國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

一個環狀排列的公式
A Formula for Calculating Circular Permutations

碩專班學生：孫航同 撰

指導教授：李陽明博士

中華民國 一0一 年 八 月二十四日

目　　錄

摘　要

這篇論文的目的，是要詳細解釋用波利亞計數方法來求解環狀排列問題的基本原理。為了達到這個目的，一開始對循環群的概念做了介紹。其次是伯恩賽定理的說明。接下來闡述波利亞計數方法的細節，最後藉由波利亞計數定理，設法建立一個可計算任何環狀排列問題的公式，並舉出實例，以顯示其實用價值。

Abstract

The purpose of this thesis is to explain the basic principles of the circular permutations using the Pólya's enumeration method. Firstly , we introduce the concept of the cyclic groups. Secondly , we illustrate the Burnside theorem , and then elaborate the Pólya's enumeration method. Finally , we establish a formula that can calculate any type of the circular permutations by the Pólya's enumeration method. And we also give several examples to reveal the results.

致謝辭

首先要感謝李老師兩年多來的指導，尤其是對於論文的許多改正，航同衷心銘感。

此外，我要感謝父母親的養育之恩，以及長時來對我的愛心照顧。

最後，特別要感謝我妻詹素怡默默地支持我，她為我這篇論文打字，並且在生活上給予我悉心的照料。

1 循環群的簡介

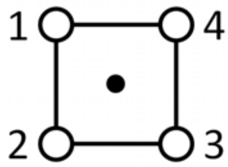
1.1 循環群

【定義 1.1.1】 假設G是一個群，$\sigma \in G$，若σ 所產生的群$<\sigma> = \{\sigma^i : i \in \mathbb{Z}\}$就是 G，則 G 是一個循環群。

由定義 1.1.1 知道，若元素 σ的階，寫成 $o(\sigma)$，是自然數n，即 $o(\sigma) = n$，那麼可進一步得出 $G = \{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$，它是一個$n$階循環群，常用 C_n來表示。

【定義 1.1.2】 假設 π 是 $T = \{1,2,\cdots,n\}$上的置換，從任意數字 a_1開始 $\pi(a_1) = a_2$，$\pi(a_2) = a_3$，…，$\pi(a_{p-1}) = a_p$，$\pi(a_p) = a_1$，就稱$(a_1, a_2, \cdots, a_p)$是π的一個長度為 p的循環節，或 $p-$ 循環節。

在定義 1.1.2 中，π 可以分成若干個互不相交的循環節的乘積。



圖(一)

如圖(一) 在正方形四個頂點上分別標示出 1、2、3、4 四個數字，以正方形的中心為圓心，沿逆時鐘方向轉動 90°的群元素 $\sigma = (1,2,3,4)$；轉動180°的群元素 $\sigma^2 = (1,3)(2,4)$；轉動 270°的群元素 $\sigma^3 = (1,4,3,2)$； 而 $\sigma^4 = e = (1)(2)(3)(4)$，可視為轉動$360^\circ$或不動的群元素。這四個元素構成一個四階循環群 $C_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$。

循環群有許多重要性質。下面要介紹兩個特別有用的循環群定理。

【定理 1.1.3】 設 $C_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$，$o(\sigma) = n$，若 $\sigma^t \epsilon\ C_n$，且 $gcd(t, n) = d$，則 $o(\sigma^t) = \frac{n}{d}$.

證明： 假設 $o(\sigma^t) = s$ ，因 $gcd(t, n) = d$，可令 $n = n'd$，$t = t'd$ 且 $gcd(t', n') = 1$。由於$(\sigma^t)^{n'} = (\sigma^n)^{t'} = e$ ，所以 s 是 n'的因數，即

$s \mid n' \cdots (1)$

另外，$(\sigma^t)^s = \sigma^{ts} = e$，所以 n是 ts 的因數，但 $gcd(t', n') = 1$，於是得出

$n' \mid s \cdots (2)$

綜合上面（1）、（2），得 $s = n'$，因此 $o(\sigma^t) = s = n' = \frac{n}{d}$ ■

【定理 1.1.4】 設 $C_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$ ，$o(\sigma) = n$，若 $\sigma^t \epsilon\ C_n$，且 $gcd(t, n) = d$，則 σ^t 和 σ^d 可以生成相同的子群，即$< \sigma^t > = < \sigma^d >$.

證明：因為 t含有正因數 d ，所以$< \sigma^t > \subseteq < \sigma^d >$ 必然成立。我們只需要證明$< \sigma^d > \subseteq < \sigma^t >$即可。$< \sigma^d >$ 中任意元素 $y = (\sigma^d)^q$，已知 $d = gcd(t, n)$，可找到 α、β兩個整數，使 $d = \alpha t + \beta n$，於是 $y = \sigma^{\alpha tq} \cdot \sigma^{\beta nq} = (\sigma^t)^{\alpha q} \in < \sigma^t >$ ■

【例題 1.1.5】 四階循環群 $C_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$，$\sigma = (1,2,3,4)$，$n = 4$，取 σ^2 ，$t = 2$，$gcd(t, n) = 2$，故 $o(\sigma^2) = 2$；取 σ^3，$t = 3$，$gcd(t, n) = 1$，故 $o(\sigma^3) = 4$ 。

由定理 1.1.4 知道，當 $gcd(t, n) = 1$ 時，σ^t可生成整個群，所以在 $C_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$ 中，任何 σ^j，$gcd(j, n) = 1$，σ^j 就是 C_n的生成元。

【**定義** 1.1.6】歐氏函數 $\varphi(n)$，是定義在所有自然數集上的函數，$\varphi(n)$為不超過n而且和n互質的所有自然數的個數。定義 1.1.6 也可以寫成數學式： $\varphi(n)=\left|\{x：1\leq x\leq n,\ gcd(x,n)=1\}\right|$

