

國立政治大學統計學系
碩士學位論文

指導教授：劉惠美博士

探討合成型抵押擔保債券憑證
之評價

Pricing the Synthetic CDOs

研究生：林聖航 撰

中華民國一百零一年六月

謝辭

很快地，研究所的兩年生涯即將結束。經由這兩年統研所的課程磨練，學習了更深入的統計理論以及相關領域的實務應用。在此，將對在研究所過程中，對我相當重要的人致謝。

首先，最感謝的是我的指導教授劉惠美老師，很感謝老師在這兩年來的耐心教導，讓我慢慢具備了對於論文的寫作思維，能很順利地照進度完成論文。同時，也讓我能夠充實有關金融信用衍生性商品領域的相關知識。更重要的是，除了論文指導外，老師平常所分享對於在未來在職場上應具備的能力及態度，使我在生涯規劃上獲益良多。此外，感謝洪明欽教授與劉家頤教授在我論文口試時所給予的寶貴意見，幫助我的論文更趨完善。

感謝博士班的宛汝學姊以及目前在經濟部統計處五科的邱熾燁學姊，不論是在實證資料或是論文研究問題等等，因為有你們的熱心幫忙，本篇論文才能夠如此順利完成且完整。另外，恭喜宛汝學姊順利考上關務特考，在此預祝兩位學姊未來在公職生涯上能夠相當順利。

感謝兩年的研究所好夥伴，能夠與你們在課業上互相精進，共同完成專題報告，一起聚餐與遊玩，真的是非常開心。很高興能認識你們這群好夥伴，祝大家未來不論是學業或工作上都能夠順利。

最後，謹以此文獻給我摯愛的家人。

摘要

根據以往探討評價合成型抵押擔保債券之文獻研究，最廣為使用的方法應用大樣本一致性資產組合(large homogeneous portfolio portfolio ; LHP)假設之單因子常態關聯結構模型來評價，但會造成合成型抵押擔保債券憑證與市場報價間的差異過大，且會造成相關性微笑曲線現象。由文獻顯示，單因子關聯結構模型若能加入厚尾度或偏斜性能夠改善以上問題，且對於分券評價時也會有較好的效果，像是 Kalemanova et al. (2007) 提出應用 LHP 假設之單因子 Normal Inverse Gaussian(NIG)關聯結構模型以及邱熾燁(2007)提出 NIG 及 Closed Skew Normal(CSN)複合分配之單因子關聯結構模型(MIX 模型)在實證分析中得到極佳的評價結果。自 2008 年起，合成型抵押擔保債券商品結構開始出現變化，而以往評價合成型抵押擔保債券價格時，商品結構皆為同一種型式。本文將利用常態分配、NIG 分配、CSN 分配以及 NIG 與 CSN 複合分配作為不同的單因子關聯結構模型，藉由絕對誤差極小化方法，針對不同商品結構的合成型抵押擔保債券評價，並進行模型比較分析。由最後實證分析結果顯示，單因子 NIG(2)關聯結構模型優於其他模型，也證明 NIG 分配的第二個參數 β 能夠帶來改善的評價效果，此項證明與過去文獻結論有所不同，但 MIX 模型則為唯一一個符合 LHP 假設的模型。

關鍵字：合成型抵押擔保債券憑證、單因子關聯結構模型、NIG 分配、CSN 分配

Abstract

Based on the literature of discussing the approach for pricing synthetic CDOs, the most widely used methods used application of Large Homogeneous Portfolio (LHP) assumption of the one factor Gaussian copula model, however, it fails to fit the prices of synthetic CDOs tranches and leads to the implied correlation smile. The literature shows that one factor copula model adding the heavy-tail or skew can improve the above problem, and also has a good effect for pricing tranches such as Kalemanova et al (2007) proposed the application of LHP assumption of one factor NIG copula model and Qiu Yan Ye (2007) proposed the application of LHP assumption of one factor NIG and CSN copula model. This article found that the structure of synthetic CDOs began to change since 2008. The past of pricing synthetic CDOs, the structure of synthetic CDOs are the same type, so this article will use different one factor copula model for pricing different structure of synthetic CDOs by using the absolute error minimization. This article will observe whether the above model can be applied in the new synthetic CDOs and implement of different type model for comparative analysis. The last empirical analysis shows that one factor NIG (2) copula model is superior to other models, more meeting the actual market demand, also proving the second parameter β of the NIG distribution able to bring about improvements in pricing results. This proving is different for the past literature conclusions. However, the MIX model is the only one in line with the LHP assumptions.

Keyword : synthetic CDOs 、 one factor copula model 、 NIG distribution 、 CSN distribution

目錄

謝辭.....	I
摘要.....	II
Abstract.....	III
表目錄.....	VI
圖目錄.....	VII
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的.....	2
第三節 抵押擔保債券(Collateralized Debt Obligation ,CDO).....	3
第四節 合成型抵押擔保債券(Synthetic CDOs).....	4
第五節 信用違約交換(Credit Default Swaps ,CDS).....	5
第六節 信用違約指數 (Credit Default Indexes).....	6
第七節 本文架構.....	9
第二章 文獻回顧.....	10
第一節 關聯結構模型(Copula Model).....	10
第二節 單因子關聯結構模型(One Factor Copula Model).....	11
第三節 Normal Inverse Gaussian Distribution(NIG).....	17
第四節 Closed Skew Normal Distribution(CSN).....	18
第三章 合成型 CDO 之評價方法與單因子關聯結構模型.....	19
第一節 合成型抵押擔保債權憑證之評價方法.....	19
第二節 應用 LHP 假設之單因子高斯關聯結構模型.....	23
第三節 NIG 分配性質及定義.....	28
第四節 應用 LHP 假設之單因子 NIG 關聯結構模型.....	31
第四章 單因子 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型.....	35

第一節	CSN 分配之性質與定理.....	35
第二節	應用 LHP 假設之單因子 CSN 關聯結構模型	40
第三節	單因子 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型.....	46
第五章	實證分析：評價 DJ iTraxx	51
第一節	比較各模型在不同時期 DJ iTraxx 之分券評價	53
第二節	觀察各模型在不同時期 DJ iTraxx 之隱含相關性	58
第六章	結論與建議.....	60
參考文獻	64
附錄一	67
附錄二	71
附錄三	73
附錄四	77



表目錄

表 1.1 目前全世界主要的信用違約指數名稱 (資料來源 www.markit.com)	8
表 1.2 信用違約指數及分券市場報價(2004.8.4)，資料來源 Dezhong(2006)	8
表 5.1 不同時期的 DJ iTraxx Europe 市場報價.....	52
表 5.2 2006 年 4 月 12 日之市場報價及不同模型配適結果.....	55
表 5.3 邱熾燁(2007)評價結果	55
表 5.4 Kalemanove et al(2007)評價結果.....	56
表 5.5 2009 年 3 月 31 日之市場報價及不同模型配適結果.....	57
表 5.6 2010 年 3 月 31 日之市場報價及不同模型配適結果.....	57
表 5.7 2011 年 9 月 11 日之市場報價及不同模型配適結果.....	58
表 1 2006 年 4 月 12 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析	67
表 2 2009 年 3 月 31 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析	68
表 3 2010 年 3 月 31 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析	69
表 4 2011 年 9 月 11 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析	70
表 5 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之各分券隱含相關值.....	73
表 6 不同模型在 2009 年 3 月 31 日之各分券隱含相關值.....	74
表 7 不同模型在 2010 年 3 月 31 日之各分券隱含相關值.....	75
表 8 不同模型在 2011 年 9 月 11 日之各分券隱含相關值.....	76
表 9 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含基底相關值.....	77

表 10	不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含基底相關值.....	78
表 11	不同模型在 2010 年 3 月 31 日之隱含基底相關值.....	79
表 12	不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含基底相關值.....	80

圖目錄

圖 1.1	抵押擔保債券架構流程.....	4
圖 1.2	合成型抵押擔保債券架構流程.....	4
圖 1.3	信用違約交換架構流程.....	5
圖 1.4	Itraxx 指數之各分券獲利方式演變過程.....	9
圖 3.1	α 參數(左圖)與 β 參數(右圖)對 NIG 分配之密度函數影響.....	29
圖 3.2	μ 參數(左圖)與 δ 參數(右圖)對 NIG 分配之密度函數影響.....	29
圖 4.1	四種不同參數組合之總資產報酬 $A_t(t)$ 密度函數圖，其中 $\rho=0.3$, $\sigma_1^2=2.5$	43
圖 4.2	各參數對於 MIX 分配之密度函數影響.....	47
圖 1	不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含相關曲線.....	73
圖 2	不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含相關曲線.....	74
圖 3	不同模型在 2010 年 3 月 31 日之隱含相關曲線.....	75
圖 4	不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含相關曲線.....	76
圖 5	不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含基底相關曲線.....	76
圖 6	不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含基底相關曲線.....	76
圖 7	不同模型在 2010 年 3 月 31 日之隱含基底相關曲線.....	76
圖 8	不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含基底相關曲線.....	80

第一章 緒論

本章節主要分為兩部分：第一部分說明本篇論文的主旨－研究背景與動機以及研究目的；第二部分介紹主要評價商品－合成型抵押擔保債券憑證以及信用違約指數

第一節 研究背景與動機

自 1992 年開始發行信用衍生性商品(credit derivatives)後，其市場交易量急遽成長，遂成為金融市場上很重要的商品。信用衍生性商品發展之所以如此迅速，原因在於金融機構為了避免交易對手的信用違約風險，藉由此商品能將此信用風險移轉到金融市場，為一種類似保險性質之信用衍生性商品。到了現今，隨著金融市場的演變，金融機構所面臨的信用風險已從單一標的資產轉變為多標的資產的組合信用風險。對金融機構而言，如何控管組合信用風險儼然成為一項重要的議題，在這樣的時空背景下，給予了組合信用衍生性商品發展契機。而以信用衍生性商品為基礎所創新而成的如一籃子信用違約交換(Basket Credit Default Swaps)、抵押擔保債券(Collateralized Debt Obligation, CDOs)以及合成型抵押擔保債券憑證(Synthetic Collateralized Debt Obligation, Synthetic CDOs)即為一系列能夠管理組合信用風險的商品。其中抵押擔保債券商品還具有固定收益的功能，成為市場上另一個新興的投資工具。另一方面，為了增加信用衍生性商品的流動性及交易透明度，金融市場更進一步定製了標準化契約之信用違約交換指數(Credit Default Swaps Index)，此指數提供了金融機構能以較便宜的交易成本達到一籃子信用違約交換避險效果。目前市場上主要有兩大類信用違約交換指數：itraxx 指數及 CDX 指數。

以抵押擔保債券為主的信用衍生性商品發行量在 2000-2006 年間迅速成長。在這段期間，由於抵押擔保債券所帶來的龐大效益，市場參與者積極鼓勵貸放機構嘗試不同種類貸款類型。貸放機構也對於借款者的貸款限制逐漸放寬，本身屬於信用品質較差的借款者也能夠獲得大量貸款，即為所謂次級貸款。這群次級貸款借款者使得信用市場違約率大幅度提高，也成為了 2007 年美國「次級房貸」(subprime-mortgage)風暴的導火線，此次事件也連帶影響到整個國際金融情勢，像是歐洲的「歐債危機」。由於這幾件國際重大經濟事件，對於全球的抵押擔保債券價格及發行量帶來了相當大的衝擊，影響了抵押擔保債券之商品結構，使其逐漸產生變化。本文發現自 2008 年起，商品結構開始出現變化，而以往評價合成型抵押擔保債券價格時，商品結構皆為同一種型式，因此本文將對 2008 年之後的不同商品型式之合成型抵押擔保債券價格進行評價，以了解近年來商品發展趨勢與未來改善之道。

第二節 研究目的

在過往探討評價合成型抵押擔保債券之研究方法中，由理論與實務上顯示進行此商品評價時必須要考慮各資產之間的違約相關性(default correlation)因素，而目前最廣為使用的方法為單因子關聯結構模型(One Factor Copula Model)。本文將以此模型作為主要評價之方法，此模型最早是由 O'Kane and Schloegl (2001)所提出的應用 LHP 假設之單因子常態關聯結構模型，其在執行各分券評價時，僅有在權益分券(equity tranche)得到好的配適而已，此外，還會造成相關性微笑曲線(correlation smile)等問題。由文獻顯示，單因子關聯結構模型若能加入厚尾度(tail-fatness)或偏斜性(skewness)，及能夠對於分券評價產生之問題獲得改善，而得到較好的評價結果。Kalemanova et al. (2007) 提出應用 LHP 假設之單因子 NIG 關聯結構模型，其評價結果遠優於常態分配，但其高估了中間順位層級以上的分券。邱熾燁 (2007)使用 CSN 分配(Closed skew normal distribution)取代 NIG

分配作為抵押擔保債權憑證的評價，但是與單因子常態關聯結構模型相同，單因子 CSN 關聯結構模型仍然無法估計的很準確，僅有在最高層級分券(senior tranche)的評價上有明顯的改善。邱熾燁(2007)嘗試使用 NIG 及 CSN 複合分配之單因子關聯結構模型評價抵押擔保債權憑證，而在實證分析中此模型得到極佳的評價結果。以上各學者所使用的單因子模型皆是對 2008 年以前單一型式的抵押擔保債券做評價。本文研究目的在於將使用不同的單因子關聯結構模型，針對不同商品結構的合成型抵押擔保債券評價，觀察以上的模型是否能應用在新型的合成型抵押擔保債券，並對各種商品型式進行模型比較分析。

第三節 抵押擔保債券(Collateralized Debt Obligation ,CDO)

抵押擔保債券屬於資產擔保證券¹(asset-backed securities)的衍生性商品。其證券化過程為有一個創始機構(如金融機構)持有一大筆債權的資產群組，創始機構將其資產群組轉售給特殊目的機構(SPV)，而特殊目的機構將其切割和重新包裝後，以私募或公開發行方式賣出固定收益證券或受益憑證，整個架構流程如圖 1.1。CDO 較為特別的部分是將受益證券分層級(Tranche)，以吸引不同風險偏好的投資人，其架構為債務人每月定期償還本金和利息給服務機構，服務機構扣除服務費用後移交給特殊目的機構，特殊目的機構扣除信託費用後交給投資人，首先由優先順位層級(Senior Tranche)投資人先收到利息，等到優先順位投資人收到足額利息後，中間順位層級(Mezzanine Tranche)投資人才開始收到利息，等到中間順位投資人收到足額利息後，次順位(Junior Tranche)投資人才開始收到利息，本金的償還也以此方式進行。付清三個層級後，剩餘現金才支付給權益層級(Equity Tranche)投資人。當發生損失時，由權益層級投資人先承受損失，一但達到其本金餘額後，由權益層級投資人先承擔，而後由次順位投資人承擔，以此類推。因此權益層級投資人承擔的風險最大，報酬率最高，相對而言優先順位投資

