)$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$，$y = 0$ 代入，$0 \geq x$；

$2y \geq 2 + x + y$，$y = 0$ 代入 $\Rightarrow x \leq -2$。

所以 $y = 0$，$x \leq -2$。

依照此六個條件畫出 $x^2 \oplus 2xy \oplus y^2 \oplus 0$ 的圖形如圖 5.5。

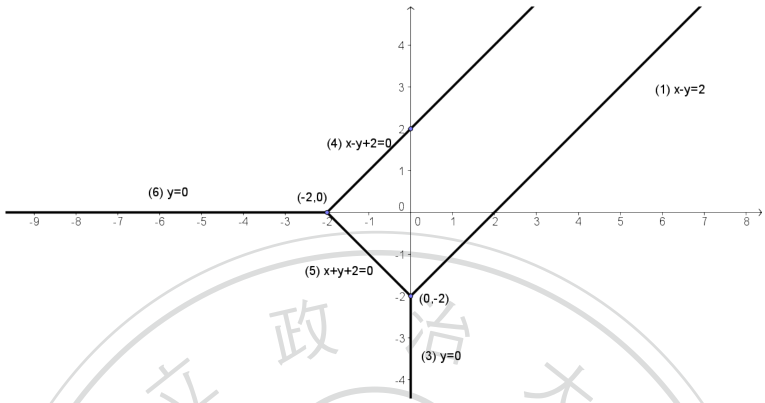


圖 5.5: $x^2 \oplus 2xy \oplus y^2 \oplus 0$ 的函數圖形

範例 **5.2.2.** $x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6 = \max\{2x, 4+x+y, 2y, 6\}$

1 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 4+x+y \Rightarrow x-y=4$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$；

$2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$。

所以 $x-y=4$，$x \geq 3$。

2 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 2y \Rightarrow x = y$；

$2x \geq 4+x+y \Rightarrow x-y \geq 4$；

$2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$；

不合。

3 當 $2x$ 為最大值，而且

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$；

$2x \geq 4+x+y \Rightarrow x-y \geq 4$；

$2x \geq 2y \Rightarrow x \geq y$。

所以 $x = 3, x-y \geq 4$。

4 當 $4+x+y$ 為最大值，而且

$4+x+y = 2y \Rightarrow x-y+4=0$；

$2y \geq 6 \Rightarrow y \geq 3$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$。

所以 $x-y+4=0$，$y \geq 3$，$y \geq x$。

5 當 $4+x+y$ 為最大值，而且

$4+x+y = 6 \Rightarrow x+y=2$；

$4+x+y \geq 2y$；

$4+x+y \geq 2x$。

所以是線段 $(-1,3)$、$(3,-1)$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y = 6 \Rightarrow y = 3$；

$2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$；

$2y \geq 4+x+y$。

所以 $y=3$，$x \leq -1$。

依照此六個條件畫出 $x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6$ 的圖形如圖 5.6。

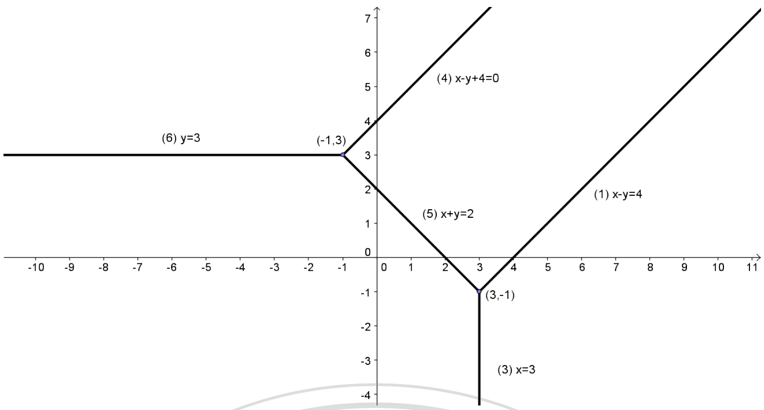


圖 5.6: $x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6$ 的函數圖形

由範例 5.5和範例 5.6，可以發現有兩個中心點，可推得中心點：若一個二元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bxy \oplus cy^2 \oplus d$，當 $a = 0$，$c = 0$，則中心點為 $(\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - b)$ 和 $(\frac{d}{2} - b, \frac{d}{2})$。而且，發現到當二元二次熱帶多項式的 xy 係數大於 0 時，xy 項和常數項有機會產生最大值，因此所對應的三角形切割須連接 $(1, 1)$ 和 $(0, 0)$，所以會切割出兩個三角形，再分別以中心點出發作三邊的垂直線。所對應的三角形切割如圖 5.7。