【**例題** 1.1.7】不超過 12 且和 12 互質的自然數有 1,5,7,11共四個數，故 $\varphi(12)=4$。

所以對於 C_n，若 $\varphi(n)=\xi$，表示 C_n 當中有ξ個元素是生成元。

1.2 循環節的應用

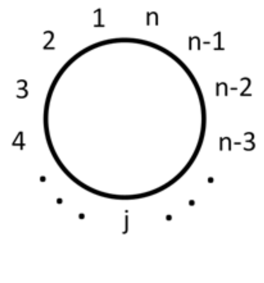
取 $\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$ 顯然有 $\sigma^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots & n-3 & n-2 & n-1 & n\\ 3 & 4 & 5\cdots & n-1 & n & 1 & 2\end{pmatrix}$

$$\sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n\\ 4 & 5 & 6\cdots & n-1 & n & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\sigma^4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n\\ 5 & 6 & 7\cdots & n-1 & n & 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n\\ n & 1 & 2\cdots & n-6 & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 & n-1\end{pmatrix}$$



圖(二)

很容易觀察出來，對於$\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$ 中任一個數字 j ，$\sigma^i(j)$表示數字 j 在圖(二)中沿逆時鐘方向移動 i 個間格，得出$i+j$ ，如果$i+j>n$ ，就必須模n ，於是有下面的結論：

【**定理 1.2.1**】 設 $\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$，$j=1,2,\cdots,n$ ，i 是任意正整數，

$$\sigma^i(j)=\begin{cases} i+j & 當\ i+j\le n \\ i+j(\mathrm{mod}\,n) & 當\ i+j>n \end{cases}.$$

【**引理 1.2.2**】 在循環群 C_n 中，$\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$，那麼對任意元素 σ^t，它的每個循環節長度均相同.

證明： 由定理1.1.3知道，若 $gcd(t,n)=d$，則 $o(\sigma^t)=\frac{n}{d}$ ，考慮 σ^t 的任一個循環節 $(j,\sigma^t(j),\sigma^{2t}(j),\cdots,\sigma^{(\frac{n}{d}-1)t}(j))$

取 $0\le u<v\le\frac{n}{d}-1$，並令 $\sigma^{ut}(j)=\sigma^{vt}(j)$，於是 $j+ut\equiv j+vt\ (mod\ n)$，所以 n 可以整除 $(v-u)t$，但是 $gc\,d\left(\frac{t}{d},\frac{n}{d}\right)=1$，因此 $\frac{n}{d}$ 是 $v-u$ 的因數，這是一個不合理的結果，因此，任意循環節的長度均為 $\frac{n}{d}$ ■

由引理 1.2.2 知道，在循環群 C_n 中，$\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$，那麼任意元素 σ^t 的循環節個數，由 $gcd(t,n)$ 來決定，如果 $gcd(t,n)=m$，則 σ^t 中必有 m 個循環節，每個循環節長度均為 $\frac{n}{m}$ 。

【**例題 1.2.3**】 在四階循環群 C_4 中，$\sigma=(1,2,3,4)$，$\sigma^2=(1,3)(2,4)$，$\sigma^3=(1,4,3,2)$，$\sigma^4=e=(1)(2)(3)(4)$ ，其中 σ 及 σ^3 都只有一個 $4-$循環節，σ^2 有兩個 $2-$循環節，σ^4 有四個 $1-$循環節。

1.3 循環指標式

設G是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置換群，其元素是由單個或多個互不相交的循環節組成。長度是 i 的循環節，通常用 x_i 來表示。例如：$2-$循環節 $(1,3)$ 用 x_2 表示；$3-$循環節 $(2,4,6)$ 用 x_3 表示。

【定義 1.3.1】 設G 是$\{1,2,\cdots,n\}$上的置換群，把G的每個元素都寫成 x_i 的乘積，然後相加，再除以群元素個數$|G|$，得到的多項式，稱為置換群G 的循環指標式，型如：

$$P_G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x_1^{\mu_1(g)}x_2^{\mu_2(g)}\cdots x_n^{\mu_n(g)}$$

上式中$\mu_i(g)$代表g當中x_i的個數。

【例題 1.3.2】 四階循環群$C_4=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$，其中$\sigma=(1,2,3,4)$，寫成$x_4$，$\sigma^2=(1,3)(2,4)$，寫成$x_2^2$，$\sigma^3=(1,4,3,2)$，寫成$x_4$，$\sigma^4=e=(1)(2)(3)(4)$，寫成$x_1^4$，所以$C_4$的循環指標式為$\frac{1}{4}(x_1^4+x_2^2+2x_4)$。

【例題 1.3.3】 群$G=\{(1)(2)(3)(4),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$，其中$(1)(2)(3)(4)$寫成$x_1^4$，其餘三個元素均可寫成$x_2^2$，故$G$的循環指標式為$\frac{1}{4}(x_1^4+3x_2^2)$。

【引理 1.3.4】 對任意正整數n，有$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$，其中$\varphi(d)$是歐氏函數.

證明： 設n的正因數為$d_1=1,d_2,\cdots,d_t=n$，

令集合$A_i=\{x：1\le x\le n,gcd(x,n)=d_i\}$ 很明顯的，A_i兩兩相離，

且$\bigcup_{i=1}^{t}A_i=\{1,2,\cdots,n\}$，所以 $n=|\{1,2,\cdots,n\}|=\sum_{i=1}^{t}|A_i|$

$=\sum_{i=1}^{t}\left|\left\{y：1\le y\le\frac{n}{d_i},gcd\left(y,\frac{n}{d_i}\right)=1\right\}\right|$

$=\sum_{i=1}^{t}\varphi\left(\frac{n}{d_i}\right)$

$=\sum_{d|n}\varphi(d)$ ∎

最後，要導出循環群 C_n 的循環指標式 。

【**定理 1.3.5**】n 階循環群 $C_n=\{e,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1}\}$，其中 $\sigma=(1,2,3,\cdots,n)$，

那麼 C_n 的循環指標式必為 $\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}}$.