¹資產擔保證券是指以資產，如貸款、應收帳款作為擔保基礎所發行的債券或票據。

人風險最小，報酬率也最小(陳松男 民 98)。

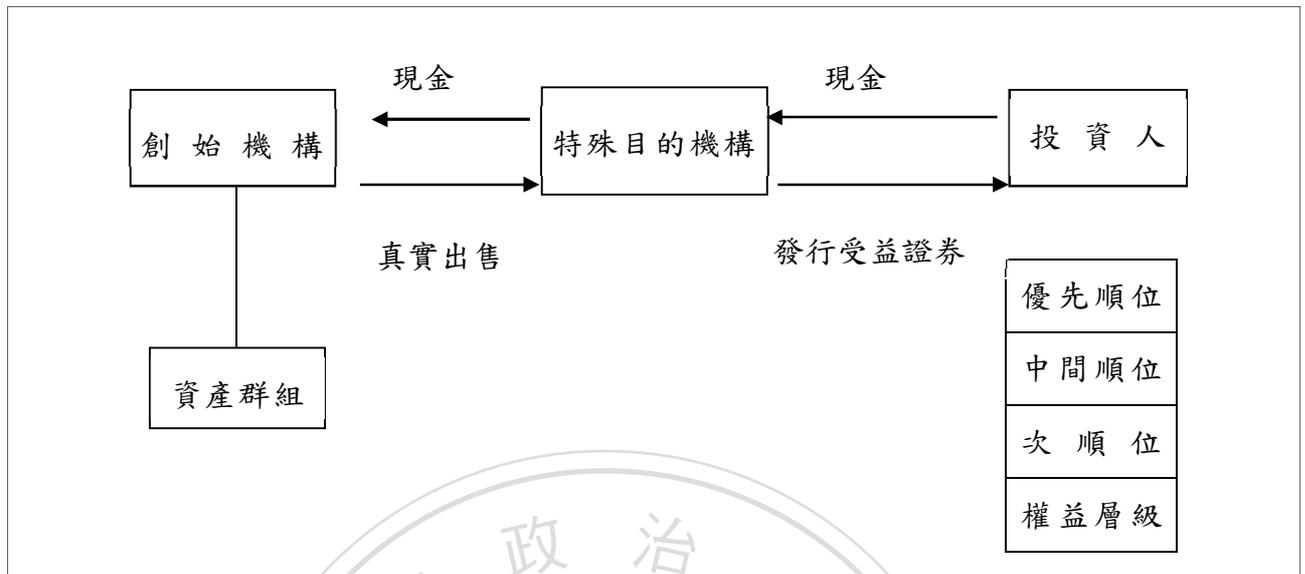


圖 1.1 抵押擔保債券架構流程

第四節 合成型抵押擔保債券(Synthetic CDOs)

合成型抵押擔保債券(合成型 CDO)之商品結構大部分與抵押擔保債券相同，最主要差別在於創始機構與特殊目的機構簽訂信用違約交換合約，將債權群組不確定性的違約風險轉嫁給特殊目的機構，同時創始機構約定定期給予權利金給特殊目的機構作為承擔風險的代價。整個過程資產群組並沒有被真實移轉，仍然保留在創始機構中。而特殊目的機構則會在期初會先收到由投資人所投入的大筆金額，且並不需要付任何費用給予創始機構。特殊目的機構就能藉由此筆金額去購買穩定的收益商品(像是政府公債等等)，以便準備發生違約事件有能力支付現金給創始機構。而特殊目的機構可將從創始機構定期收到的費用移轉給投資人作為定期投資收益，其中合成型 CDO 架構流程如圖 1.2。

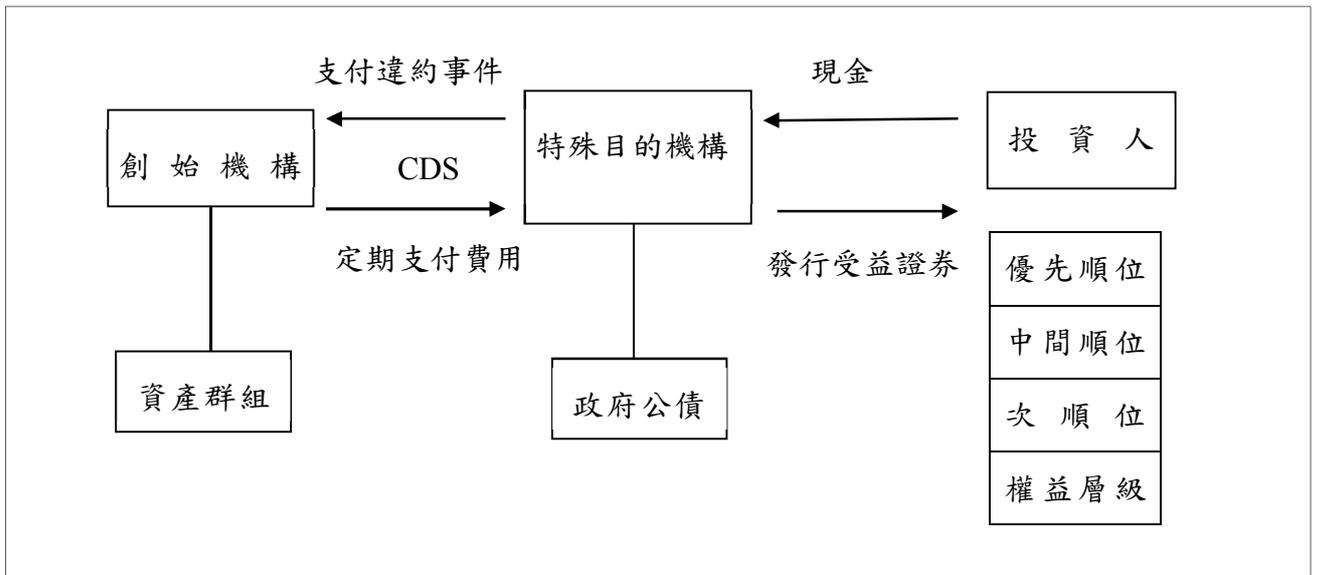


圖 1.2 合成型抵押擔保債券架構流程

第五節 信用違約交換(Credit Default Swaps ,CDS)

信用違約交換是早期的信用衍生性商品也是最簡單的產品，主要目的是持有資產的一方為了預防持有標的資產違約，而本身也不願承受或無能力承受所簽訂的一種合約，CDS 的內容是保護買方(protection buyer)為了規避信用風險與保護賣方(protection seller)簽訂合約，在約定的期間內將資產的信用風險移轉給保護賣方並定期支付權利金 (spread) 給予對方承擔資產信用風險的代價，當標的資產實際發生違約事件時，保護賣方必須給付一筆金額給保護買方當作資產違約的損失，所以實際上承擔違約風險的為保護賣方，保護買方則透過信用風險的移轉使投資的風險降低，其中信用違約交換架構如圖 1.3。

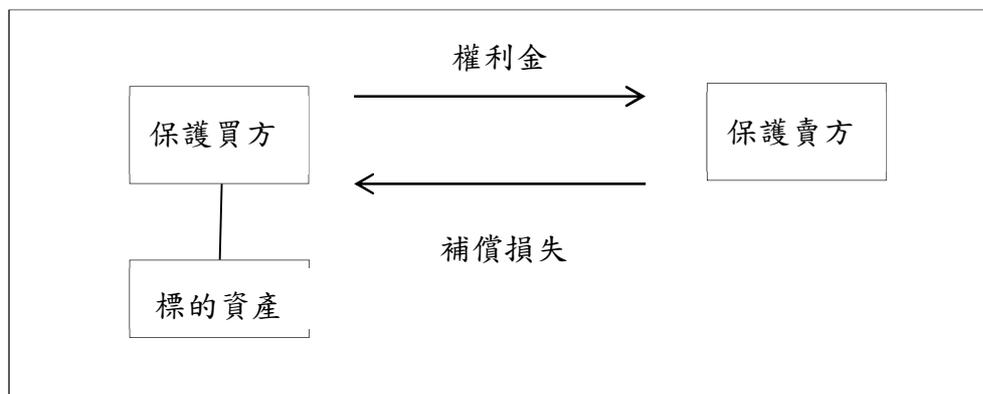


圖 1.3 信用違約交換架構流程

若保護買方希望移轉的信用風險為多個標的資產時，此類型的信用違約交換合約稱為一籃子信用違約交換。一般最常見的一籃子信用違約為第 N 個違約交換，意思為雙方約定當所參考的資產群組發生違約事件共有 N 個或以上時，則保護賣方必須立刻付資產違約損失給予保護買方。若違約事件為達到 N 個標準時，保護買方必須要定期的支付費用給予保護賣方。

第六節 信用違約指數 (Credit Default Indexes)

信用違約指數是另一種用來避險信用風險的組合信用衍生性商品。此指數為一個完全標準化的定製商品，其增加了信用商品的流動性以及減少買賣價差。它運作的方式為選擇一般市場上流動性較高的公司的信用違約交換作為一籃子資產所合成的綜合信用指數，將這群資產以平均加權(Equal Weight)的方式計算其權利金。因此，此指數如同購買許多單一名稱的信用違約交換合約，且能減少交易成本。但其實際運作方式與信用違約交換有些許不同，若發生違約事件時，保護買方所需支付的權利金立即停止，對於信用違約指數而言，保護買方則會在合約期間內(例：3、5、7 或 10 年)持續支付權利金，此金額會隨著剩餘的本金金額成比例，主要原因在於契約過程中發生數個標的的公司違約情況，使得需要被保護的資產群組減少，也降低了本金金額。信用違約指數的權利金規定每三個月付費，而付費日期定在每一年度的三月、六月、九月以及十二月的二十號。信用違約指數的成員會每六個月定期依標準調整指數成員，若指數之標的資產群組無發生違約事件，則指數的成員維持不變，已發生違約或信用等級下降的標的資產則為從指數成員移出。

目前市場上有兩個主要的信用違約指數：CDX 指數和 iTraxx 指數。CDX 指數涵蓋地區包含北美和新興市場的企業，由 CDS 指數公司(CDS Index Company)所管理以及由 Markit 集團有限公司(Markit Group Limited)所發行；iTraxx 指數則涵蓋了其他世界地區，其由國際指數公司(International Index Company, IIC)所管

理，與 CDX 指數相同是由 Markit 集團有限公司所發行。而信用違約指數依據三大信用評等公司(S&P、Moody's 以及 Fitch rating) 之評等結果分別在不同的地區編為投資級(Investment Grade)、高風險 (High Vol)、以及高收益 (High Yield) 等指數名稱，其中各指數名稱在表 1.1 呈現。

隨著信用違約指數的發展，合成型CDO商品概念也被導入於信用違約指數中，也就是將指數切割分成不同層級的標準化分券型式以吸引不同風險偏好的投資者。各分券提供了分層標的資產組合的保護如同之前所介紹過的CDO將受益證券分層級的方式。而剛所提到的兩大信用違約指數—CDX指數和iTraxx指數，被分成五個分券：權益分券、次順位分券、中間層級分券、優先層級分券、最高層級分券。CDX指數之標準化分券架構為0-3%、3-7%、7-10%、10-15%以及15-30%，iTraxx指數之標準化分券架構為0~3%、3~6%、6~9%、9~12%及12~22%。投資人在各分券能獲得的投資報酬主要分成兩大類：第一類為在訂立契約期初時投資人會先收到一筆等同於市場報價的預付費用(upfront payment)，並在每一期會拿到信用價差(running spread)；第二類的投資人則只有在定期會得到信用價差。在2008年以前，權益分券的投資人屬於第一類報酬方式，其餘分券投資人皆屬於第二類報酬方式，如表1.2。然而，自2007年美國發生「次級房貸」以來，一連串的金融危機事件連帶影響到了較高層級分券之違約率增加，這也使得以信用違約指數為標的之合成型CDO商品內容上產生了許多的變化。最主要的變化在於次順位分券以上給予投資人的報酬方式漸漸趨向權益分券方式(第一類)，到了現今，各分券的投資人獲利方式皆為第一類，而不同分券會有不同的信用價差價格及期初市場報價金額，圖1.4為Itraxx指數之各分券演變過程。而本文將評價以Itraxx指數為標的之不同商品內容之合成型CDO分券。

表 1.1 目前全世界主要的信用違約指數名稱 (資料來源 www.markit.com)

指數名稱	分佈地區	信用評等	標的資產數目
CDX.NA.IG	北美	投資級	125
CDX.NA.IG.HVOL	北美	高風險	30
CDX.NA.HY	北美	高收益	100
CDX.EM	新興市場		14
CDX.EM Diversified	新興市場		40
iTraxx Europe	歐洲	投資級	125
iTraxx Europe HiVol	歐洲	高風險	30
iTraxx Europe Crossover	歐洲	高收益	50
iTraxx Asia	亞洲	投資級	50
iTraxx Australia	澳洲	投資級	25

表 1.2 信用違約指數及分券市場報價(2004.8.4)，資料來源 Dezhong(2006)

iTraxx Europe (5 年)		CDX.NA.IG (5 年)	
信用違約指數	42 bp	信用違約指數	63.25 bp
分券	市場報價	分券	市場報價
0%-3%	27.6 %	0%-3%	48.1 %
3%-6%	168 bp ²	3%-7%	347 bp
6%-9%	70 bp	7%-10%	135.5 bp
9%-12%	43 bp	10%-15%	47.5 bp
12%-22%	20 bp	15%-30%	14.5 bp

² bp(basis point)為信用價差的計價單位，其中 1bp=0.01%

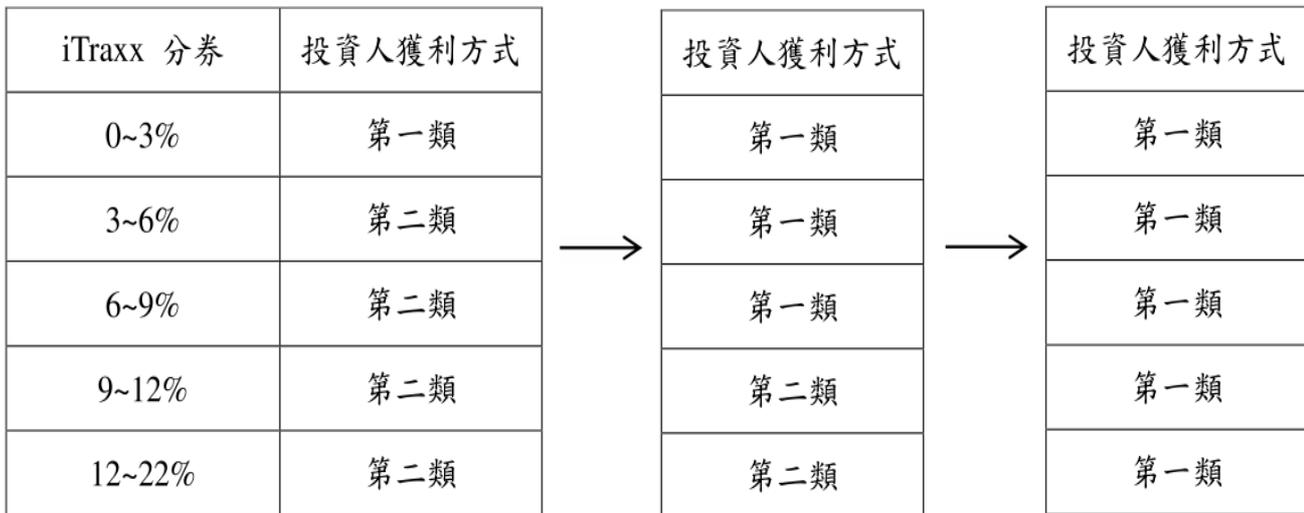


圖 1.4 Itraxx 指數之各分券獲利方式演變過程

第七節 本文架構

本文架構如下：第二章回顧單因子關聯結構模型相關文獻；第三章介紹合成型抵押擔保債券憑證之評價方法及應用 LHP 假設之單因子關聯結構模型，並且介紹 Normal Inverse Gaussian 分配的性質及單因子 NIG 關聯結構模型；第四章呈現新的單因子延伸模型：單因子 Closed Skew Normal 關聯結構模型及 NIG 與 CSN 混合分配關聯結構模型；第五章評價不同年度的 DJ iTraxx Europe 分券，以四個不同單因子模型進行模型比較分析，模型包含 Gaussian、NIG、CSN 及 MIX。第六章為結論與建議。

第二章 文獻回顧

在前面有提到，在評價合成型抵押擔保債券憑證時，必須要考慮各資產之間的違約相關性因素。最早能捕捉違約相關性的模型為 Li (2000) 所提出的關聯結構模型(copula model)，而此模型後來更進一步演變成為單因子關聯結構模型(One Factor Copula Model)，此模型也將作為後面實證分析中的主要評價模型。故本章節將一一回顧詳述單因子關聯結構模型相關之文獻，從中了解此模型的來龍去脈以及各文獻對於模型的觀點及應用方法。

第一節 關聯結構模型(Copula Model)