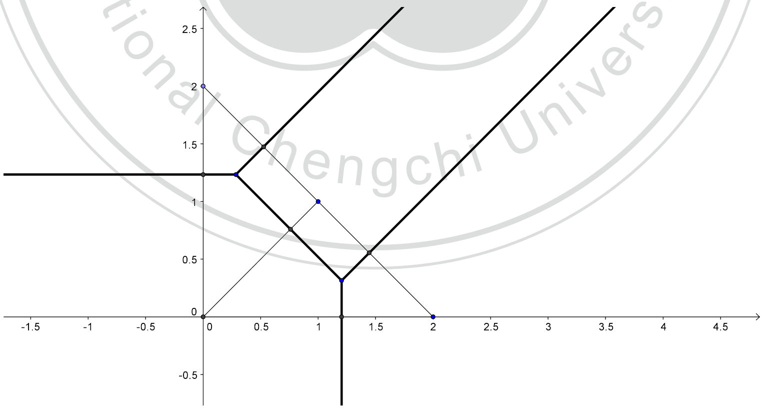


圖 5.7: $ax^2 \oplus bxy \oplus cy^2 \oplus d$ 所對應的三角形切割 $(b > 0)$

再來看看當二次項係數不是 0 的情況。

範例 **5.2.3.** $2x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6 = \max\{2 + 2x, 4 + x + y, 2y, 6\}$

1 當 $2+2x$ 為最大值，而且

$2+2x=4+x+y \Rightarrow x-y+1 \geq 0$；

$2+2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$；

$2+2x \geq 6$；

不合。

2 當 $2+2x$ 為最大值，而且

$2+2x=2y \Rightarrow x-y+1=0$；

$2+2x \geq 4+x+y \Rightarrow x-y \geq 2$；

$2+2x \geq 6$；

不合。

3 當 $2+2x$ 為最大值，而且

$2+2x=6 \Rightarrow x=2$；

$2+2x \geq 4+x+y \Rightarrow x-y \geq 2$；

$2+2x \geq 2y \Rightarrow x-y+1 \geq 0$。

所以 $x=2, x-y \geq 2$。

4 當 $4+x+y$ 為最大值，而且

$4+x+y=2y \Rightarrow x-y+4=0$；

$2y \geq 6 \Rightarrow y \geq 3$；

$2y \geq 2+2x \Rightarrow -x+y-1 \geq 0$。

所以 $x-y+4=0$，$y \geq 3$。

5 當 $4+x+y$ 為最大值，而且

$4+x+y=6 \Rightarrow x+y=2$；

$4+x+y \geq 2y$；

$4+x+y \geq 2x$。

所以是線段 $(-1,3)$、$(2,0)$。

6 當 $2y$ 為最大值，而且

$2y=6 \Rightarrow y=3$；

$2y \geq 2+2x \Rightarrow -x+y-1 \geq 0$；

$2y \geq 4+x+y$。

所以 $y=3$，$x-y+4 \leq 0$。

依照此六個條件畫出 $2x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6$ 的圖形如圖 5.8。

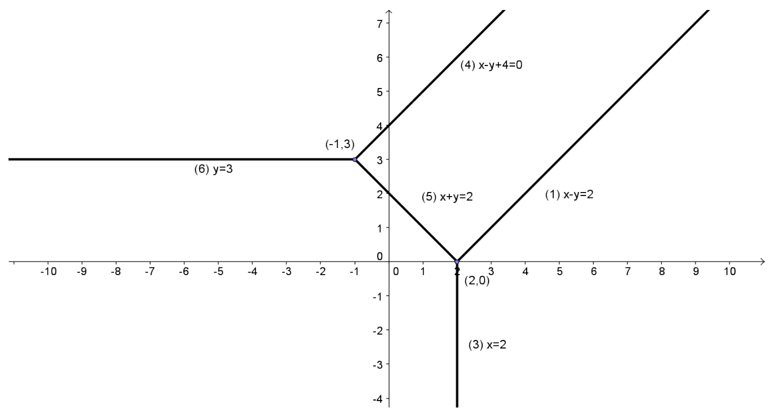


圖 5.8: $2x^2 \oplus 4xy \oplus y^2 \oplus 6$ 的函數圖形

二次項係數非 0 的圖形和二次項係數為 0 的圖形類似，但中心點的座標會改變為：若一個二元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bxy \oplus y^2 \oplus d$，則中心點為 $(\frac{d-a}{2}, \frac{d-a-b}{2})$ 和 $(\frac{b-d}{2}, \frac{d}{2})$。

第 6 章　結論

我們將 4、5 章所得到的結果整理如下:

1 在一般的多項式中，係數 1 是被省略的，而常數項則是 0 會被省略；但在熱帶多項式中，我們發現到若係數是 0 才是被省略的，例如在範例 4.1.1中的 $x^2 \oplus 1x \oplus 1$ 其實可以寫成 $0x^2 \oplus 1x \oplus 1$，因為 $x^2 \oplus 1x \oplus 1 = 0x^2 \oplus 1x \oplus 1 = \max\{2x, 1+x, 1\}$，而二次項係數被省略的是 0 而不是 1，因為 $0x^2 \neq 1x^2$，$0 + x^2 \neq 1 + x^2$。這是因為在熱帶多項式中，0 是熱帶乘法的單位元素，所以係數 0 被省略。

2 在熱帶多項式中，常數項是 $-\infty$ 才是被省略的，因為 $-\infty$ 是熱帶加法的單位元素；所以 $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \neq x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus 0$。

3 熱帶多項式的二次項係數為 0 時，有快速的方法可檢查是否可以因式分解：將熱帶多項式的常數項拆成兩數相加後，檢查一次項係數是否為兩數中較大的值。若是，則可因式分解；反之，則不能因式分解。

4 一元二次的熱帶多項式也有類似古典幾何中的十字交乘，將其稱為十字交“加”：

將二次項係數和常數項係數拆成相加的組合，利用十字交加檢查一次項係數，取較大的數，即為因式分解。因此可以十字交加因式分解的熱帶多項式必為最大係數多項式。

5 在古典幾何中不可因式分解的一般多項式，在熱帶多項式中是可以因式分解的。例如：$x^2 + 2x + 3$ 不可以因式分解；但若是熱帶多項式 $x^2 \oplus 2x \oplus 3$ 則可以因式分解成 $x^2 \oplus 2x \oplus 3 = (x \oplus 1) \odot (x \oplus 2)$。

6 若是最大係數多項式，則因式分解唯一；而且若該項係數不是最大係數，則可忽略不計。

7 一個一元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bx \oplus c$，若 $b \geq \frac{(c-a)}{2}$，則此熱帶多項式為最大係數多項式。

8 若是最大係數多項式，則因式分解即：
$ax^2 \oplus bx \oplus c = a(x \oplus (b-a)) \odot (x \oplus (c-a-b))$。

9 若一熱帶多項式 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus ... \oplus a_r x^r$，則 $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1} x^{n-1} \oplus ... \oplus b_r x^r$ 稱為 $f(x)$ 的最大係數多項式，其中
$b_i = max\{\{a_i\} \cup \{\frac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j} \mid r \leq j < i < k \leq n\}\}$

10 一熱帶多項式按降冪排列 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus ... \oplus a_r x^r$，若後項係數減前項係數為遞減，則為最大係數多項式；反之，則不是最大係數多項式。

11 熱帶多項式 $a_k x^k \oplus ... \oplus a_l x^l \oplus ... \oplus a_i x^i \oplus ... \oplus a_j x^j \oplus ...$，其中 $k > l > i > j$。假設 x^i 項的係數 a_i 已經是最大係數，所以根據定義 4.3.6，$a_i \geq \frac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j}$，則 x^l 項的最大係數 $b_l = \frac{a_i(k-l)+a_k(l-i)}{k-i}$。也就是說最大係數 b_l 不受 $a_j x^j$ 項的影響。

12 一元二次熱帶多項式型如 $x^2 \oplus xy \oplus y^2 \oplus C$ 其所對應的三角形切割的中心點必為 $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$，以中心點出發分別作三角形三邊的垂直線即為所對應的三角形切割，如圖 5.4

13 若一個二元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bxy \oplus cy^2 \oplus d$，當 $a = 0$，$c = 0$，則中心點為 $(\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - b)$ $(\frac{d}{2} - b, \frac{d}{2})$。當二元二次熱帶多項式的 xy 係數大於 0 時，所對應的三角形切割如圖 5.7

14 二次項係數非 0 的圖形和二次項係數為 0 的圖形類似，但中心點的座標會改變為：若一個二元二次熱帶多項式 $ax^2 \oplus bxy \oplus y^2 \oplus d$，則中心點為 $(\frac{d-a}{2}, \frac{d-a-b}{2})$ 和 $(\frac{b-d}{2}, \frac{d}{2})$。

Bibliography

[1] 林如苹, *Largest-coefficient Tropical Polynomials and Their Applications*, PhD thesis, National Chengchi University, 2009.

[2] 黃馨儀, *On Tropical Conics*, PhD thesis, National Chengchi University, 2010.

[3] A. Gathmann, *Tropical algebraic geometry*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 108 (2006), pp. 3–32.

[4] N. B. Grigg, *Factorization of Tropical Polynomials in One and Several Variables*, PhD thesis, Brigham Young University, 2007.

[5] Y.-L. Tsai, *Working with tropical meromorphic functions of one variable*, Taiwanese J. Math., 16 (2012), pp. 691–712.