證明： 設 n 的正因數為 $d_1=1, d_2,\cdots,d_t=n$，

令集合 $A_i=\left\{x：1\le x\le n, gcd(x,n)=d_i\right\}$ 且 $|A_i|=\varphi\left(\frac{n}{d_i}\right)$ ，

由引理 1.2.2 知道，每個元素 σ^k 共有 $m_k=gc\,d(k,n)$ 個長度為 n_k

$=\frac{n}{gc\,d(k,n)}$ 的循環節，故 C_n 的循環指標式應為

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{n_k}^{m_k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{k\in A_i}x_{n_k}^{m_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{k\in A_i}x_{\frac{n}{d_i}}^{d_i}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\varphi\left(\frac{n}{d_i}\right)x_{\frac{n}{d_i}}^{d_i}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}} \quad ■$$

上式中 d 和 $\frac{n}{d}$ 扮演互補的角色，它們都是 n 的正因數。

2 計數方法的原理

2.1 群對集合的作用

【定義 2.1.1】假設 $(G,\circ)$是一個群，S 是一個集合。如果存在某種運算 "$*$"，使得：

(1) 對任意 $g \in G$，$x \in S$，$g * x$ 仍然是 S中 的元素

(2) $(g_1 \circ g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$，$g_1$、$g_2 \in G$，$x \in S$

(3) $e * x = x$，e 是 G 的單位元素

就稱群 G 作用在集合 S 上。通常兩種運算符號“$*$”及“$\circ$” 也可以略去不寫。

【引理 2.1.2】群 G作用在集合 S上，對任意群元素 g，g是把 S 映射到 S的一對一且映成的函數.

證明： 考慮 S 中任兩個元素 x_1和 x_2，若 $gx_1 = gx_2 \Rightarrow g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2)$ $\Rightarrow (g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2 \Rightarrow ex_1 = ex_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ，這就證明了g是一對一的函數。另外，$x_1 \in S$ ，必存在 $x_2 = g^{-1}x_1 \in S$ ，使得 $gx_2 = x_1$，故 g 是映成函數 ■

事實上，若群G作用在S上，且$Perm(S)$為S上所有一對一的對應，那麼就會存在一個同態映射φ，使得 φ：$G \to Perm(S)$.

【定義 2.1.3】 假設$\sim$是建立在集合S上的一個關係，x、y、z 是任意元素，如果符合：

(1)(自身性) $x \sim x$

(2)(對稱性) 若 $x \sim y$，則 $y \sim x$

(3)(遞移性) 若 $x \sim y$ ，$y \sim z$，則 $x \sim z$

就稱 $\sim$ 是 S 上的等價關係。

在定義 2.1.3 中，若 $x \sim y$，我們說兩元素 x 和 y 是等價的。

【定理 2.1.4】設群 G 作用在 S 上，對任意 x、$y \in S$，若存在 $g \in G$，使得 $gx = y$，就記成 $x \sim y$，$\sim$ 是 S 上的等價關係 .

證明：

(1)對單位元素 $e \in G$，$x \in S$，$ex = x$，所以 $x \sim x$

(2)若 $x \sim y$，則存在 $g \in G$，使 $gx = y$，故 $g^{-1}(gx) = g^{-1}y$

$\Rightarrow (g^{-1}g)\,x = g^{-1}y \Rightarrow ex = g^{-1}y \Rightarrow g^{-1}y = x$，所以 $y \sim x$

(3)對任意 x、y、z，若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$，必可找到群元素 g_1、$g_2 \in G$，使

$g_1x = y$，$g_2y = z$，於是 $z = g_2y = g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$，所以 $x \sim z$，

綜合(1)、(2)、(3)，就證明了定理 ■

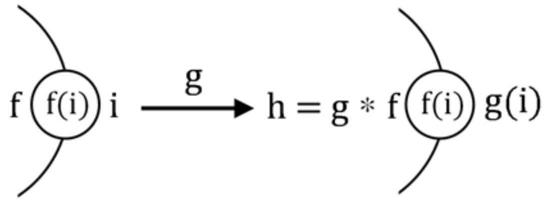
若 x 是任意元素，所有和 x 等價的元素形成的集合，用 $E_x = \{\, gx : g \in G\}$ 來表示。E_x 是一個等價類，所有的等價類是 S 的分割。

【定義 2.1.5】設 $T = \{1,2,\cdots,n\}$是一個集合，$R = \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$是顏色集，所有從 T 映射到 R的函數的集合為 S，並且對任意 $f \in S$，定義：

$$f \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

【定理 2.1.6】 設 $T = \{1,2,\cdots,n\}$是一個集合，用 m 種顏色對 T 塗色，所有塗色的集合用 S表示，假設 T上的一個置換群為 G，若 $g \in G$，$f \in S$，並且規定 $g * f = f \circ g^{-1}$，那麼 G 作用在 S上。

證明： 設 $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}$ ，$g=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\end{pmatrix}$



圖(三)

首先說明 $g*f$，意思是將着色圖 f 的第 i 號顏色 $f(i)$，送到 $g(i)$號，

$i=1,2,\cdots,n$，於是得出一個新的着色圖 h，參看圖(三)，所以

$h=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}$ ，但 $g^{-1}=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$，故

$$g*f=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$=f\circ g^{-1}$

接下來證明本定理

(1) $g*f\in S$ 是很明顯的

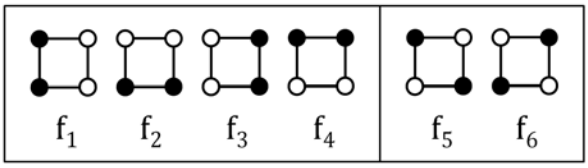
(2) 若 g_1、$g_2\in G$，$f\in S$，則 $(g_1\circ g_2)*f=f\circ(g_1\circ g_2)^{-1}$

$=f\circ\left(g_2^{-1}\circ g_1^{-1}\right)=\left(f\circ g_2^{-1}\right)\circ g_1^{-1}=g_1*\left(f\circ g_2^{-1}\right)=g_1*(g_2*f)$