Li (2000) 首先介紹到一個隨機變數”time-until-default”以來表示每個金融標的資產從合約開始至發生違約事件的總存活時間，即各資產違約時點。並且定義不同的金融標的資產之間會存在著違約相關性(default correlation)。Li (2000) 使用關聯結構函數(copula function)將各個隨機變數的邊際機率分配函數做連結，以形成聯合分配函數，也就是資產組合違約時點的聯合分配函數。同時，Li(2000)透過高斯關聯結構模型(Gaussian copula)及 Sklar’s 定理獲得資產組合違約時點的聯合分配函數如下；

$$\begin{aligned} F(t_1, \dots, t_n) &= C(F(t_1), \dots, F(t_n)) \\ &= \Phi_n(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(t_n)); \Sigma) \end{aligned}$$

$F_i(t_i)$ 為第 i 個標的資產的邊際違約機率， $\Phi_n(\cdot; \Sigma)$ 為一個 n 維度的多變量常態分配， Σ 為其相關係數矩陣。此模型將資產報酬設定為 $\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \Phi^{-1}(F_2(t_2)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(t_n))$ ，如此一來，就能以標的資產報酬的相關性來取代違約時點的相關性。因此就能以蒙地卡羅模擬方法來模擬各資產的違約時點。然而，此方法必須要透過大量的模擬來得到各個資產的違約時點，在大樣本的標的資產情形下會提高模擬運算過程中的複雜性及困難度；此外，資產間的相關係數矩陣必須要

為正定矩陣(positive definite matrix)的限制。

第二節 單因子關聯結構模型(One Factor Copula Model)

儘管關聯結構模型擁有能夠以標的資產的相關性來取代違約時點的相關性的優點，但其缺點就如同剛才所提到的，當資產組合數目過多的時候，會使得在蒙地卡羅模擬的過程複雜度增加以及計算過程變得較為費時。而單因子結構模型就在這樣的環境下興起，其概念為數個不同的信用標的資產給定相同的因子(市場因子)條件下，各資產報酬彼此會互相獨立。此方法除了能夠簡單及快速地計算在不同時點下的違約損失分配，並且能夠避免如蒙地卡羅模擬的計算費時性。

單因子結構模型概念最早是由 O'Kane and Schloegl (2001)所提出，本文主要介紹對於持有不同數量的標的資產要如何建置信用模型(credit model)，而此模型須在無套利(arbitrage-free)環境下來保證評價的一致性以及擁有能夠洞察些許違約過程(default process)的價值。對於單一標的資產信用模型，其可以分為結構式模型(Structural model)與縮減式模型(Reduced-form Model)。結構式模型主要應用 Merton(1974)模型原理，是以公司本身的資產價值來衡量信用風險，當公司資產價值低於某一個門檻值時將視為公司違約，故結構式模型又可稱為公司價值模型(Firm value model)。但是，此模型的假設過於簡化，違約事件只會發生在到期日當天而已，不考慮除了公司價值以外的可能違約事件。而 Black and Cox(1976)則進一步的延伸 Merton 模型中的違約條件，其將公司在到期日前任意時點到達某個資產邊界(boundary)時視為公司違約，故又可以稱為通過時點模型(Passage time model)。結構式模型優點在於風險事件定義上與一般財務上對於公司違約的定義極為類似，但是想要確實地掌握公司整體的資本結構資訊卻是很不容易的事情，若是在無法正確估計出公司的資產價值及負債總額，在計算信用價差時極有可能出現不合理的價格。相較於結構式模型，縮減式模型不嘗試去解釋違約事件

的發生原因(ex:公司價值)，而是盡可能地去描述違約時點的統計性質。在縮減式模型裡，違約被視為一個外生事件(exogenous event)，利用 poisson 過程來建置違約過程，其中隨機違約行為會被違約率函數 $\lambda(t)$ 所決定(如同 Li (2000) 所介紹的)，並且得到資產的存活時間為指數分配。此模型評價方法與結構式模型是相同的，但此模型所考慮的違約機率、回復率、市場利率等皆是由外生所決定，與必須取得確實的公司資產價值和負債總額的才能做風險評估的結構型模型是相當不同的。而對於多資產組合的信用風險模型建立，O’Kane and Schloegl (2001) 則首次提出單因子關聯結構模型，此模型假定標的資產組合具有共通的市場因子 $M(t)$ ，則各資產從契約開始到第 t 時間的總資產報酬 $A_i(t)$ 為：

$$A_i(t) = \sqrt{\rho_i} M(t) + \sqrt{1 - \rho_i} X_i(t), \quad i = 1, \dots, N$$

其中 $M(t)$ 為市場因子， $X_i(t)$ 為資產本身因子， $M(t)$ 與 $X_i(t)$ 為相同且相互獨立的隨機變數，並假設它們服從標準常態分配。由於 $A_i(t)$ 為 $M(t)$ 與 $X_i(t)$ 的線性組合函數，由常態分配的性質可以知道 $A_i(t)$ 也為一服從標準常態的隨機變數。而這樣的假設所帶來的優點為給定共同因子 $M(t)$ 的條件下，各資產報酬 $A_i(t)$ 彼此為互相獨立。此外，若標的資產組合數目夠多的情形下，增加 LHP (Large homogenous portfolio) 的額外假設條件，視各個資產為同質性資產(homogenous assets)，藉由此額外假設條件，就能夠快速地計算出資產組合損失的分配函數以及 CDO 分券的期望損失。由於單因子結構模型擁有以上所說的優點及其方便性，此模型遂成為市場上評價擔保債權憑證的主要方法，之後有許多文獻針對此模型更深入地探討及延伸更多不同的單因子關聯結構模型。

Laurent and Gregory (2003) 建議以 semi-analytic 方法評價一籃子違約交換 (basket default swaps) 和合成型抵押擔保憑證分券。同樣使用單因子關聯結構模型，本文介紹的評價方法與 O’Kane and Schloegl (2001) 的最大差異在於標的資產發生違約時的損失分配，不同於後者所使用的 LHP 假設方法，本文是使用快速傅立

葉轉換法(Fast Fourier Transforms , FFT)計算，也就是由資產組合損失之特徵函數來取得資產組合之損失分配。藉由此方法評價，與蒙地卡羅法比較，會具有大幅度地減少計算時間的優點，但此模型較大缺點為數學運算過程複雜。而本文提出新的單因子關聯結構模型作評價，分別為均值變異數混和模型(mean-variance mixture models)以及常在存活分析中使用的衰弱模型(frailty models)：以 Clayton 關聯結構為例。

Hull and White (2004)發展了兩種評價抵押擔保憑證分券與直至第 n 個資產違約的信用交換契約(Nth-to-default swap)的方法，此兩種方法的程序都是採用因子關聯結構模型(本文將其拓展成多因子關聯結構模型)並且能夠取代 Laurent, J-P and J. Gregory (2003)所提的快速傅立葉轉換法。而兩種方法主要差異是在於損失分配的計算，第一種方法假定投資組合中各標的資產的權重比例為相等與回覆率為固定值下，利用遞迴關係(recurrence relationship)去求出在特定時點 K 個資產違約的損失機率，其中整個資產的總損失可以視為二項式分配。第二種方法或稱為機率料斗法(probability bucketing method)則沒有限制各標的資產的權重比例為相等且回覆率可以為隨機的(stochastic)假設下，去計算到期日前特定時點的總損失分配。此外，Hull and White (2004)對於單因子關聯結構模型提出了一個嶄新的觀點，也就是模型除了應用常態分配外，只要在給定分配之期望值為零且變異數為一的條件下，任何的分配都可以套用在單因子關聯結構模型裡，而不同的分配選擇就代表為不同的關聯結構模型。本文使用單因子常態關聯結構與雙 t 分配關聯結構(Double t -distribution)來評價 iTraxx 及 CDX 指數之分券市場資料，由實證結果顯示具有厚尾(heavy tails)性質的雙 t 分配關聯結構會得到較好的模型配適結果。更重要的是，本文提出單因子常態關聯結構模型之缺點，在此模型下計算各分券的隱含相關(Implied correlations)及基底隱含相關(Base implied correlations)時，會出現所謂的相關性微笑曲線(correlation smile)與隱含相關偏斜(Implied correlations skew)現象，此現象主要為常態關聯結構缺少厚尾性質所造成。本文

所介紹的雙 t 分配關聯結構模型雖然具有改善此現象的優點，然而，由於 t 分配本身並沒有穩定摺積性(convolution)，也不具備像常態分配的封閉性，使得在計算損失分配方面必須要透過數值積分方法來求解，因而會造成計算過程較為耗時。

Andersen, L. and J. Sidenius (2005) 本文提出了兩個拓展高斯關聯結構的新模型，而新的模型仍然持有原本模型所具有的易處理性與計算效率性。其中一個模型，將回復率隨機化(randomized recovery)，此模型能明確地允許回復率與資產違約頻率之間呈現負相關的影響。另一個模型則將因子負荷項隨機化(randomized factor loadings)，會使得在總體經濟衰退時所得到的違約相關會比總體經濟成長時來得高。作者表示這些模型可以產生類似厚尾性質所擁有之較好的評價效果。而當使用新模型校準市場信用價差時，也就是求取隱含相關，回復率隨機化模型的偏斜影響是相當小的，但因子負荷項隨機化模型會產生如同高斯關聯結構模型的相關偏斜現象。除了以上的修正模型，作者還介紹可以使用具有偏斜性質(skew)的模型，像是 Marshall-Olkin 關聯結構。

Dezhong (2006) 則延續了 Hull and White (2004) 的想法，藉由使用厚尾特性的函數來改善單因子關聯結構模型。作者建議四種單因子高斯關聯結構延伸模型：

- (1) 高斯混合關聯結構 (a double mixture Gaussian copula.)
- (2) 自由度為非整數的雙 t 關聯結構 (a double t distribution with fractional copula.)
- (3) t 與高斯分配混合關聯結構 (a double mixture distribution of t and Gaussian distributions copula.)
- (4) 雙平滑截斷 α 穩定分配關聯結構 (a double smoothly truncated α stable copula.)

(1)~(4) 延伸模型具備了共同的性質，每一個模型皆是透過調整一個參數來控制整體關聯結構函數的厚尾度(tail-fatness)。其中(1)與(3)所使用的分配函數皆是以兩

個分配混合而成，若有一隨機變數 Y 為 X_1 與 X_2 混合分配，則其可以表示為：

$$Y = \begin{cases} X_1, & \text{機率 } p \\ X_2, & \text{機率 } 1 - p \end{cases}$$

在使用混合分配時，必須要注意不論原本 X_1 與 X_2 分配為何，最後 Y 之期望值及變異數必定要為零與一，若不符合條件，得將其標準化以滿足條件。在單因子混合關聯結構模型裡，資產因子與市場因子的厚尾度會由 X_1 、 X_2 各自的參數及 p 三者共同決定。但作者建議執行此模型時，先固定 X_1 和 X_2 的參數，使得 p 成為唯一能夠控制關聯結構函數之厚尾度的參數。

在此，綜合以上一系列對於單因子關聯結構模型的修正及見解，可以發現此方法優點在於其假設不同的標的資產在給定共同因子下具有條件獨立的特性，能夠以較簡化的方式計算不同時點下的資產組合損失。同時，此方法允許使用 semi-analytic 計算方法來避免蒙地卡羅法的耗時性，方法如 Laurent, J-P and J. Gregory (2003) 的快速傅立葉轉換法、Hull and White (2004) 所使用的遞迴數值方法。而且，還能夠再做更進一步的簡化假設，如 Li (2000) 的 LHP (large homogeneous portfolio) 方法，也就是假設它是有可能以大量相同的資產給予同樣加權值組合構成近似一個真實的標的信用資產組合，以此方法能夠得到較為完整形式的合成型抵押擔保憑證分券的評價模型。但是，單因子模型方法會存在一個嚴重的缺陷，若我們使用單因子高斯關聯結構去求取市場上 CDO 各分券的隱含相關時，整體結構方面無法得到相同的隱含相關，相反地，會觀察到相關性微笑曲線及隱含相關偏斜的現象。會發生此現象主要原因在於高斯關聯結構缺少了厚尾性質或是尾端相依性(tail dependence)的性質。因此，許多學者為了解決此缺點，提出了將尾端相依性引入單因子模型中的幾種修正方法。其中一個方法為去使用帶有較多尾端相依性的關聯結構，像是 Hull and White (2004) 的雙 t 關聯結構、Andersen and Sidenius (2005) 的 Marshall-Olkin 關聯結構。另外一個方法為將額外的隨機化因子(stochastic factors)引進到因子模型裡，如 Andersen, L. and J.

Sidenius (2005)所介紹的回復率隨機化模型及因子負荷項隨機化模型。

Burtschell, Gregory and Laurent (2005)對高斯關聯結構、隨機相關高斯關聯結構(stochastic correlation extension to Gaussian copula)、雙 t 關聯結構、Clayton 關聯結構以及Marshall-Olkin 關聯結構執行模型比較分析。藉由評價DJ iTraxx分券比較，結果顯示Clayton 關聯結構評價結果與高斯關聯結構相似；Marshall-Olkin 關聯結構會導致劇烈的尾端厚尾特性；雙t關聯結構及隨機相關模型評價結果會與市場報價相當接近。

雖然我們從文獻上得知運用雙 t 關聯結構來做為 CDO 商品之評價結果是很接近市場報價，但是其在實際運算上並不能完整的分析計算。主要問題基於 Student t 分配本身在摺積(convolution)的不穩定性，對於違約門檻值(資產報酬分配的百分位數)計算需要透過尋找極值的數值分析技巧，而這也使得數值積分計算時間大大增加。計算時間對於決定最適資產組合之應用是一件很重要的議題，像是必須處理 CDO 分券在未來的不同時點下要能夠重複評價，如何選取適當的關聯結構是極為關鍵的。而 Kalemanova et al. (2007)所提出的單因子 NIG 關聯結構模型能夠修正以上問題。

Kalemanova et al. (2007) 提出以 NIG 分配取代 t 分配作為擔保債權憑證分券的評價。NIG 分配本身具有許多良好的性質。首先，其擁有多個參數能夠在建構投資組合的相關性結構上給予較多的彈性調整；其次，其在重複計算過程中具有良好的穩定性；再者，單因子 NIG 關聯結構模型能夠簡單快速地計算得到違約門檻值(default thresholds)。因此，應用 NIG 分配能夠改善 t 分配的耗時性及不穩定性。本文最後比較常態、t、NIG 三種關聯結構方法，在對於 iTraxx 分券的實證分析中，t 分配與 NIG 分配的評價結果皆遠優於常態分配，然而，兩者皆在前兩個分券 0~3%及 3%~6%得到好的配適結果，但皆高估了 6%~9%以上的分券。另外，本文將 NIG 模型分成 NIG(1)及 NIG(2)評價，兩者模型差別在於使用 NIG

分配之參數數目，由實證發現 NIG 分配第二個參數並沒有帶來改善的評價效果。

邱熾燁 (2007)使用 CSN 分配(Closed skew normal)取代 NIG 分配作為擔保債權憑證分券的評價，動機在於 CSN 分配具有常態分配的性質以及其線性組合仍具有封閉性的特質，且具有較多的參數以控制分配的偏態與峰態。但是與單因子常態關聯結構模型相同，CSN 分配的單因子關聯結構模型仍然無法估計的很準確，僅有在最高等級分券(senior tranche)的評價上有明顯的改進。因此作者嘗試使用 NIG 及 CSN 複合分配之單因子關聯結構模型評價抵押擔保債權，目的希望此模型能具有 NIG 與 CSN 各自的評價分券優點，而在實證分析中此模型得到極佳的評價結果，並且比單因子常態關聯結構模型具有更多的參數以使模型更符合實際的需求。

第三節 Normal Inverse Gaussian Distribution(NIG)

NIG 分配為一個廣義雙曲分配(the generalised hyperbolic distributions)的特殊例子(Barndorff-Nielsen (1978))。由於此分配擁有的特定性質，使得其漸漸應用在金融及經濟方面，像是 Barndorff-Nielsen (1997)介紹 NIG 分配及 Levy 過程(L Levy process)具有建模以及分析統計數據的潛力，特別是對於金融資料；Dimitris Karlis (2000)使用了 EM 演算法去計算 NIG 分配參數的最大概似估計值，並發現使用 NIG 分配配適希臘雅典指數(Athens Stock Exchange index)資料結果是相當良好的；Kalemanova et al. (2007)應用 NIG 分配評價擔保債權憑證分券。NIG 分配之所以能如此廣泛應用，最主要的性質是其為一個擁有四個參數的分配，能夠在同時間產生厚尾性及偏斜性質，以及在特定條件下為穩定摺積(convolution)。同時，NIG 分配之機率密度函數、分配函數、反函數也能夠以相當快速方式計算得到。

第四節 Closed Skew Normal Distribution(CSN)

偏斜常態分配之相關文獻最早是由 Azzalini(1985)所提出，其所提出的偏斜常態分配(skew-normal distribution, SN)是一個包含常態分配的性質及形狀參數之分配。Azzalini and Dalla Valle (1996)將偏斜常態分配擴展為多變量偏斜常態分配(Multivariate skew-normal distribution, MSN)，此分配同樣擁有常態分配之性質並能夠以自然的方式在分配上建置偏斜特徵。Azzalini –Vall (2004)更進一步推導出一般化偏斜常態分配(skew-generalized normal distribution, SGN)，剛所提到的 Azzalini (1985)的偏斜常態分配會是一般化偏斜常態分配其中一個例子。此分配擁有一個重要性質：對一般化偏斜常態分配取絕對值之分配會是一個半常態分配(half-normal)。此特殊性質也隱含了一般化偏斜常態分配之所有動差(moments)會是有限的，並且其偶數動差剛好會與標準常態分配相符合。另外一方面，本文也發現一般化偏斜常態分配除了保有偏斜常態分配之偏斜性外，還能夠提供更廣之峰度範圍。然而，Dominguez-Molina et al. (2004) 卻發現了多變量偏斜常態分配族缺少了兩個重要性質：

- (1) 互相獨立多變量偏斜常態分配之聯合分配之封閉性
- (2) 給定多變量偏斜常態分配為非奇異矩陣之線性組合封閉性

Dominguez-Molina et al. (2004) 提出了 CSN 分配來改善，其擁有互相獨立 CSN 隨機向量加總之摺積性質與互相獨立 CSN 分配之聯合分配摺積性。此分配族同樣具有常態分配性質，並且與 Azzalini (1985)的偏斜常態分配相同(屬於 CSN 分配其中一個例子)，也具有額外的參數去控制分配形狀。

本文將以 Kalemanova et al. (2007)及邱熾燁 (2007)所使用的單因子關聯結構方法作為主要評價模型，我們將對於不同時期的擔保債權憑證做分券評價比較分析，以及觀看各個關聯結構模型配適結果與過去所得到的結論是否有所不同以及新的見解。

第三章 合成型 CDO 之評價方法與

單因子關聯結構模型

本章節將介紹合成型 CDO 之評價方法，會先說明合成型 CDO 分券之評價推導過程。接著，再介紹如何應用給定 LHP 假設之單因子高斯及 NIG 關聯結構模型來計算合成型 CDO 分券價格。

第一節 合成型抵押擔保債權憑證之評價方法

我們將考慮一個僅包含信用違約交換契約之標的資產組合之合成型擔保債權憑證。合成型 CDO 分券的持有者或稱保護賣方(Protection Seller)會定期(通常每季)收到一筆由合成型 CDO 發行者或保護買方(Protection Buyer)所支付的信用價差費用(Credit Spread)。若標的資產組合的總違約損失超過分券的面額(Notionals)時，保護賣方將必須補償分券損失費用給予保護買方。

對於標的資產組合之合成型 CDO 的 $K_1 \sim K_2$ 分券 ($0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$) 之評價方法，基本上會與評價信用違約交換方法相同。首先，我們先定義在評價過程中所需要的符號意義，如下列表示：

1. $t_1 < \dots < t_n = T$: 為信用價差的付費日，其中 T 是合成型 CDO 的到期日，而 t_0 ($t_0 < t_1$) 則為評價日。
2. s : 每期的信用價差費用。
3. $L_{(K_1, K_2)}(t)$: 合成型 CDO 之 $K_1 \sim K_2$ 分券在 t 時點之損失百分比。
4. $r(t)$: 為無風險短期利率並且假定此利率與分券損失獨立。
5. $E_Q \left[L_{(K_1, K_2)}(t) \right]$: 為合成型 CDO 之 $K_1 \sim K_2$ 期望分券損失。其中在

$E_Q[L_{(K_1, K_2)}(t)]$ 中的 Q 表示風險中立測度 Q (the risk-neutral measure Q)，我們整個評價過程都是假定此測度，因此 $E_Q[L_{(K_1, K_2)}(t)]$ 也可以表示為

$$E[L_{(K_1, K_2)}(t)]。$$

6. $B(t_0, t_i) = E_Q \left[e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u) du} \right]$: 為折現因子，也就是在第 t_i 時點所拿到的 1 元，

經過每期無風險短期利率 $r(t)$ 折現後在評價日 t_0 之現值。

為了評價合成型 CDO 各分券之公平信用價差價格，必須先計算此分券的保護收入 (Premium leg) 與違約給付金額 (Protection leg)，並假設在風險中立測度下預期這兩筆預期現值金額為相等來計算信用價差。

分券的保護收入為保護的賣方在未來可預期收到來自保護買方的所有信用價差的現值價值：

$$\begin{aligned} \text{Premium leg} &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot E_Q \left[1 - L_{(K_1, K_2)}(t_i) \right] e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u) du} \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \left[1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i) \right] B(t_0, t_i) \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

分券的保護收入之信用價差就如剛才所提到的僅在 $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ 時付費，並簡單假設在 t_i 時點的信用價差費用會與在此時點的剩餘本金百分比成比例。另外，分券的保護收入還有另外可能一種型式，保護賣方除了在每一期收到來自保護買方的信用價差，並且在契約訂立期初時會收到一筆等同於 $K_1 \sim K_2$ 分券市場報價 (market quote) 的預付費用。此類型式之分券的保護收入可以表示成：

$$\text{Premium leg} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \left[1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i) \right] B(t_0, t_i) + mq \quad (3.2)$$

其中(3.2)式的 mq 則為 $K_1 \sim K_2$ 分券市場報價的預付費用。

違約給付金額則為當未來發生違約事件時，保護賣方必須給予保護買方的補償金額現值：

$$\begin{aligned} \text{Protection leg} &= E_Q \left[e^{-\int_0^{t_i} r(u) du} dL_{(K_1, K_2)}(s) \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^n E_Q \left[e^{-\int_0^{t_i} r(u) du} (L_{(K_1, K_2)}(t_i) - L_{(K_1, K_2)}(t_{i-1})) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[EL_{(K_1, K_2)}(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}(t_{i-1}) \right] B(t_0, t_i) \end{aligned} \quad (3.3)$$

原本違約給付金額應當在發生違約事件時立即付費，但為了簡化表示，定義在 t_{i-1} 到 t_i 時間的總違約金額僅在 t_i 時點付費。

若要計算合成型 CDO 的公平信用價差價格就應該要使分券的保護收入相等於違約給付金額。從(3.1)及(3.3)式，我們能得到公平信用價差為：

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n \left[EL_{(K_1, K_2)}(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}(t_{i-1}) \right] B(t_0, t_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \left[1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i) \right] B(t_0, t_i)} \quad (3.4)$$

而當分券的保護收入為另一種型式時，每期的信用價差會是一個固定金額，需要計算則為期初 $K_1 \sim K_2$ 分券市場報價的預付費用，同樣藉由使分券的保護收入相等於違約給付金額的方式 ((3.2) = (3.3))，則能得到 $K_1 \sim K_2$ 分券市場報價為：

protection leg - premium leg

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \left[EL_{(K_1, K_2)}(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}(t_{i-1}) \right] B(t_0, t_i) - \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \left[1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i) \right] B(t_0, t_i) \\
 &= mq \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

假設標的資產組合在第 t_i 時點之標的資產組合損失為 $L_{portfolio}(t_i)$ ，則我們可以將

$K_1 \sim K_2$ 分券之損失百分比表示為

$$L_{(K_1, K_2)}(t_i) = \frac{(\min(L_{portfolio}(t_i), K_2) - K_1)^+}{K_2 - K_1}, \quad 0 \leq L_{(K_1, K_2)}(t_i) \leq 1 \tag{3.6}$$

給定一個已知連續型資產組合損失分配函數 $F(x; t)$ ，則 $K_1 \sim K_2$ 分券在第 t 時點之

期望損失百分比為

$$\begin{aligned}
 &EL_{(K_1, K_2)}(t) \\
 &= \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^1 (\min(x, K_2) - K_1) dF(x; t) \\
 &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF(x; t) + \int_{K_2}^1 (K_2 - K_1) dF(x; t) \right) \\
 &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF(x; t) - \int_{K_2}^1 (x - K_1) dF(x; t) + \int_{K_2}^1 (K_2 - K_1) dF(x; t) \right) \\
 &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF(x; t) - \int_{K_2}^1 (x - K_2 - K_1 + K_1) dF(x; t) \right) \\
 &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF(x; t) - \int_{K_2}^1 (x - K_2) dF(x; t) \right) \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

綜合以上所有式子，只要能夠找到分券的期望損失就能夠輕易地計算合成型 CDO 的公平信用價差價格。然而，在計算期望損失前，最困難的是必須要先計算標的資產組合的損失函數。所以在接下來的章節將介紹單因子關聯結構模型來導出資產組合的損失函數及期望分券損失。

第二節 應用 LHP 假設之單因子高斯關聯結構模型

考慮一個具有 N 個標的資產的信用資產組合，若 N 個資產數是夠多的情形下，則我們將對此信用資產組合假設為大樣本一致性資產組合 (large homogeneous portfolio portfolio ; LHP)，假定資產組合中的各資產為相同權重比例和具有同質性(各個資產具有相同的違約機率、復原率，以及對共同因子的相關性)，藉由此假設，我們能夠去預測真實之信用資產組合。

假定各個資產的違約時間為一個服從參數 λ 的指數分配，其中 λ 為該資產的信用違約強度(default intensity)，這裡我們將使用市場上信用資產組合之平均 CDS 價差及固定的復原率(recovery rate)來估計違約強度³。由以上定義及假設，則我們可以知道第 i 個資產在第 t 時間前違約的機率為 $P_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ 。

現在開始介紹單因子結構模型，給定此標的資產組合具有共同的市場因子 $M(t)$ ，第 i 個資產從契約開始到第 t 時間的資產報酬 $A_i(t)$ 可以寫成：

$$A_i(t) = \sqrt{\rho_i} M(t) + \sqrt{1 - \rho_i} X_i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

其中 $M(t)$ 為市場因子， $X_i(t)$ 為資產本身因子， $M(t)$ 與 $X_i(t)$ 為相同且相互獨立的隨機變數，假定它們服從標準常態變數

$$M(t) \rightarrow N(0,1), \quad X_i(t) \xrightarrow{iid} N(0,1), \quad M(t) \perp X_i(t)$$

由於 $A_i(t)$ 為 $M(t)$ 與 $X_i(t)$ 的線性組合函數，由常態分配的性質可以知道 $A_i(t)$ 也為服從標準常態的隨機變數

$$A_i(t) = \sqrt{\rho_i} M(t) + \sqrt{1 - \rho_i} X_i(t) \xrightarrow{iid} N(0,1) \quad (3.9)$$

(3.9)式說明了在給定共同因子 $M(t)$ 的條件下，由於 $X_i(t)$ 之間相互獨立，因此資

³ 違約強度 $\lambda = \frac{\text{平均的 CDS 價差}}{1 - \text{復原率}}$ ，其中復原率為當第 i 個資產違約時，可以拿回的補償金額比例。

產報酬 $A_i(t)$ 之間也為相互獨立。

在此關聯結構模型中，總資產報酬 $A_i(t)$ 會對應於第 i 標的資產的違約時間 t_i ，則我們可以運用百分比轉換(percentile-to-percentile transformation)

$$p_i(t_i < t) = p[A_i(t) \leq C_i(t)]$$

定義第 i 標的資產在時點 t 之前的違約機率為

$$q_i(t) = p_i(t_i < t)$$

假定各個資產的違約時間為指數分配下，此違約機率為 $q_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ 。

則能夠得到違約門檻值 $C_i(t)$

$$C_i(t) = \Phi^{-1}(q_i(t))$$

其中 Φ 為標準常態分配函數。

給定 LHP 的假設下，所有標的資產會擁有相同的違約門檻值 $C(t)$ ，以及相同的本金與復原率，而且，資產之間的相关係數會是相同的 ($\rho_i = \rho$)。則我們就能計算給定共同的因子 $M(t)$ 下，第 i 個標的資產報酬會小於違約門檻值 $C(t)$ 的條件違約機率為

$$\begin{aligned} p_i(t|M) &= p_i(A_i(t) \leq C(t)|M) = p_i(\sqrt{\rho}M(t) + \sqrt{1-\rho}X_i(t) \leq C(t)|M) \\ &= p_i\left(X_i(t) \leq \frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}} \mid M\right) \\ &= \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned}$$

為了方便公式推導，我們先假設復原率為零。則發生 k 個標的資產違約之資產組

合損失百分比 $L(t) = \frac{K}{N}$ 違約機率為二項式分配 $Bin(N, \Phi(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} M(t)}{\sqrt{1-\rho}}))$ ，為

了求出非條件下的資產組合損失百分比，必須要對共同因子 $M(t)$ 積分

$$P\left(L(t) = \frac{k}{N}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{k} \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k} d\Phi(m)$$

則我們就能計算資產組合損失百分比的累積機率，考慮其不會大於 x

$$\begin{aligned} F_N(t, x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} P\left(L(t) = \frac{k}{N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{k} \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} m}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} m}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k} d\Phi(m) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $x \in [0, 1]$

從(3.10)式可以發現到要得到最後的累積損失分配的推導結果會是相當複雜，在此，由於我們已經假定在 LHP 情形下，就可以利用由 Vasicek(2002)所提出的 Large portfolio limit approximation 去推導出損失分配。令 $s = \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho} M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$ 並將其代入到(3.10)式，我們可以得到 $F_N(t, x)$ 新的表示式

$$F_N(t, x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} \binom{N}{k} s^k (1-s)^{N-k} d\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\phi^{-1}(s) - C(t)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

接著考慮一個具有無限多資產之資產組合損失分配函數

$$F_{\infty}(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} \binom{N}{k} s^k (1-s)^{N-k} d\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\phi^{-1}(s) - C(t)}{\sqrt{\rho}}\right) \right]$$

因為

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} \binom{N}{k} s^k (1-s)^{N-k} = \begin{cases} 0, & \text{if } x < s \\ 1, & \text{if } x > s \end{cases}$$

則資產組合損失百分比的累積分配函數為

$$\begin{aligned} F_{\infty}(t, x) &= \int_0^x d\Phi \left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{\sqrt{\rho}} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

為了計算 $K_1 \sim K_2$ 的期望分券損失，我們使用(3.7)式並將它改寫成

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF_{\infty}(x; t) + (1 - F_{\infty}(t, K_2)) \quad (3.12)$$

計算此積分必須要先求得資產組合的損失密度函數，對(3.11)微分可得到：

$$f_{\infty}(t, x) = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \frac{\phi \left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{\sqrt{\rho}} \right)}{\phi(\Phi^{-1}(x))} \quad (3.13)$$

其中 ϕ 為標準常態密度函數。

(3.12)式左半部分的積分可以寫成以下的形式

$$\frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \quad (3.14)$$

在此，若將(3.13)式中的 $f_{\infty}(x; t)$ 代入到(3.14)式，會發現整個式子變成相當繁

複，無法直接計算取得積分結果。然而，我們可以藉由變數變換的方式來避免

此情形：

$$y = \Phi^{-1}(x)$$

則

$$dy = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(x))} dx$$

所以最後就能計算(3.12)式為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \int_{\Phi^{-1}(K_1)}^{\Phi^{-1}(K_2)} (\Phi(y) - K_1) \phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}y - C(t)}{\sqrt{\rho}}\right) dy \end{aligned}$$