(3)若單位元素 $e\in G$ ，$f\in S$，則 $e*f=f\circ e^{-1}=f\circ e=f$

綜合 (1)、(2)、(3) 就證明了定理 ■

【例題 2.1.7】用兩黑色、兩白色對圖(一)的四個頂點塗色，共得到六種不同的着色圖，用四階循環群 $C_4=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$ 作用在六個着色圖上，總共得到兩個等價類，如圖(四)，也就是兩種不同的塗色。



圖(四)

但我們要問：等價類的個數要如何求出 ? 計數的方法，是以伯恩賽定理作為工具。要證明它，需要下面的預備工作。

【**定義** 2.1.8】 設 $g \in G$，$x \in S$，若 $gx = x$，就說 x 是 g 的一個固定點，以 x 為固定點的所有群元素做成的集合，用 $G_x = \{g \in G: gx = x\}$ 來表示，一般稱 G_x 是一個穩定子集。

【**定理** 2.1.9】 穩定子集是一個群.

證明：若 a、b是 G_x 中任意兩元素，所以 a、$b \in G$，且 $ax = x$，$bx = x$ 由定理 2.1.4 證明中的(2)得知，$b^{-1}x = x$，且 $b^{-1} \in G$，於是有 $(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = ax = x$，表示 ab^{-1}仍在 G_x 中，因此 G_x是一個群 ■

今後，穩定子集都稱為穩定子群。

【**定義** 2.1.10】 g是一個群元素，g 在 S上的所有固定點做成的集合，記為 $S_g = \{x \in S: gx = x\}$，一般稱 S_g 是一個固定子集。

【**引理** 2.1.11】G是一個群，H是一個子群，對任意 a、$b \in G$，$a^{-1}b \in H$ 的充要條件是 $aH = bH$.

證明：參看[3] p.139~140

【**引理** 2.1.12】G_x是一個穩定子群，gG_x 是一個陪集，若 $y \in gG_x$，則$yx = gx$.

【**引理** 2.1.13】設群G作用在集合 S上，對任意元素 $x \in S$，有$|E_x| \cdot |G_x| = |G|$.

證明： 因為 G_x是G的子群，可以在 G 中找到 g_1、g_2、⋯、g_m，使得 G

$= g_1G_x \cup g_2G_x \cup \cdots \cup g_mG_x$，因為對每個 i，$|g_iG_x| = |G_x|$，且這些 g_iG_x 兩兩互斥，故 $|G| = |G_x| + |G_x| + \cdots + |G_x| = m|G_x|$，令 $g_ix = x_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 可得到 $E_x = \{gx: g \in G\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，其中任兩個元素均不相等，所以 $|G| = m|G_x| = |E_x| \cdot |G_x|$ ■

在例題 2.1.7 中，f_1 的等價類是$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$，共有四個元素；以 f_1為固定點的子群是 $\{e = (1)(2)(3)(4)\}$，只有一個元素，它們的乘積，正好是循環群 C_4的元素個數。另外，f_5 的等價類是 $\{f_5, f_6\}$，f_5的穩定子群是 $\{e = (1)(2)(3)(4), \sigma^2 = (1,3)(2,4)\}$，其元素個數的乘積亦為 4。

2.2 伯恩賽定理及其應用

【引理 2.2.1】 設群 G作用在集合 S上，x 是 S中任意元素，若 $y \in E_x$，則 $E_y = E_x$.

證明： 若 $y \in E_x$，一定存在 $g \in G$，使 $y = gx$，由定理 2.1.4 證明中的 (2) 得知，$g^{-1}y = x$。

(1) 取 $p \in E_x$，則存在 $g_1 \in G$，使 $p = g_1x = g_1(g^{-1}y) = (g_1g^{-1})y \in E_y$

(2) 取 $q \in E_y$，則存在 $g_2 \in G$，使 $q = g_2y = g_2(gx) = (g_2g)x \in E_x$

由 (1)、(2) 得出 $E_y = E_x$ ■

【定理 2.2.2】(伯恩賽定理) 設集合 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 中的物件，在群 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ 各元素的作用下，產生的等價類是 E_1、E_2、⋯、E_r，則等價類總數 r，等於每個 g_i所固定的物件數目之總和，除以群元素個數，即 $r = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|S_g|$.

證明：將群 G 的各元素寫在表(一)的左邊一行；將集合 S 的各元素寫在表(一)的上方一列。將表(一)中的第 i 列、第 j 行記為 $M(i,j)$，並且規定

$$M(i,j)=\begin{cases}1 & 若\, g_i(x_j)=x_j\\ 0 & 若\, g_i(x_j)\neq x_j\end{cases}$$

表(一)

	x_1 x_2 · · · x_j · · · x_s
g_1	·
g_2	·
·	·
·	·
·	·
g_i	· · · · $M(i,j)$
·	
·	
·	
g_k	

對每一列求和，再全部相加，得總和 $\sum_{g\in G}|S_g|$ ；對每一行求和，再全部相加，得總和 $\sum_{x\in S}|G_x|$，因為 $\sum_{g\in G}|S_g|=\sum_{x\in S}|G_x|$，由引理 2.1.12 得知

$\sum_{g\in G}|S_g|=\sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in E_i}|G_x|$

$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in E_i}\frac{|G|}{|E_x|}$

$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in E_i}\frac{|G|}{|E_i|}$

$=\sum_{i=1}^{r}|E_i|\cdot\frac{|G|}{|E_i|}$

$=\sum_{i=1}^{r}|G|=r|G|$，所以 $r=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|S_g|$ ■

【定理 2.2.3】 在定理 2.1.6 中，$f \in S$，$g \in G$，那麼，$f \in S_g$ 的充要條件，是 f 在 g 的每個循環節中，塗相同的顏色.