以上為假設復原率為零之 $K_1 \sim K_2$ 期望分券損失推導過程及結果，若我們假設資產的復原率並不為零的情形下， $K_1 \sim K_2$ 的期望分券損失會與(3.12)式形成一個關係式：

$$EL_{(K_1, K_2)}^R = EL_{\left(\frac{K_1}{1-R}, \frac{K_2}{1-R}\right)}(t) \quad (3.15)$$

其中 $EL_{(K_1, K_2)}^R$ 即為假設復原率不為零之 $K_1 \sim K_2$ 期望分券損失，(3.15)此關係式在接下來的各模型之單因子關聯結構同樣適用。

第三節 NIG 分配性質及定義

NIG 分配是一個為常態分配與反高斯分配 (inverse Gaussian distribution, IG) 的混合分配。定義一個非負隨機變數 Y ，其為兩個正參數 α 、 β 的反高斯分配，則 Y 的機率密度函數會是如下的形式：

$$f_{IG}(y; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} y^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha-\beta y)^2}{2\beta y}}, & y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

可將隨機變數 Y 表示成 $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ 。

若有一個隨機變數 X ，其為 α 、 β 、 μ 及 δ 四個參數的 NIG 分配，則此隨機變數 X 會符合條件如下：

$$\begin{aligned} X|Y=y &\sim N(\mu + \beta y, y) \\ Y &\sim IG(\delta\gamma, \gamma^2), \text{ 其中 } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中參數滿足下列條件： $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ 和 $\delta > 0$ 。

我們將隨機變數 X 表示為 $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ ，並且 X 的機率密度及分配函數的表示式分為 $f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ 與 $F_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ 。則 X 的機率密度函數為：

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta \alpha \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right); \quad (3.18)$$

其中 $K_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}\omega(t + t^{-1})) dt$ 是 the modified Bessel function of the third kind。

而 NIG 分配的四個參數對於機率密度函數的影響分別以圖形呈現如下：

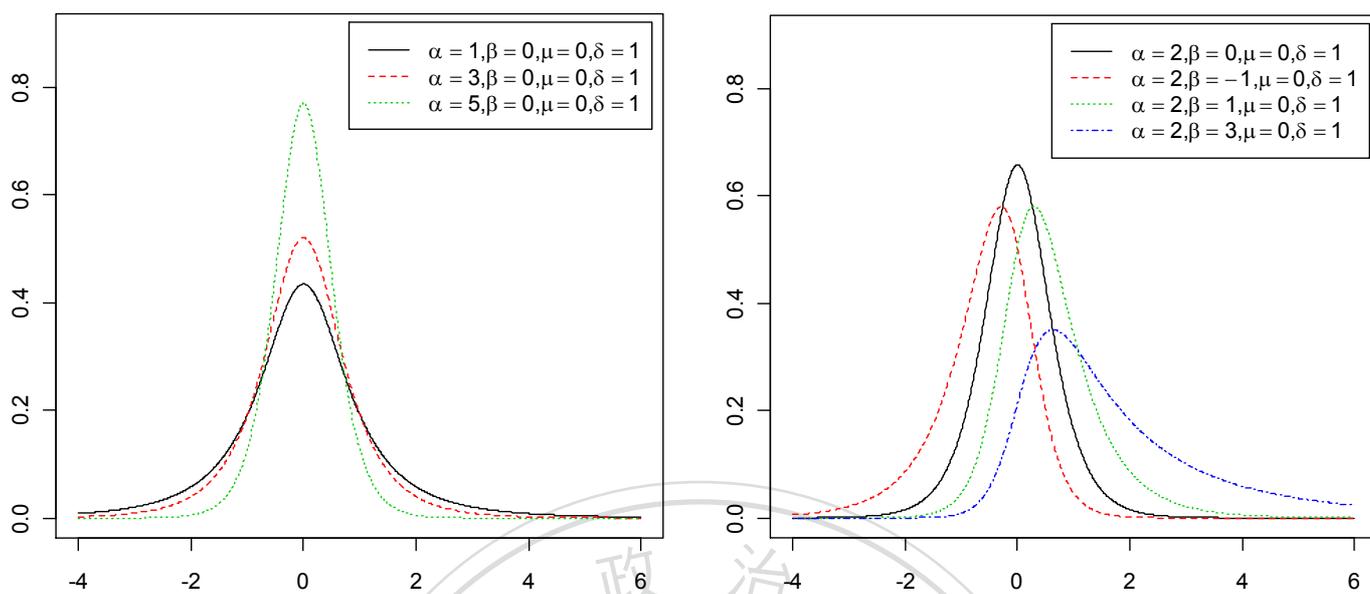


圖 3.2 α 參數(左圖)與 β 參數(右圖)對 NIG 分配之密度函數影響

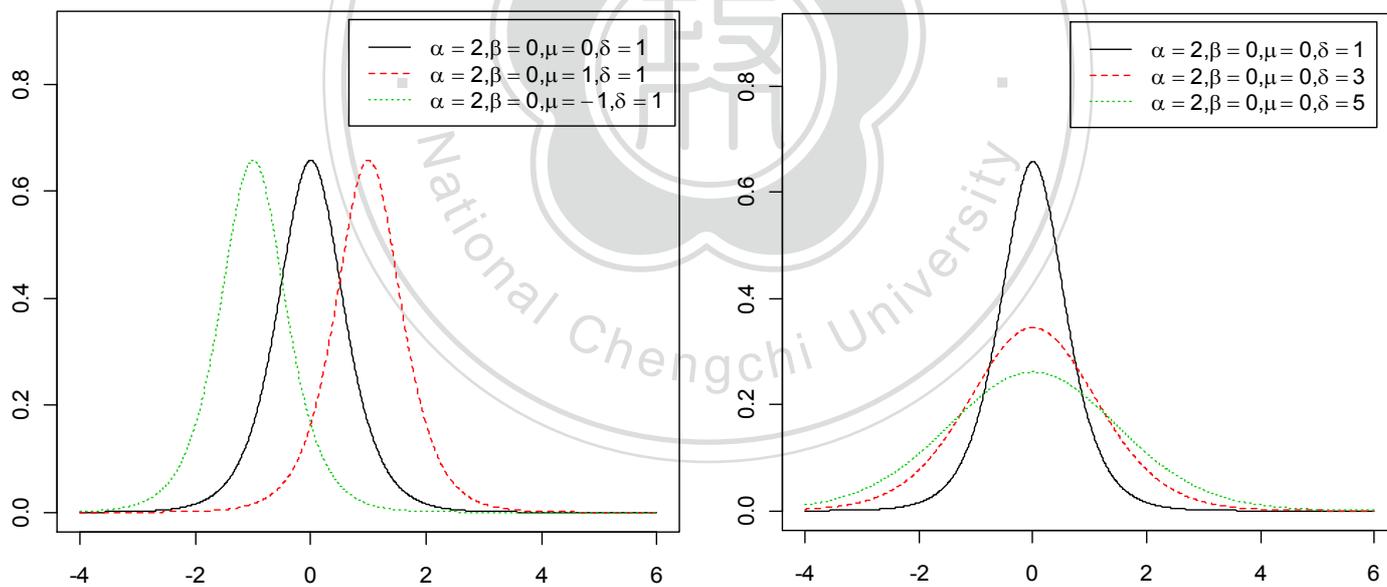


圖 3.2 μ 參數(左圖)與 δ 參數(右圖)對 NIG 分配之密度函數影響

從圖 3.1 及圖 3.2 知，我們將其他參數固定來觀察單一參數變動對於密度函數之影響，可以發現 NIG 分配能夠藉由改變四個參數來產生帶有厚尾度及偏斜性之分配，其中當 β 參數為 0 時，NIG 分配會呈現對稱分配，否則會呈現偏斜分配。接下來將介紹 NIG 分配之定理及性質。

定理一： $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ 之動差母函數 $M(t) = E(\exp(tx))$

$$M_{NIG}(x: \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})}$$

定理二： $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ 之中央動差 (平均數、變異數、偏態、峰度)

$$E(x) = \mu + \delta \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{Var}(x) = \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3}$$
$$S(X) = 3 \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\delta\gamma}} \quad K(X) = 3 + 3 \left(1 + 4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) \frac{1}{\delta\gamma}$$

定理三： NIG 分配之尺度及摺積性質 (scaling and convolution property)

若有兩互相獨立隨機變數 $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$ 與 $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$ ，則

- (1) 給定一個常數 $c \Rightarrow cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, \mu_1, \delta_1\right)$ ， $cY \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, \mu_2, \delta_2\right)$
- (2) $X + Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2)$

以上就是 NIG 分配性質及定義，而在 NIG 程式計算方面，不論是其密度函數、分配函數、反函數、生成樣本，這些都已有現成的函數能夠去使用。在 R 軟體裡，能夠在 fBasics 套件得到這些函數的資訊。

第四節 應用 LHP 假設之單因子 NIG 關聯結構模型

將 NIG 分配導入單因子關聯結構模型裡，如同單因子常態關聯結構模型，假定有 N 個標的資產之信用資產組合，則第 i 個標的資產報酬會是下列形式：

$$A_i(t) = \sqrt{\rho_i}M(t) + \sqrt{1-\rho_i}X_i(t), \quad i=1, \dots, N$$

其中 M(t) 為市場因子，X_i(t) 為資產本身因子，M(t) 與 X_i(t) 為相互獨立的隨機變數，假定它們皆服從 NIG 分配。為了要使兩個因子及資產報酬標準化(期望值為 0，變異數為 1)，則此兩個互相獨立的 NIG 變數的參數如下：

$$M(t) \sim NIG\left(\alpha, \beta, -\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)$$

$$X_i(t) \stackrel{iid}{\sim} NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho_i}{\rho_i}}\alpha, \sqrt{\frac{1-\rho_i}{\rho_i}}\beta, -\sqrt{\frac{1-\rho_i}{\rho_i}}\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \sqrt{\frac{1-\rho_i}{\rho_i}}\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)$$

然後藉由 NIG 分配所具有之尺度性與封閉性質，則資產報酬 A_i(t) 的分配會是：

$$A_i(t) \stackrel{iid}{\sim} NIG\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho_i}}, \frac{\beta}{\sqrt{\rho_i}}, -\frac{1}{\sqrt{\rho_i}}\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{1}{\sqrt{\rho_i}}\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right) \quad (3.19)$$

為了簡化分配的參數符號，我們定義分配函數 $F_{NIG(s)}(x)$ 為

$$F_{NIG}\left(s\alpha, s\beta, -s\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, s\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)$$

同樣的，市場因子 M 的分配函數定義為 $F_{NIG(1)}(x)$ ，而資產因子 X 的分配函數則

$$\text{為 } F_{NIG}\left(\sqrt{\frac{1-\rho_i}{\rho_i}}\right)(x)$$

而違約門檻值 $C_i(t)$ 就能夠藉由 NIG 分配的性質來計算得到答案:

$$q_i(t) = p[A_i(t) \leq C_i(t)] = F_{NIG\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)}(C_i(t)) \Rightarrow C_i(t) = F_{NIG\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)}^{-1}(q_i(t))$$

由於在給定 LHP 的假設下，所有標的資產會擁有相同的違約門檻值 $C(t)$ ，以及相同的本金與復原率，此外，兩兩資產間的相關係數會是相同的 ($\rho_i = \rho$)。則我們就能找到給定共同的因子 $M(t)$ 下，第 i 個標的資產報酬會小於違約門檻值 $C(t)$ 的條件違約機率為

$$p_i(t|M) = p_i(A_i(t) \leq C(t)|M) = F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

為了方便公式推導，我們先假設復原率為零。則發生 k 個標的資產違約之資產組

合損失百分比 $L(t) = \frac{K}{N}$ 違約機率為二項式分配

$$k|N \sim Bin\left(N, F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)$$

為了求出非條件下的資產組合損失百分比，必須要對共同因子 $M(t)$ 積分

$$\begin{aligned} P\left(L(t) = \frac{k}{N}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{k} F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k} dF_{NIG(1)}(m) \end{aligned}$$

接下來如同前面(3.9)~(3.11)的步驟，再由 Vasicek(2002)所提出的 Large portfolio limit approximation 去推導出資產組合損失分配:

$$F_{\infty}(t, x) = 1 - F_{NIG(1)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho} F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (3.20)$$

其中 $x \in [0,1]$ ，違約門檻值 $C_i(t) = F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})}^{-1}(q_i(t))$ ，而 $q_i(t)$ 則為各標的資產之違約機率。

為了計算 $K_1 \sim K_2$ 的期望分券損失，我們使用(3.7)式並將它改寫成

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF_{\infty}(x; t) + (1 - F_{\infty}(t, k_2)) \quad (3.21)$$

計算此積分必須要先求得資產組合的損失密度函數，對(3.20)微分可得到：

$$f_{\infty}(t, x) = \frac{f_{NIG(1)} \left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho} F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})}^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right)}{\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}} \frac{f_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})} \left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})}^{-1}(x)}{\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right)}{F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})} \left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})}^{-1}(x)}{\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right)} \quad (3.22)$$

(3.21)式左半部分的積分可以寫成以下的形式

$$\frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \quad (3.23)$$

在此，若將(3.22)式中的 $f_{\infty}(x; t)$ 代入到(3.23)式，會發現整個式子變成相當繁複，無法直接計算取得積分結果。解決方法與單因子高斯關聯結構相同，我們可以藉由變數變換的方式來避免此情形：

$$y = F_{NIG(\frac{1}{\sqrt{\rho}})}^{-1} \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right) (x)$$

則

$$dy = \frac{dx}{f_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}\left(F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}^{-1}(x)\right)}$$

所以最後就能計算(3.23)式為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \int_{F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}^{-1}(K_1)}^{F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}^{-1}(K_2)} \left(F_{NIG\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\right)}(y) - K_1 \right) f_{NIG(1)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}y}{\sqrt{\rho}}\right) dy \end{aligned}$$

此積分函數能夠藉由 NIG 之密度函數、分配函數及反函數來計算，藉由 R 軟體中的 `fabsics` 套件之 `dnig`、`pnig` 及 `qnig` 函數能夠快速計算此積分，而且，由於 NIG 分配之摺積性質，對違約門檻值 $C(t)$ 也能夠快速地計算求得。

第四章 單因子 CSN 與 NIG 混合分配 之關聯結構模型

本章節將介紹 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型，一開始會先說明 CSN 分配之性質及定理，CSN 分配如之前所述，此分配除了擁有常態分配性質，同時其具有額外的參數能夠去控制分配之偏態及峰度。除此之外，CSN 分配還擁有互相獨立隨機變數之加總及聯合分配之摺積性質。最後，會介紹在給定 LHP 假設下之單因子 CSN 關聯結構模型以及單因子 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型。

第一節 CSN 分配之性質與定理

假定 $Y = \mu + E_1$ ，其中 $E_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$

$Z = -v + DE_1 + E_2$ ，其中 $E_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$

則 Y 與 Z 的聯合分配會是二元常態分配：
$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \sim BN \left(\begin{pmatrix} \mu \\ -v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & D\sigma_1^2 \\ D\sigma_1^2 & D^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

則可以由此證明得到 $f(y|z > 0)$ 為：

$$\begin{aligned} f(y|z > 0) &= \sigma_1^{-1} \phi \left(\frac{y - \mu}{\sigma_1} \right) \Phi \left(\frac{-v + D(y - \mu)}{\sigma_2} \right) / \Phi \left(\frac{-v}{\sqrt{D^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \\ &= \frac{\phi_1(y; \mu, \sigma_1^2) \Phi_1(D(y - \mu); v, \sigma_2^2)}{\Phi_1(0; v, D^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\phi_1(\cdot)$ 與 $\Phi_1(\cdot)$ 分別為標準常態分配的機率密度函數與分配函數。而此方程式

就為單變數的 CSN 分配，我們可以將其定義成 $Y \sim CSN_{1,1}(\mu, \sigma_1^2, D, v, \sigma_2^2)$ 。

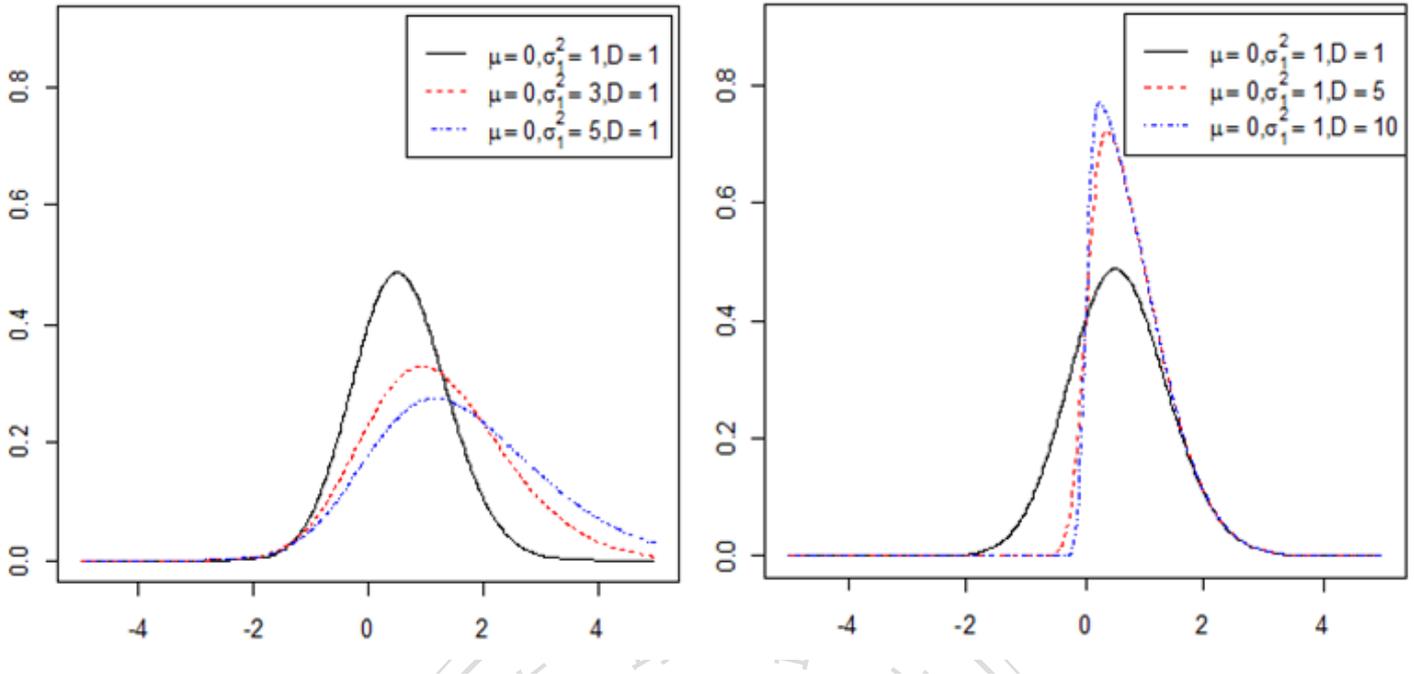


圖 4.1 σ_1^2 參數(左圖)與 D 參數(右圖)對 $CSN_{1,1}$ 分配之密度函數影響(固定 $\nu=0$, $\sigma_2^2=1$)

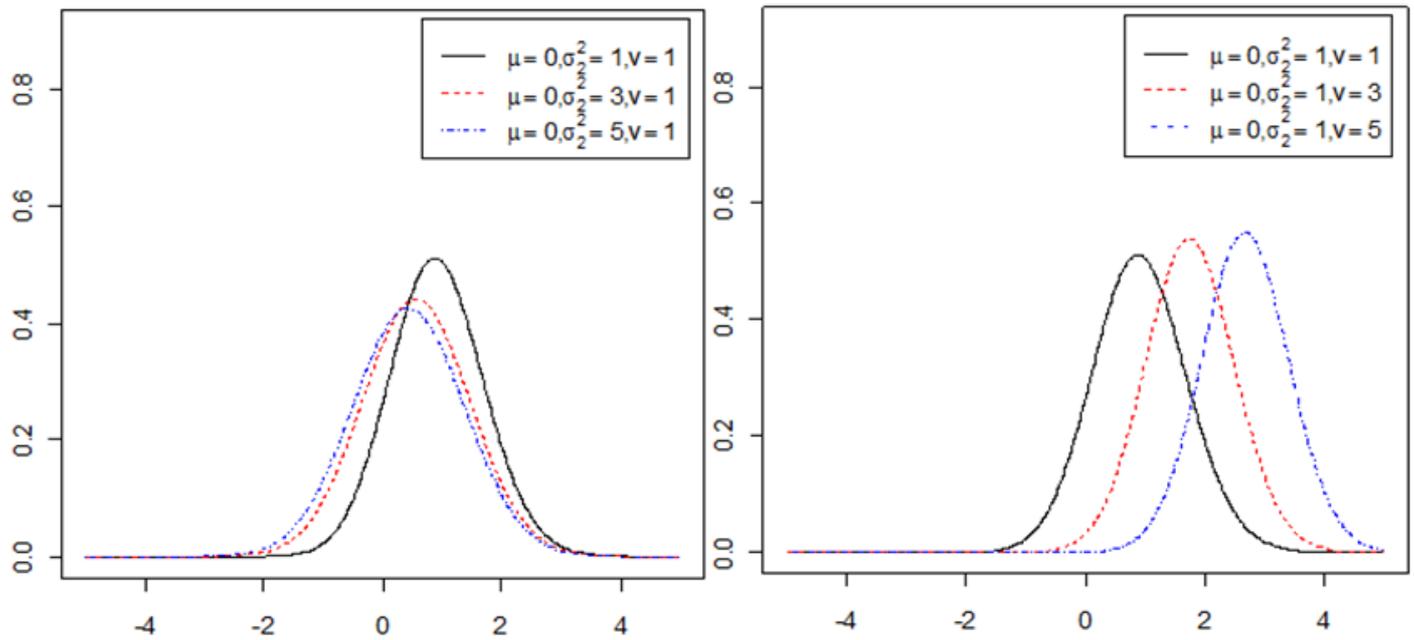


圖 4.2 σ_2^2 參數(左圖)與 ν 參數(右圖)對 $CSN_{1,1}$ 分配之密度函數影響(固定 $\sigma_1^2=1$, $D=1$)

從圖 4.1 及圖 4.2 知，我們將其他參數固定來觀察單一參數變動對於密度函數之影響，可以發現最主要能影響 CSN 分配之厚尾度及偏斜性為參數 σ_1^2 及 D 。

(4.1)式僅為 CSN 分配其中一個例子而已，現在介紹 CSN 分配的一般化形式：

$$f_{p,q}(y; \mu, \Sigma, D, \nu, \Delta) = \frac{\phi_p(y; \mu, \Sigma) \Phi_q(D(y - \mu); \nu, \Delta)}{\Phi_q(0; \nu, \Delta + D\Sigma D')}, \quad y \in \mathfrak{R}^p$$

其中 $p \geq 1, q \geq 1, \mu \in \mathfrak{R}^p, \Sigma(p \times p) > 0, D(q \times p), \nu \in \mathfrak{R}^q, \Delta(q \times q) > 0$ ，

$\phi_p(\cdot; \eta, \Psi)$ 與 $\Phi_p(\cdot; \eta, \Psi)$ 為 p 維度常態分配的機率密度函數與分配函數， $\eta \in \mathfrak{R}^p$

為其平均數， Ψ 則為 $p \times p$ 共變異數矩陣。若一個 p 維度的隨機向量為具有參數

$\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta$ 的 CSN 分配，我們將其定義為 $Y \sim CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$ 。

CSN 分配與前面所提到的偏斜常態分配族主要差異為：CSN 分配具有額外的參數 ν, Δ ，參數 ν 給予 CSN 分配在條件密度函數下的封閉性質；參數 Δ 則給予 CSN 分配在邊際密度函數下的封閉性質；而 $\Phi_q(\cdot)$ 的包含，則給予了一組互相獨立之 CSN 隨機向量能夠具有加成性以及其聯合分配仍然會是 CSN 分配之封閉性質。至於其它參數 μ, Σ, D ，與其他的偏斜常態分配族的參數具有相同的意義，它們各自意義為位置參數(location)、尺度參數(scale)、偏態參數(skewness)。以上所提到的性質證明請參考 Dominguez-Molina (2004)，接下來將介紹 CSN 分配的定理及性質。

定理一：CSN 分配之動差母函數

若 $Y \sim CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$ ， $Y \in \mathfrak{R}^p$ ，則 Y 的動差母函數 $M_Y(t)$ 為：

$$M_Y(t) = \frac{\Phi_q(D\Sigma t; \nu; \Delta + D\Sigma D')}{\Phi_q(0; \nu; \Delta + D\Sigma D')} e^{i\mu + (\frac{1}{2})i\Sigma t}, \quad t \in \mathfrak{R}^p$$

推論一：

若 $Y \sim CSN_{1,1}(\mu, \sigma_1^2, D, \nu, \sigma_2^2)$ ， $Y \in \mathcal{R}^1$ ，則 Y 的動差母函數 $M_Y(t)$ 為：

$$M_Y(t) = \frac{\Phi_1(D\sigma_1^2 t; \nu; D\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\Phi_1(0; \nu; D\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{\mu + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}, t \in \mathcal{R}^p$$

從上式，我們能夠推導 $M_Y(t)$ 的一階及二階導函數如下：

$$M_Y'(t)|_{t=0} = \mu + \frac{\phi_1\left(\frac{-\nu}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)}{\Phi_1\left(\frac{-\nu}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)} \times \frac{D\sigma_1^2}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

$$M_Y''(t)|_{t=0} = \mu^2 + \sigma_1^2 + \frac{\phi_1\left(\frac{-\nu}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \frac{D\sigma_1^2}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}{\Phi_1\left(\frac{-\nu}{\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)} \left[2\mu + \frac{D\sigma_1^2 \nu}{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right]$$

在此，為了簡化參數，我們設定參數 ν 為 0，則我們能得到 Y 的期望值與變異數：

$$E(Y) = \mu + \frac{2D\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

$$Var(Y) = \sigma_1^2 - \frac{4D^2\sigma_1^4}{2\pi(D\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \frac{D^2\sigma_1^4(\pi - 2) + \pi\sigma_1^2\sigma_2^2}{\pi(D\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} > 0$$

定理二：CSN 分配在運算中的封閉性質

(1) 假設有一個任意常數 $b \in \mathcal{R}^p$ ，且 $Y \sim CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$ ，則我們可以證明

$$\Rightarrow Y + b \sim CSN_{p,q}(\mu + b, \Sigma, D, \nu, \Delta)$$

另外，若存在一個任意實數 c

$$\Rightarrow cY \sim CSN_{p,q}(c\mu, \Sigma c^2, Dc^{-1}, \nu, \Delta)$$

(2) 若 Y_1, Y_2 為互相獨立的隨機變數, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{R}^p$, 且 $Y_i \sim CSN_{p, q_i}(\mu_i, \Sigma_i, D_i, \nu_i, \Delta_i)$

, $i=1, 2$, 則 $Y_1 + Y_2 \sim CSN_{p, q_1+q_2}(\mu^+, \Sigma^+, D^+, \nu^+, \Delta^+)$

其中

$$D^+ = \begin{bmatrix} D_1 \Sigma_1 (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \\ D_2 \Sigma_2 (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \end{bmatrix}, \nu^+ = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \Delta^+ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \Delta_1 + D_1 \Sigma_1 D_1' - D_1 \Sigma_1 (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \Sigma_1 D_1'$$

$$A_{22} = \Delta_2 + D_2 \Sigma_2 D_2' - D_2 \Sigma_2 (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \Sigma_2 D_2'$$

$$A_{12} = A_{21} = -D_1 \Sigma_1 (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \Sigma_2 D_2'$$

推論二：

若 Y_1, Y_2 為互相獨立的隨機變數, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{R}^p$ 且 $Y_i \sim CSN_{1,1}(\mu_i, \sigma_{i1}^2, D_i, \nu_i, \sigma_{i2}^2)$,

$i=1, 2$, 則我們可以藉由定理二證明

$$\Rightarrow ? a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \sim CSN_{1,2}(\mu^+, \Sigma^+, D^+, \nu^+, \Delta^+)$$

其中

$$\mu^+ = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2, \Sigma^+ = a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2$$

$$D^+ = \begin{bmatrix} \frac{D_1 a_1 \sigma_{11}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} \\ \frac{D_2 a_2 \sigma_{21}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} \end{bmatrix}, \nu^+ = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \Delta^+ = \begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 + \frac{D_1 a_2 \sigma_{11}^2 \sigma_{21}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} & -\frac{D_1 a_1 \sigma_{11}^2 \times D_2 a_2 \sigma_{21}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} \\ -\frac{D_1 a_1 \sigma_{11}^2 \times D_2 a_2 \sigma_{21}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} & \sigma_{22}^2 + \frac{D_2 a_1 \sigma_{11}^2 \sigma_{21}^2}{a_1^2 \sigma_{11}^2 + a_2^2 \sigma_{21}^2} \end{bmatrix}$$

有關 CSN 分配的性質及定理之證明請參閱 Dominguez-Molina (2004) 從以上內容得知 CSN 分配具有運算中的封閉性，此特點有助於違約門檻值 $C_i(t)$ 之計算；另外，與 NIG 分配相同，能夠藉由改變 CSN 分配之參數來產生帶有偏斜性及厚尾度之分配。接下來，我們將介紹應用 LHP 假設之單因子 CSN 關聯結構模型。

第二節 應用 LHP 假設之單因子 CSN 關聯結構模型

應用 LHP 假設之單因子 CSN 關聯結構模型之推導過程如前面常態關聯結構模型一樣，令 M 及 X_i 皆為 CSN 分配，由定理二可知 A_i 同樣也是 CSN 分配。

我們先假定 $M \sim CSN_{1,1}(\mu_1, \sigma_{11}^2, D_1, 0, \sigma_{12}^2)$, $X_i \sim CSN_{1,1}(\mu_2, \sigma_{21}^2, D_2, 0, \sigma_{22}^2)$ 。藉由定理二及推論二，能夠得到：

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho_i}M &\sim CSN_{1,1}\left(\sqrt{\rho_i}\mu_1, \rho_i\sigma_{11}^2, \frac{D_1}{\sqrt{\rho_i}}, 0, \sigma_{12}^2\right) \\ \sqrt{1-\rho_i}X_i &\sim CSN_{1,1}\left(\sqrt{1-\rho_i}\mu_2, (1-\rho_i)\sigma_{21}^2, \frac{D_2}{\sqrt{1-\rho_i}}, 0, \sigma_{22}^2\right) \\ \Rightarrow A_i = \sqrt{\rho_i}M + \sqrt{1-\rho_i}X_i &\sim CSN_{1,2}(\mu_{A_i}, \Sigma_{A_i}, D_{A_i}, \nu_{A_i}, \Delta_{A_i})\end{aligned}$$

其中

$$\mu_{A_i} = \sqrt{\rho_i}\mu_1 + \sqrt{1-\rho_i}\mu_2, \quad \Sigma_{A_i} = \rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2$$

$$D_{A_i} = \begin{bmatrix} \frac{D_1\sqrt{\rho_i}\sigma_{11}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} \\ \frac{D_2\sqrt{1-\rho_i}\sigma_{21}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} \end{bmatrix}, \quad \nu_{A_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{A_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 + \frac{D_1^2(1-\rho_i)\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} & -\frac{D_1\sqrt{\rho_i}\sigma_{11}^2 \times D_2\sqrt{1-\rho_i}\sigma_{21}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} \\ -\frac{D_1\sqrt{\rho_i}\sigma_{11}^2 \times D_2\sqrt{1-\rho_i}\sigma_{21}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} & \sigma_{22}^2 + \frac{D_2^2\rho_i\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2}{\rho_i\sigma_{11}^2 + (1-\rho_i)\sigma_{21}^2} \end{bmatrix}$$