證明 ： $f \in S_g \iff f(i) = f\big(g(i)\big)$，$i = 1,2,\cdots,n$

$\iff f$ 在 g 的每個循環節上塗相同顏色 ■

接下來利用伯恩賽定理，重做例題 2.1.7，得到等價類的數目為

$$\frac{1}{|C_4|}\sum_{g\in C_4}\left|S_g\right| = \frac{1}{4}(\,|S_e| + |S_\sigma| + |S_{\sigma^2}| + |S_{\sigma^3}|\,)$$

$= \frac{1}{4}(6 + 0 + 2 + 0) = 2.$

【例題 2.2.4】在圖(一)的四個頂點塗黑、白兩色，共有幾種塗法?

用黑、白兩色塗正方形的四個頂點，得 16 個着色圖。以四階循環群 $C_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ 作用在 16 個圖上，也就是把每個 f_i 沿逆時鐘方向分別轉動 0°、90°、180°、270°，最後，得出不同的等價類。由伯恩賽定理得到等價類的個數為

$\frac{1}{4}(\ |S_e|\ +\ |S_\sigma|\ +\ |S_{\sigma^2}|\ +\ |S_{\sigma^3}|\,)$

$= \frac{1}{4}\ (16 + 2 + 4 + 2) = 6.$

在上面的計算式子裡，$e = (1)(2)(3)(4)$，$\sigma = (1,2,3,4)$，$\sigma^2 = (1,3)(2,4)$，$\sigma^3 = (1,4,3,2)$。

另一方面，由定理 2.2.3 得知，S_{σ^i} 中的着色圖，必須在 σ^i 的每個循環節中塗相同的顏色，所以等價類的數目的計算方法，就是把 C_4 的循環

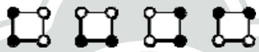
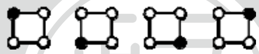
指標式中 x_i 代以 2，即可求出，由定理 1.3.5 得出 C_4 的循環指標式為

$$\frac{1}{4}\sum_{d|4}\varphi(d)\,x_d^{\frac{4}{d}}=\frac{1}{4}(x_1^4+x_2^2+2x_4)$$

故等價類的數目是 $\frac{1}{4}(2^4+2^2+2\times 2)=6$，和上面的答案相同。

用兩種顏色塗四個頂點，它其實是一個重複排列的問題，我們用窮舉法列出所有情形：

表(二)

(黑, 白)	排列數	塗色方法	等價類數目
(4, 0)	$\dfrac{4!}{4!\,0!}=1$		1
(3, 1)	$\dfrac{4!}{3!\,1!}=4$		1
(2, 2)	$\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$	 	2
(1, 3)	$\dfrac{4!}{1!\,3!}=4$		1
(0, 4)	$\dfrac{4!}{0!\,4!}=1$		1
	$\displaystyle\sum_{p+q=4}\frac{4!}{p!\,q!}=2^4$		共 6 種

綜觀上面三種方法的比較，窮舉法較為複雜， 若數字很大時，不可能一一列出，其次是伯恩賽定理，必須找到每個群元素所固定的着色圖的數目，但藉由定理 2.2.3 的概念，只要把群 G 的循環指標式中，每個 x_i代以顏色數目，即可求出，這是最有效率的算法，我們有下面的定理

【定理 2.2.5】 設 $T=\{1,2,\cdots,n\}$，用 m 種顏色對 T塗色，假設 G 是 T 上的置換群，則所有等價類的數目為 $P_G(m,m,\cdots,m)$，其中 $P_G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 G 的循環指標式.

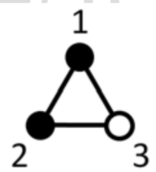
3 波利亞計數法

波利亞計數法，是非常有用的一種計數方法，它是伯恩賽定理的推廣，在本章中，會有詳細的討論。

3.1 權重的概念

在例題 2.2.4 中，用伯恩賽定理，可計算出黑、白兩色塗四個頂點的方法數，但若想進一步瞭解：在各種條件下的等價類情況，就要用波利亞計數法作為工具，為了清楚說明這個方法，首先介紹權重的概念。

【定義 3.1.1】用 m 種顏色 $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ 對集合 $T = \{1,2,\cdots,n\}$ 着色，每種顏色的權值記為 $w(r_i)$，若 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ 是任意一個着色圖，那麼 f 的着色權重 $w(f) = \prod_{i=1}^{n} w(f(i))$.



圖（五）

【例題 3.1.2】如圖（五），在正三角形的三個頂點塗色，1、2 號點塗黑色，3 號點塗白色，便得到一個着色圖 f，於是 $f(1) = f(2) =$ 黑色，$f(3) =$ 白色，假設黑、白兩色的權值，分別為 $w(\text{黑色}) = b$，$w(\text{白色}) = \omega$，那麼 f 的着色權重 $w(f) = \prod_{i=1}^{3} w(f(i)) = b^2\omega$.

【定理 3.1.3】 設 $T = \{1,2,\cdots,n\}$ 是一個集合，用 m 種顏色對 T 塗色，所有塗色的集合為 S ，G 是 T 上的置換群，若 f、$h \in S$，$g \in G$，且 $g * f = h$，則 f 和

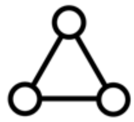
h 有相同的着色權重.