在此，為了簡化式子，我們令 M 及 X_i 為相同的 CSN 分配，同時，與單因子 NIG 關聯結構模型同樣，必須要對兩個因子 M 及 X_i 標準化(期望值為 0，變異數為 1)，則經過標準化後各自分配為：

$$M(t), X_i(t) \stackrel{iid}{\sim} CSN_{1,1} \left(\pm\sqrt{\sigma_1^2-1}, \sigma_1^2, \pm\frac{\sqrt{\pi(\sigma_1^2-1)}\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{\pi-(\pi-2)\sigma_1^2}}, 0, \sigma_2^2 \right)$$

$$\text{其中 } 1 < \sigma_1^2 < \frac{\pi-2}{\pi}$$

由於在我們假設($\nu=0$)與 M 和 X_i 標準化的限制下，此式子會與 σ_2^2 獨立，也就是說， M 和 X_i 之密度函數值並不會因 σ_2^2 之改變而受到影響。為了簡化分配的參數符號，將 M 和 X_i 定義為 $M \sim CSN_{1,1}(\mu_M, \Sigma_M, D_M, \nu_M, \Delta_M)$ 以及 $X_i \sim CSN_{1,1}(\mu_X, \Sigma_X, D_X, \nu_X, \Delta_X)$ 。

則第 i 個資產從契約開始到第 t 時間的總資產報酬 $A_i(t)$ 可以表示為：

$$A_i(t) \sim CSN_{1,2}(\mu_A, \Sigma_A, D_A, \nu_A, \Delta_A)$$

其中

$$\mu_{A_i} = \pm(\sqrt{\rho_i} + \sqrt{1-\rho_i})\sqrt{\sigma_1^2-1}, \Sigma_A = \sigma_1^2$$

$$D_{A_i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\rho_i} \sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)} \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{\pi - (\pi - 2) \sigma_1^2}} \\ \frac{\sqrt{1 - \rho_i} \sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)} \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{\pi - (\pi - 2) \sigma_1^2}} \end{bmatrix}, & \text{if } D > 0 \\ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{\rho_i} \sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)} \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{\pi - (\pi - 2) \sigma_1^2}} \\ -\frac{\sqrt{1 - \rho_i} \sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)} \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{\pi - (\pi - 2) \sigma_1^2}} \end{bmatrix}, & \text{if } D < 0 \end{cases}$$

$$v_{A_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_{A_i} = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 + \frac{\pi(\sigma_1^2 - 1)\sigma_2^2\sqrt{1 - \rho_i}}{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2} & -\frac{\pi(\sigma_1^2 - 1)\sigma_2^2\sqrt{\rho_i}\sqrt{1 - \rho_i}}{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2} \\ -\frac{\pi(\sigma_1^2 - 1)\sigma_2^2\sqrt{\rho_i}\sqrt{1 - \rho_i}}{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2} & \sigma_2^2 + \frac{\pi(\sigma_1^2 - 1)\sigma_2^2\rho_i}{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2} \end{bmatrix}$$

從總資產報酬 $A_i(t)$ 分配可以發現， μ_A 與 D_A 會有四種可能的參數組合，我們將這些可能的參數組合在總資產報酬 $A_i(t)$ 之密度函數圖呈現，如圖 4.3。從圖中可以歸納當 μ_A 與 D_A 為同號(皆為正或負)時， $A_i(t)$ 會呈現右偏分配；而當 μ_A 與 D_A 為異號時(一正一負)， $A_i(t)$ 會呈現左偏分配，不過整體而言，分配之偏斜效果不大， $A_i(t)$ 之密度函數形式與標準常態分配相當類似。至於在最後的評價模型時，該選擇哪一種參數組合，以該組參數組合會得到最小的絕對誤差當作衡量指標，在透過實證分析後，發現 μ_A 為正與 D_A 為負為最適參數組合。

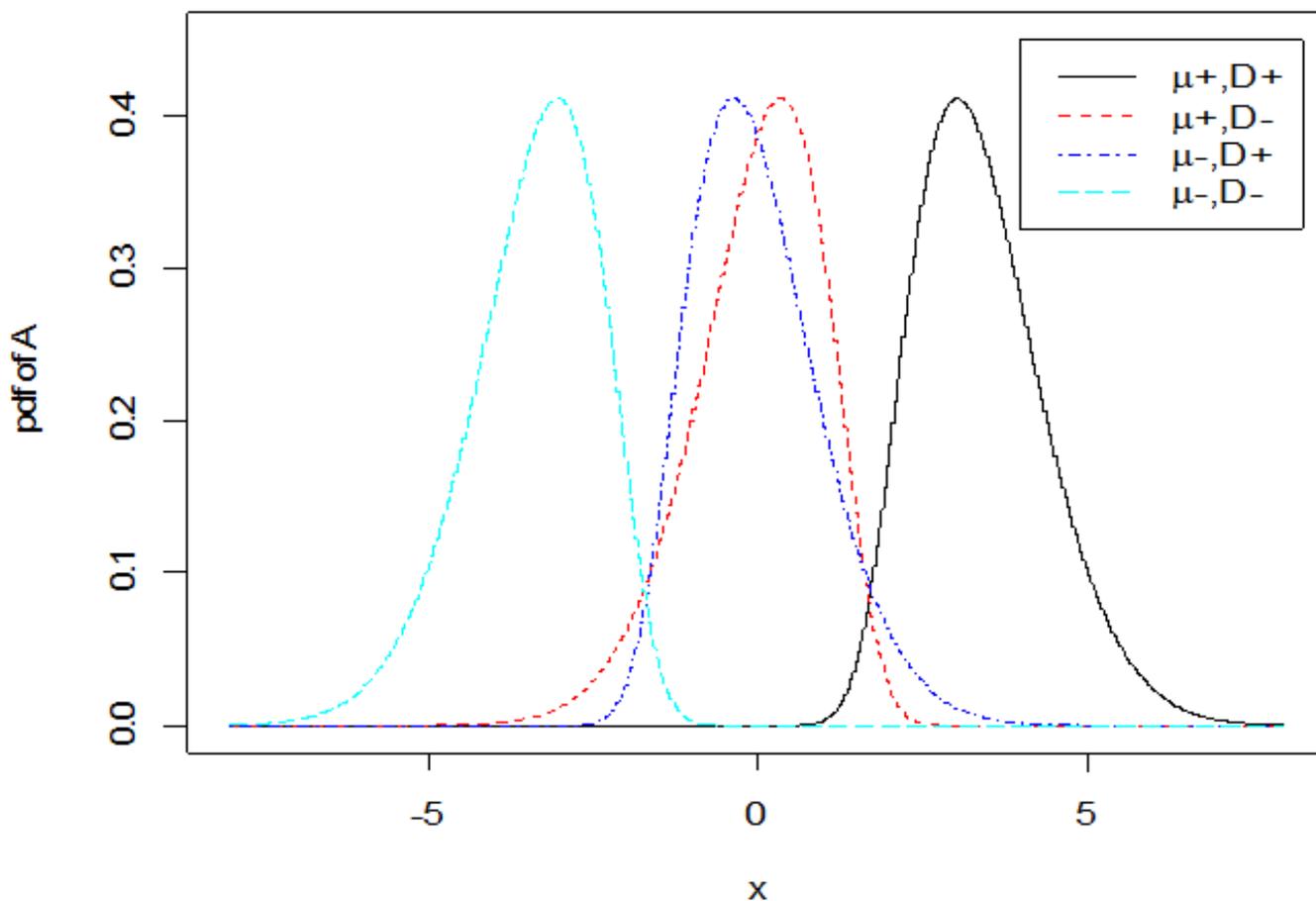


圖 4.1 四種不同參數組合之總資產報酬 $A_i(t)$ 密度函數圖，其中 $\rho=0.3$, $\sigma_1^2=2.5$

在單因子 CSN 關聯結構模型中，定義第 i 標的資產在時點 t 之前的違約機率為

$$q_i(t) = p_i(t_i < t) = p[A_i(t) \leq C_i(t)] = F_{1,2(\mu_A, \Sigma_A, D_A, \nu_A, \Delta_A)}(C_i(t))$$

其中 $F_{p,q(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)}(\bullet)$ 表示為 $CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$ 之分配函數，假定各個資產的違約

時間為指數分配下，則能夠得到違約門檻值 $C_i(t)$ 為

$$C_i(t) = F_{1,2(\mu_A, \Sigma_A, D_A, \nu_A, \Delta_A)}^{-1}(q_i(t))$$

給定 LHP 的假設下，所有標的資產會擁有相同的違約門檻值 $C_i(t)$ ，以及相

同的本金與復原率，而且，資產之間的相关係數會是相同的 ($\rho_i = \rho$)。

則我們就能找到給定共同的因子 $M(t)$ 下，第 i 個標的資產報酬會小於違約門檻值

$C_i(t)$ 的條件違約機率為：

$$\begin{aligned} p_i(t|M) &= p_i(A_i(t) \leq C(t) | M) = p_i\left(X_i(t) \leq \frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}} \middle| M\right) \\ &= F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned}$$

假設標的資產復原率為 0，則發生 k 個標的資產違約之違約機率為

$$K|N \sim \text{Binomial}\left(N, F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)$$

接下來如同前面(3.10)~(3.12)的步驟，再由 Vasicek(2002)所提出的 Large portfolio limit approximation 推導出資產組合損失分配：

$$F_\infty(t, x) = 1 - F_{1,1(\mu_M, \Sigma_M, D_M, \nu_M, \Delta_M)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (4.2)$$

其中 $x \leftarrow [0, 1]$ 。

為了計算 $K_1 \sim K_2$ 的期望分券損失，我們將(3.7)式改寫成

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF_\infty(x; t) + (1 - F_\infty(t, K_2)) \quad (4.3)$$

計算此積分必須要先求得資產組合的損失密度函數，對(4.2)式微分可得到：

$$f_\infty(t, x) = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \frac{f_{1,1(\mu_M, \Sigma_M, D_M, \nu_M, \Delta_M)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}\right)}{f_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}\left(F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(x)\right)} \quad (4.4)$$

(4.3)式左半部分的積分可以寫成以下的形式

$$\frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \quad (4.5)$$

在此，若將(4.4)式中的 $f_{\infty}(x; t)$ 代入到(4.5)式，會發現整個式子變成相當繁複，無法藉由直接計算取得積分結果。解決方法與單因子 NIG 關聯結構相同，我們可以藉由變數變換的方式來避免此情形：

$$y = F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(x)$$

則

$$dy = \frac{dx}{f_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}(F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(x))}$$

所以最後就能計算

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \sqrt{\frac{1 - \rho}{\rho}} \int_{F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(K_1)}^{F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}^{-1}(K_2)} (F_{1,1(\mu_x, \Sigma_x, D_x, \nu_x, \Delta_x)}(y) - K_1) \times f_{1,1(\mu_M, \Sigma_M, D_M, \nu_M, \Delta_M)} \left(\frac{C(t) - \sqrt{1 - \rho} y}{\sqrt{\rho}} \right) dy \end{aligned}$$

由於目前在 R 軟體中尚未有關 CSN 分配之套件，因此計算此積分所需要的 CSN 分配之密度函數、分配函數以及反函數，必須要以數值分析方法進行計算，這也連帶影響了整個評價過程時間，會是相當耗時。在下一節，將介紹單因子 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型。

第三節 單因子 CSN 與 NIG 混合分配之關聯結構模型

在 Kalemanova et al. (2007) 文獻中，我們已經知道單因子 NIG 關聯結構模型會在次順位分券獲得較好的評價結果，而邱熾燁(2007)所介紹的單因子 CSN 關聯結構模型，則是在高順位分券上評價較為準確。因此，我們希望如同 Dezhong (2006) 的混合分配方法，給定期望值為零及變異數為一之 NIG 及 CSN 分配，將兩者混合成新的分配 w ，而混合分配 w 可以表示如下：

$$w = \begin{cases} NIG\left(\alpha, \beta, -\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right), & \text{機率 } p \\ CSN_{1,1}\left(\sqrt{\sigma_1^2 - 1}, \sigma_1^2, -\frac{\sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)}\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2}}, 0, \sigma_2^2\right), & \text{機率 } 1-p \end{cases} \quad (4.6)$$

其中 p 為混合分配 w 含有 NIG 分配的樣本比例 ($0 < p < 1$)， $1-p$ 則為 CSN 分配的樣本比例。依照(4.6)式，混合分配 w 之密度函數可以表示成：

$$\begin{aligned} f(w) &= p \cdot f_{NIG}\left(w, \alpha, \beta, -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right) + (1-p) \cdot f_{CSN1,1}\left(w, \sqrt{\sigma_1^2 - 1}, \sigma_1^2, -\frac{\sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)}\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2}}, 0, \sigma_2^2\right) \\ &= p \cdot \frac{\frac{\gamma^3}{\alpha} \exp\left(\frac{\gamma^4}{\alpha^2} + \beta\left(w + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}\right)\right)}{\pi \sqrt{\left(\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)^2 + \left(w + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\left(\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)^2 + \left(w + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2}\right) \\ &\quad + (1-p) \cdot 2\phi_1\left(\frac{w - \sqrt{\sigma_1^2 - 1}}{\sigma_1}\right) \left\{ 1 - \Phi_1\left[\frac{\sqrt{\pi(\sigma_1^2 - 1)}}{\sigma_1\sqrt{\pi - (\pi - 2)\sigma_1^2}}\left(w - \sqrt{\sigma_1^2 - 1}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

從(4.7)式可以發現，給定某一比例 p ，混合分配 w 會呈現一個三參數 $(\alpha, \beta, \sigma_1^2)$ 之分配，我們可以將混合分配 w 之密度函數定義為 $f_{mix(\alpha, \beta, \sigma_1^2)}(w)$ ，同樣的，其分配函數則定義為 $F_{mix(\alpha, \beta, \sigma_1^2)}(w)$ 。