證明：因為 $h\big(g(i)\big) = f(i) \quad i = 1,2,\cdots,n$ ，所以

$$w(f) = \prod_{i=1}^{n} w(f(i))$$

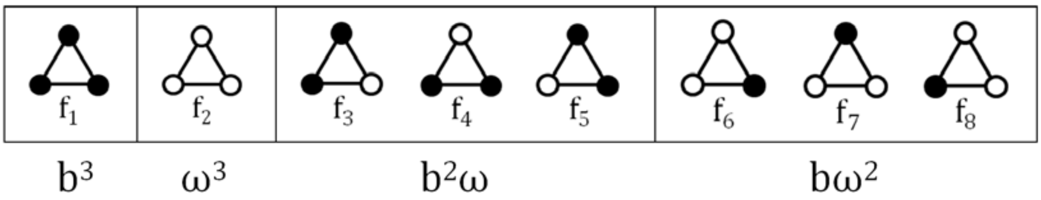
$$= \prod_{i=1}^{n} w\Big(h\big(g(i)\big)\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} w\big(h(i)\big) = w(h) \quad \blacksquare$$



圖(六)

若以黑、白兩色在圖(六)的三個頂點塗色，共得到八個着色圖，f_1，f_2，⋯，f_8。經過三階循環群 C_3 的作用，可分出四個等價類。由定理 3.1.3得知，每一個等價類中的着色圖，有相同的權值，此權值就代表該等價類的權值。



圖(七)

最後，將所有等價類的權值相加，得到的總和，稱為正三角形塗黑、白兩色的權重清單，用 I_v 表示，

$$I_v = b^3 + \omega^3 + b^2\omega + b\omega^2$$

I_v 通常也稱為等價類權重清單。有時，不同的等價類，可能會有相同的權值，例如，在例題 2.1.7 中，兩個等價類權值相等。

3.2　等價類權重清單的計算公式

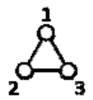
【定理 3.2.1】假設集合 S 在有限群G 的作用下，分成的全部等價類是 E_i $(i=1,2,\cdots,r)$ w是S 上的權值函數，如果等價類 E_i中的元素具有相同的權值，用 w_i 代表 E_i 的權值，則等價類權重清單為

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{f\in S_g} w(f)$$

其中，S_g是 g 的所有固定點的集合.

為了明確展示此公式的運算過程，我們再以正三角形三頂點塗黑、白兩色問題為例。請看下表

表(三)

	 f_1	 f_2	 f_3 f_4 f_5	 f_6 f_7 f_8	
e (1)(2)(3)	b^3	ω^3	$b^2\omega$　$b^2\omega$　$b^2\omega$	$b\omega^2$　$b\omega^2$　$b\omega^2$	$(b+\omega)^3$
σ (1, 2, 3)	b^3	ω^3			$b^3+\omega^3$
σ^2 (1, 3, 2)	b^3	ω^3			$b^3+\omega^3$

等價類權重清單為

$$\frac{1}{|G|}\left(\sum_{f\in S_e} w(f)+\sum_{f\in S_\sigma} w(f)+\sum_{f\in S_{\sigma^2}} w(f)\right)$$

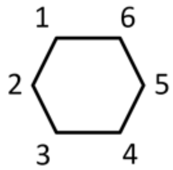
$$=\frac{1}{3}(\,(b+\omega)^3+b^3+\omega^3+b^3+\omega^3\,)$$

$$=b^3+\omega^3+b^2\omega+b\omega^2$$

和前面的結果相同。

3.3 波利亞計數方法的綜合說明

由定理 2.2.3 知道，當$f \in S_g$時，f在 g 的每個循環節中，都要塗一樣的顏色。

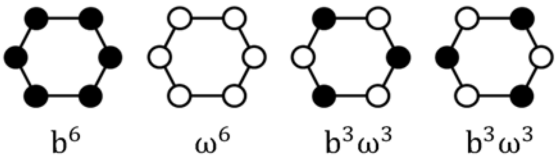


圖(八)

【**例題 3.3.1**】用黑白兩色在圖(八)的六個頂點塗色，且 $w(黑色)=b$，$w(白色)=\omega$，考慮 C_6中的元素$g=(1,3,5)(2,4,6)$，那麼，g 固定的着色圖 f 的權值總和必為

$$\sum_{f\in S_g} w(f)=(b^3+\omega^3)\,(b^3+\omega^3) \text{ 的展開式}$$

也就是下面四個着色圖的權值總和



圖(九)

循此原理，假設用 $\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$ 共m種顏色，對 $T=\{1,2,\cdots,n\}$ 進行塗色，由 T 產生的置換群為G，且每種顏色 r_i 的權值為 $w(r_i)$，計算群元素g所固定的着色圖 f 的權值總和，就把 g中長度為 1 的循環節 x_1代以 $\sum_{i=1}^{m} w(r_i)$；長度為 2 的循環節 x_2代以 $\sum_{i=1}^{m} w^2\,(r_i)$；$\cdots$；長度為$n$的循環節 x_n代以 $\sum_{i=1}^{m} w^n\,(r_i)$，然後對所

有群元素 g求和，再除以群元素個數$|G|$，即得到 m種顏色，在T上塗色的等價類權重清單。最後，將波利亞計數定理重新敘述如下

【定理 3.3.2】用m 種顏色$\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$，在$n$個頂點的集合$T$上塗色，得到着色圖的集合為 S，且 G為 T上 的一個置換群，若置換群 G 的循環指標式為$P_G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，則對應的等價類權重清單必為

$$P_G\left(\sum_{i=1}^{m} w(r_i), \sum_{i=1}^{m} w^2(r_i), \cdots, \sum_{i=1}^{m} w^n(r_i)\right) \quad .$$

4 環狀排列的計數

用波利亞計數法來計算環狀排列的數目，無論是相異物或不盡相異物的環狀排列，都可以展現此種方法的威力。在本章中，我們將用多個具體的實例，來顯示這一點。

4.1 環狀排列的公式

用 m 種顏色 $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$塗正 n 邊形的 n個頂點，共有 m^n種着色，假設 $w(r_i)$ $= r_i$，這些着色藉由n 階循環群 C_n 的作用，依照波利亞計數定理，求出等價類權重清單為

$$I_v = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,(r_1^d + r_2^d + \cdots + r_m^d)^{\frac{n}{d}}$$

將 I_v 式展開，可求得不同顏色的球作環狀排列的數目。

【定理 4.1.1】將不同顏色的球，作環狀排列，其中 k_1個球顏色為 r_1，k_2個球顏色為 r_2，⋯，k_m 個球顏色為 r_m，$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$，$c = gcd\,(k_1, k_2, \cdots, k_m)$，則此 n 個球的環狀排列數為

$$t_0 = \frac{1}{n}\sum_{d|c}\varphi(d)\frac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{k_1}{d}\right)!\left(\frac{k_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{k_m}{d}\right)!} \quad .$$

證明： 考慮 $I_v = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,(r_1^d + r_2^d + \cdots + r_m^d)^{\frac{n}{d}}$ 的展開式，其中必有 $r_1^{k_1}r_2^{k_2}\cdots r_m^{k_m}$ 項出現，它的係數由 n 的正因數 d 來決定，如果 d 是所有 k_1 、k_2 、⋯ 、k_m 的公因數，那麼 $\frac{k_1}{d}$ 、$\frac{k_2}{d}$ 、⋯ 、$\frac{k_m}{d}$ 均為正整數，且 $\frac{k_1}{d} + \frac{k_2}{d} + \cdots + \frac{k_m}{d} = \frac{n}{d}$ ，由多項式定理得知，$r_1^{k_1}r_2^{k_2}\cdots r_m^{k_m}$ 的係數必為

$\varphi(d)\frac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{k_1}{d}\right)!\left(\frac{k_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{k_m}{d}\right)!}$ ，最後，對所有符合條件的d 求總和，就得到環狀排列的總數 t_0 。此式簡潔而便於使用，是解決環狀排列問題的有力工具。

【推論 4.1.2】 m個不同顏色的球，作環狀排列，共有$(m-1)!$ 種排法 .

4.2 環狀排列的實例

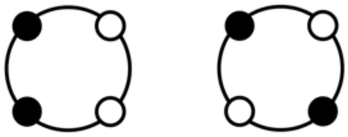
【例題 4.2.1】 用 2 個黑色、2 個白色，作環狀排列，共有幾種排法?

解： $k_1 = 2$，$k_2 = 2$，$n = 4$，$c = gc\,d(k_1, k_2) = 2$，$d = 1, 2$

環狀排列數 $t_0 = \frac{1}{4}\left(\varphi(1)\frac{\left(\frac{4}{1}\right)!}{\left(\frac{2}{1}\right)!\left(\frac{2}{1}\right)!} + \varphi(2)\frac{\left(\frac{4}{2}\right)!}{\left(\frac{2}{2}\right)!\left(\frac{2}{2}\right)!}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{4!}{2!2!} + \frac{2!}{1!1!}\right)$

$= 2$



圖（十）

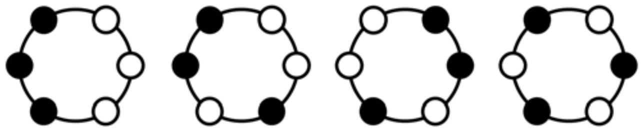
【例題 4.2.2】 用 3 個黑色、3 個白色，作環狀排列，共有幾種排法?

解： $k_1 = 3$，$k_2 = 3$，$n = 6$，$c = gc\,d(k_1, k_2) = 3$，$d = 1, 3$

環狀排列數 $t_0 = \frac{1}{6}\left(\varphi(1)\frac{\left(\frac{6}{1}\right)!}{\left(\frac{3}{1}\right)!\left(\frac{3}{1}\right)!} + \varphi(3)\frac{\left(\frac{6}{3}\right)!}{\left(\frac{3}{3}\right)!\left(\frac{3}{3}\right)!}\right)$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{6!}{3!3!} + 2 \cdot \frac{2!}{1!1!}\right)$

$= 4$



圖（十一）

【例題 4.2.3】用 4 個黑色、4 個白色及 8 個紅色，作環狀排列，共有幾種排法？

解： $k_1 = 4$，$k_2 = 4$，$k_3 = 8$，$n = 16$，$c = gcd(k_1, k_2, k_3) = 4$，$d = 1,2,4$

環狀排列數 $t_0 = \frac{1}{16}\left(\varphi(1)\frac{\left(\frac{16}{1}\right)!}{\left(\frac{4}{1}\right)!\left(\frac{4}{1}\right)!\left(\frac{8}{1}\right)!} + \varphi(2)\frac{\left(\frac{16}{2}\right)!}{\left(\frac{4}{2}\right)!\left(\frac{4}{2}\right)!\left(\frac{8}{2}\right)!} + \varphi(4)\frac{\left(\frac{16}{4}\right)!}{\left(\frac{4}{4}\right)!\left(\frac{4}{4}\right)!\left(\frac{8}{4}\right)!}\right)$

$= \frac{1}{16}(900900 + 420 + 24)$

$= 56334$

【例題 4.2.4】用 12 個黑色、12 個白色，作環狀排列，共有幾種排法？

解： $k_1 = 12$，$k_2 = 12$，$n = 24$，$c = gcd(k_1, k_2) = 12$，$d = 1,2,3,4,6,12$

$$\text{環狀排列數 } t_0 = \frac{1}{24}\left(\begin{array}{c}\varphi(1)\frac{\left(\frac{24}{1}\right)!}{\left(\frac{12}{1}\right)!\left(\frac{12}{1}\right)!} + \varphi(2)\frac{\left(\frac{24}{2}\right)!}{\left(\frac{12}{2}\right)!\left(\frac{12}{2}\right)!} + \varphi(3)\frac{\left(\frac{24}{3}\right)!}{\left(\frac{12}{3}\right)!\left(\frac{12}{3}\right)!} \\ +\varphi(4)\frac{\left(\frac{24}{4}\right)!}{\left(\frac{12}{4}\right)!\left(\frac{12}{4}\right)!} + \varphi(6)\frac{\left(\frac{24}{6}\right)!}{\left(\frac{12}{6}\right)!\left(\frac{12}{6}\right)!} + \varphi(12)\frac{\left(\frac{24}{12}\right)!}{\left(\frac{12}{12}\right)!\left(\frac{12}{12}\right)!}\end{array}\right)$$

$= \frac{1}{24}(2704156 + 924 + 140 + 40 + 12 + 8)$

$= 112720$

【例題 4.2.5】用 8 個黑色、8 個白色及 8 個紅色，作環狀排列，共有幾種排法？

解： $k_1 = 8$，$k_2 = 8$，$k_3 = 8$，$n = 24$，$c = gcd(k_1, k_2, k_3) = 8$，$d = 1,2,4,8$

環狀排列數 t_0

$$=\frac{1}{24}\left(\varphi(1)\frac{\left(\frac{24}{1}\right)!}{\left(\frac{8}{1}\right)!\left(\frac{8}{1}\right)!\left(\frac{8}{1}\right)!}+\varphi(2)\frac{\left(\frac{24}{2}\right)!}{\left(\frac{8}{2}\right)!\left(\frac{8}{2}\right)!\left(\frac{8}{2}\right)!}+\varphi(4)\frac{\left(\frac{24}{4}\right)!}{\left(\frac{8}{4}\right)!\left(\frac{8}{4}\right)!\left(\frac{8}{4}\right)!}+\varphi(8)\frac{\left(\frac{24}{8}\right)!}{\left(\frac{8}{8}\right)!\left(\frac{8}{8}\right)!\left(\frac{8}{8}\right)!}\right)$$

$$=\frac{1}{24}(9465511770+34650+180+24)$$

$$=394397776$$

【例題 4.2.6】 用 10 個黑色、10 個白色及 10 個紅色，作環狀排列，共有幾種排法？

解： $k_1=10$，$k_2=10$ ，$k_3=10$，$n=30$，$c=gcd(k_1,k_2,k_3)=10$，$d=1,2,5,10$

環狀排列數 $t_0=$

$$\frac{1}{30}\left(\varphi(1)\frac{\left(\frac{30}{1}\right)!}{\left(\frac{10}{1}\right)!\left(\frac{10}{1}\right)!\left(\frac{10}{1}\right)!}+\varphi(2)\frac{\left(\frac{30}{2}\right)!}{\left(\frac{10}{2}\right)!\left(\frac{10}{2}\right)!\left(\frac{10}{2}\right)!}+\varphi(5)\frac{\left(\frac{30}{5}\right)!}{\left(\frac{10}{5}\right)!\left(\frac{10}{5}\right)!\left(\frac{10}{5}\right)!}+\varphi(10)\frac{\left(\frac{30}{10}\right)!}{\left(\frac{10}{10}\right)!\left(\frac{10}{10}\right)!\left(\frac{10}{10}\right)!}\right)$$

$$=\frac{1}{30}(5550996791340+756756+360+24)$$

$$=185033251616$$

5 結論

本篇論文藉由波利亞計數方法，建立了環狀排列的計數公式。事實上，波利亞計數方法，還可以解決各類的計數問題。例如，珠狀排列問題及對稱體的着色問題等。

研究珠狀排列問題，需要瞭解二面體群的結構，本文中未做討論，但它的基本精神，和對稱體的着色問題及環狀排列問題都是一樣的，都要找出所有的對稱性，構成一個置換群，作用在全體着色集合上。

循環群為置換群的一個子群，本論文利用循環群得出環狀排列的公式。對於其它的對稱體，是否也能從置換群的其它子群，導出計數着色數的簡潔公式? 是值得思考的方向。

英中文名詞對照表

英文	中文	頁碼
action (of a group)	群的作用	7
Burnside theorem	伯恩賽定理	11
circular permutation	環狀排列	20
coset	陪集	10
cycle	循環節	1
cyclic group	循環群	1
cycle index polynomial	循環指標式	5
dihedral group	二面體群	23
equivalence class	等價類	8
equivalence relation	等價關係	7
Euler $\varphi-$ function	歐氏函數	3
fixed point	固定點	10
generator	生成元	2
homomorphism	同態	7
inventory	清單	16
modulo	模	3
multinomial theorem	多項式定理	20
necklace permutation	珠狀排列	23
one-to-one function	一對一函數	7
onto function	映成函數	7
order	階	1
pairwise disjoint	兩兩相離	5
partition	分割	8
p-cycle	p-循環節	1
permutation	置換	1

英文	中文	頁碼
permutation group	置換群	4
Pólya's enumeration method	波利亞計數法	15
reflexivity	自身性	7
stabilizer	穩定子集(群)	10
symmetry	對稱性	7
transitivity	遞移性	7
weight of color	顏色的權重	15
weight of coloring	著色圖的權重	15
weighted function	權值函數	17

參考文獻

[1] Alan Tucker：Applied Combinatorics (fifth edition), John Wiley & Sons, Inc (2007)

[2] Richard A.Brualdi：Introductory Combinatorics (fourth edition), Prentice-Hall (2004)

[3] Joseph A. Gallian：Contemporary Abstract Algebra (seventh edition), Brooks/Cole(2010)

[4] Jonathan L. Gross：Combinatorial Methods with Computer Applications, Chapman & Hall/CRC (2008)

[5] Richard A. Mollin：Fundamental Number theory with Applications (second edition), Chapman & Hall/CRC (2008)

[6] Alan Slomson：An Introduction to Combinatorics (first edition), Chapman & Hall(1991)

[7] Peter J.Cameron：Combinatorics：topics, techniques, algorithms ,Cambridge University Press (1994)

[8] J.H.van Lint & R.M.Wilson：A Course in Combinatorics(second edition), Cambridge University Press (2001)

[9] 王世勛：不盡相異物的環狀排列公式， 政大應數所碩士論文 (2010)

[10] 洪鵬凱：不盡相異物排列—著色與環狀排列問題，全國高中數學教學研討會論文集 (2007)

[11] 潘承洞 潘承彪：初等數論，北京大學出版社 (1991)

[12] 馮舜璽 羅平 裴偉東譯： 組合數學，機械工業出版社 (2005)

[13] 蕭文強：波利亞計數定理，大連理工大學出版社 (2011)

[14] 莫宗堅：代數學(上)，聯經出版公司 (1987)

[15] 魏萬迪：初等組合數學導論，四川大學出版社 (1984)

[16] 馮速：應用組合數學，人民郵電出版社 (2009)