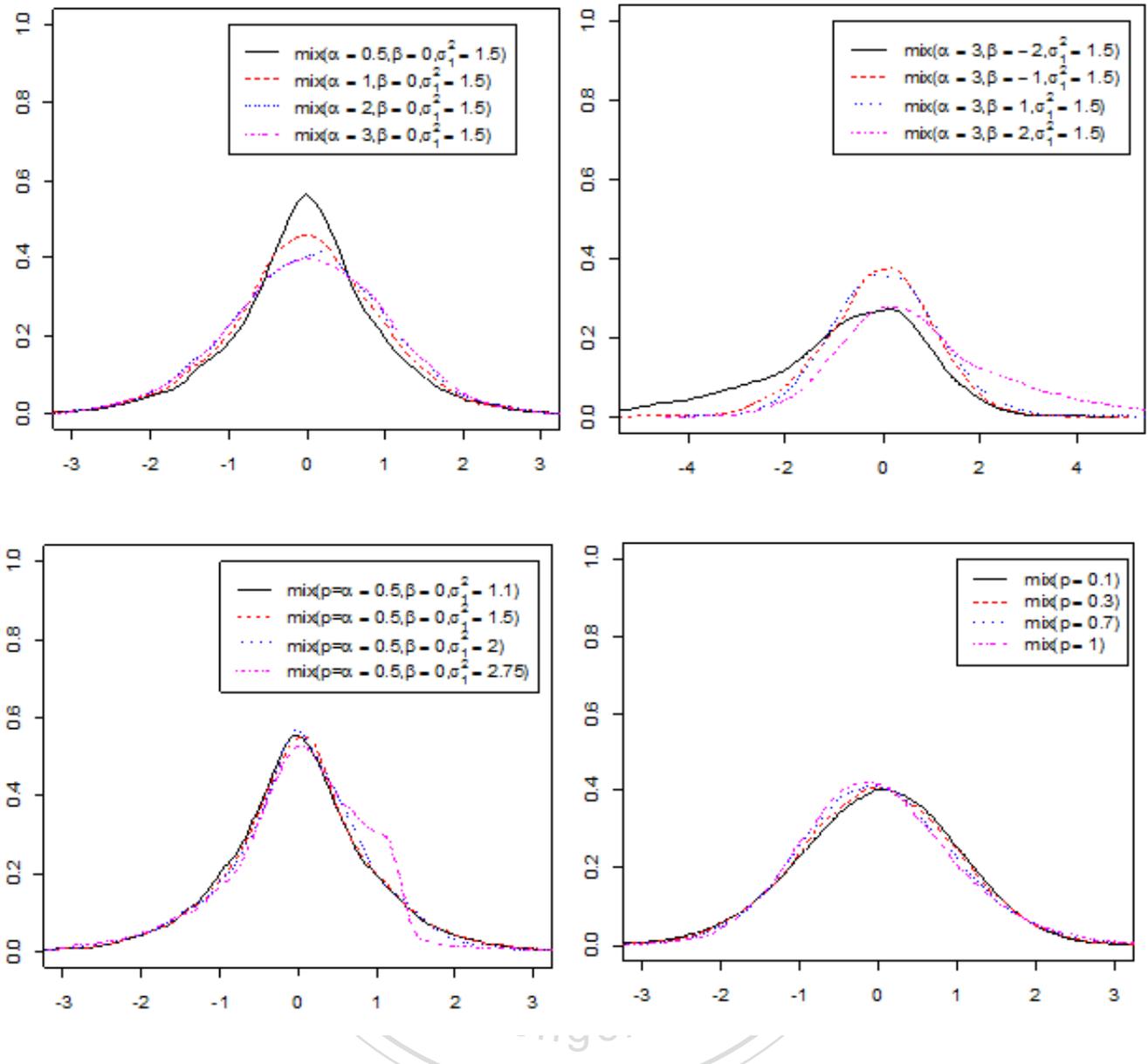


圖 4.2 各參數對於 MIX 分配之密度函數影響

從圖 4.2 各參數對於 MIX 分配之密度函數影響觀察各參數對於 MIX 分配之密度函數影響，固定比例 $P=0.5$ ，可以發現 NIG 分配的參數 α 及 β 會影響到 MIX 分配的厚尾度及偏斜性；而 CSN 分配的參數 σ_1^2 對於 MIX 分配的密度函數影響不大，但當 σ_1^2 接近於其最大值時(例:2.75)，會提高範圍在 0.5~1.5 之間的密度函數值；另外，改由固定參數 α 、 β 、 σ_1^2 ，去看 P 的影響，發現當比例 P 增加時，會使得 MIX 分配漸漸偏向右偏分配。

應用 LHP 假設之單因子 CSN 與 NIG 混合分配關聯結構模型之推導過程如

前面常態關聯結構模型一樣，令 M 及 X_i 為混合分配，將它們定義為

$$M(t) \sim \text{mix}(\alpha_M, \beta_M, \sigma_{1M}^2), X_i(t) \xrightarrow{iid} \text{mix}(\alpha_X, \beta_X, \sigma_{1X}^2), M(t) \perp X_i(t)$$

則第 i 個資產從契約開始到第 t 時間的總資產報酬 $A_i(t)$ 可以表示為：

$$A_i(t) = \sqrt{\rho_i}M + \sqrt{1-\rho_i}X_i \xrightarrow{iid} \text{mix}(\alpha_A, \beta_A, \sigma_{1A}^2) \quad (4.8)$$

其中 M 、 X_i 及 A_i 三因子，皆須以抽樣方式來形成各自的分配。首先，假定 M 及 X_i 各自有 n 個樣本數，兩者在給定相同的參數 $(\alpha, \beta, \sigma_1^2)$ 下，分兩群集進行抽樣，各自對 NIG 分配抽取 $n \cdot p$ 樣本數以及對 CSN 分配抽取 $n \cdot (1-p)$ 樣本數。同樣地， A_i 因子則是以 M 及 X_i 為抽樣母體，給定某一相關係數值 ρ_i ，進行 n 次抽樣，每一次抽取一個 M 樣本及 X_i 樣本，各自乘以某一比例(如(4.8)式)加總成為 A_i 樣本，故 A_i 也為一個 n 樣本數的抽樣分配。

定義第 i 標的資產在時點 t 之前的邊際違約機率為

$$q_i(t) = p_i(t_i < t) = p[A_i(t) \leq C_i(t)] = F_{\text{mix}(\alpha_A, \beta_A, \sigma_{1A}^2)}(C_i(t))$$

假定各個資產的違約時間為指數分配下，則能夠得到違約門檻值 $C_i(t)$ 為

$$C_i(t) = F_{\text{mix}(\alpha_A, \beta_A, \sigma_{1A}^2)}^{-1}(q_i(t)) \quad (4.9)$$

給定 LHP 的假設下，所有標的資產會擁有相同的違約門檻值 $C(t)$ ，以及相同的本金與復原率，而且，資產之間的相關係數會是相同的 $(\rho_i = \rho)$ 。則我們就

能找到給定共同的因子 $M(t)$ 下，第 i 個標的資產報酬會小於違約門檻值 $C(t)$ 的條件違約機率為

$$\begin{aligned} P(t_i \leq t | M) &= P(A_i(t) \leq C(t) | M) = P\left(X_i(t) \leq \frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}} | M\right) \\ &= F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned}$$

假設標的資產復原率為 0，則發生 k 個標的資產違約之違約機率為

$$k | N \sim \text{Binomial}\left(m, F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{\rho}M(t)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)$$

接下來如同前面(3.10)~(3.12)的步驟，再由 Vasicek(2002)所提出的 Large portfolio limit approximation 推導出資產組合損失分配：

$$F_\infty(t, x) = 1 - F_{\text{mix}(\alpha_M, \beta_M, \sigma_{1M}^2)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}F^{-1}_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}(x)}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (4.10)$$

其中 $x \leftarrow [0, 1]$ 。

為了計算 $K_1 \sim K_2$ 的期望分券損失，我們將(3.7)式改寫成

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF_\infty(x; t) + (1 - F_\infty(t, k_2)) \quad (4.11)$$

計算此積分必須要先求得資產組合的損失密度函數，對(4.9)式微分可得到：

$$f_\infty(t, x) = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \frac{f_{\text{mix}(\alpha_M, \beta_M, \sigma_{1M}^2)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}F^{-1}_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}(x)}{\sqrt{\rho}}\right)}{f_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}(F^{-1}_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}(x))} \quad (4.12)$$

(4.11)式左半部分的積分可以寫成以下的形式

$$\frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(x; t) dx \quad (4.13)$$

在此，若將(4.12)式中的 $f_{\infty}(x; t)$ 代入到(4.13)式，會發現整個式子變成相當繁複，無法藉由直接計算取得積分結果。解決方法與單因子 CSN 關聯結構相同，我們可以藉由變數變換的方式來避免此情形：

$$y = F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}^{-1}(x)$$

則

$$dy = \frac{dx}{f_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}\left(F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}^{-1}(x)\right)}$$

所以最後就能計算

$$\begin{aligned} & \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_{\infty}(t, x) dx \\ &= \int_{F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}^{-1}(K_1)}^{F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}^{-1}(K_2)} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} (F_{\text{mix}(\alpha_x, \beta_x, \sigma_{1x}^2)}(y) - K_1) \times f_{\text{mix}(\alpha_M, \beta_M, \sigma_{1M}^2)}\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-\rho}y}{\sqrt{\rho}}\right) dy \end{aligned}$$

本章節所介紹的混合分配，為藉由組合兩種分配所形成的分配，與 CSM 分配相同，R 軟體並不會出現有關此分配之套件，因此計算各分券信用價差所需要的混合分配之密度函數、分配函數以及反函數，必須要以數值分析方法進行計算。另外，由於混合分配並不具備如 NIG 分配及 CSN 分配之穩定摺積性質，在實際配適模型時，會耗費大量的計算時間。

第五章 實證分析：評價 DJ iTraxx

本章節選擇以五年為到期日之 DJ iTraxx Europe 信用違約交換指數為標的之合成型 CDO 分券進行實證分析，將要藉由 LHP 假設之單因子關聯結構模型去評價不同時期 DJ iTraxx Europe 並且會以 Gaussian、NIG、CSN、MIX 四種模型作數值比較分析。

DJ iTraxx Europe 包含 125 種相同權重比例之信用交換契約標的資產組合，以其為標的之合成型 CDO 分券為一個標準化契約，分券分成 0~3%、3%~6%、6%~9%、9%~12%及 12%~22%。各分券給予投資人的獲利方式，如第一章所描述，主要分為兩大類方式，第一類為在訂立契約期初時會先給予投資人一筆等同於市場報價的預付費用，並在每一期給予信用價差；第二類僅在每一期給予信用價差，以上給予投資人的金額會以本金面額百分比或 bp 為單位。本文挑選不同時期的 DJ iTraxx Europe series 來分析，分別為 series 5、series 9 及 series 15，並在這些 series 得到分券的市場報價日期是在 2006.4.12(series 5)、2009.3.31(series 9)、2010.3.31(series 9)及 2011.9.30(series 15)，其中各時期市場報價如表 5.1 所示。表 5.1 所呈現的數值意義解釋如下，若分券報價包含兩個數值，屬於第一類的方式，例：23.53%+500bp，23.53%為期初之預付費用，500bp 則為每年給予的信用價差金額，分成四期支付，也就是每三個月支付一次信用價差；若分券報價只有一個數值，屬於第二類的方式，例：62.75bp，62.75bp 則為每年給予的信用價差金額，分成四期支付，同樣每三個月支付一次信用價差。另外，仔細觀察可以發現當市場報價日期越接近現在，各分券給予投資人的獲利方式漸漸趨向第一類的方式。本文將以此四個不同商品進行分券價格評價(第一類評價預付費用，第二類評價信用價差)。

應用單因子模型評價合成型 CDO 分券需要的重要參數：平均 CDS 價差是由

訂立契約開始到發佈市場報價當日的每日的 CDS 指數平均計算得到，四個時期的平均 CDS 價差分別為 32bp、127.67bp、115.42bp 及 124.913bp；資產復原率(R)皆假定為固定的 40%；無風險利率(r)選發布分券市場報價當天的 Euro LIBOR 隔夜拆款利率⁴為基準利率。有了以上參數就能使用固定違約強度模型導出不同時點之邊際違約分配。此外，單因子關聯結構模型的參數估計方面，除了各資產間的相關係數 ρ 之外，還必須估計關聯結構所具有的參數像 NIG 分配的 α 及 β 、CSN 分配的 σ_1^2 與 MIX 分配的 α 、 β 、 σ_1^2 。各個關聯結構之參數估計藉由 Kalemanove et al. (2007) 所介紹之方法，也就是將絕對誤差(absolute errors)極小化來估計參數，其中絕對誤差是指由各個模型所產生的分券評價結果與實際市場報價之差異取絕對值再將其全部加總之和。

表 5.1 不同時期的 DJ iTraxx Europe 市場報價

DJ iTraxx Europe				
series	Series 5	Series 9		Series 15
分券	2006 年 4 月 12 日	2009 年 3 月 31 日	2010 年 3 月 31 日	2011 年 9 月 11 日
0-3%	23.53%+500bp	66.83%+500bp	27.03%+500bp	61.65%+500bp
3-6%	62.75bp	31.23%+500bp	-4.18bp+300bp	27.60%+500bp
6-9%	18bp	11.53%+500bp	-3.99bp+300bp	19.17%+300bp
9-12%	9.25bp	418.8bp	94.01bp+100bp	491.5bp+100bp
12-22%	3.75bp	155bp	37.13bp+100bp	243.17bp+100bp

⁴附錄一有列出隔夜拆款利率與三個月拆款利率的模型比較分析，發現不同的利率之配模效果差不多，因此無風險利率以隔夜拆款利率為主，利率資料來源 global-rate.com。

第一節 比較各模型在不同時期 DJ iTraxx 之分券評價

以下將進行不同時期之 DJ iTraxx 之分券評價，按照其發佈市場報價時間順序以逐一表列的方式進行分析評價並解釋各模型配適結果，其中各時期 DJ iTraxx 之分券市場報價及不同模型所產生的分券評價結果列在表 5.2、表 5.5、表 5.6 及表 5.7。各模型參數估計方面，Gaussian 模型僅須估計相關係數 ρ ；NIG(1) 模型限制參數 β 為零，由最小絕對誤差來估計參數 α 及 ρ ；NIG(2) 模型相較於 NIG(1) 模型，以同樣方法多估計參數 β ；CSN 模型可先估計參數 σ_1^2 使絕對誤差極小化，再去估計相關係數 ρ ；MIX 模型方面，會先設定參數 σ_1^2 與 CSN 模型的參數 σ_1^2 相同以減少參數估計數目，則須估計參數為 α 、 β 、相關係數 ρ 以及比例 p 。本文建議兩種 MIX 模型參數估計方式使其絕對誤差極小化：先固定 NIG(2) 參數 α 、 β ，再估計比例 p 及相關係數 ρ ；另一種方法，固定比例 p ，估計參數 α 、 β 及相關係數 ρ ，以兩種方法交互運作計算最適參數估計值使絕對誤差極小化。

表 5.2 中市場報價與 Kalemánov et al. (2007) 及 邱熾燁 (2007) 所評價資料相同，兩人評價結果列在表 5.3 及表 5.4。觀察表 5.2 結果，Gaussian 模型在 0-3% 分券得到完全配適結果，但在其他分券表現上，過度高估 3-6% 及 6-9% 分券與低估 9-12% 及 12-22% 分券。NIG 模型相較於 Gaussian 模型，在 3-6% 分券得到較佳的配適結果，但皆高估其他分券，並觀察發現 NIG(1) 與 NIG(2) 整體配模效果相近，顯示 NIG 模型之第二個參數 β 並沒有帶來改善的配模結果。CSN 模型與 Gaussian 模型結果相似，但其在 9-12% 及 12-22% 分券得到較佳的配適結果。NIG 模型與 CSN 模型結果與 Kalemánov et al. (2007) 及 邱熾燁 (2007) 類似。MIX 模型除了 0~3% 分券外，其餘四個分券評價結果相當接近市場報價，而整體的絕對誤差會介於 NIG(1) 與 CSN 之間，為了修正 MIX 模型，在此將其 0~3% 分券評價結果設定與 NIG(1) 模型的 0~3% 分券相同，從結果來看，修正後的 MIX* 模型之絕

對誤差大幅度減少，獲得了極佳的配適效果。

觀察表 5.5 結果，Gaussian 模型與 NIG(1)模型的配模結果類似，對於 0-3% 分券評價較為準確，而在其他分券上皆為評價低估的情形。NIG(2)模型相較於前面兩者，3%-6%分券評價結果與市場報價完全一致，同時在 6%-9%及 9%-12%分券評價結果也提升了不少，整體的絕對誤差和為前面兩者的三分之一倍。CSN 模型在 0-3%及 12%-22%分券評價較為準確外，其他分券評價結果比前面三者更為低估，且其絕對誤差會大於 Gaussian 模型。MIX 模型各分券評價結果會介於 NIG(2)與 CSN 之間，整體評價結果與 NIG(1)接近，但在 0-3%分券方面並沒有像前面四個模型準確，與前面修正方法相同，將 MIX 模型之 0~3%分券評價結果設定與 NIG(2)模型之 0~3%分券相同，修正後的 MIX*模型，其絕對誤差減少了約 140bp，但整體配適效果並沒有比 NIG(2)模型較佳。

觀察表 5.6 結果，Gaussian 模型僅在 0-3%分券評價較為準確外，其餘分券與市場報價是有相當大的差異，表示此模型完全無法反應分券市場報價為負的現象。NIG(1)與 NIG(2) 則能改善 Gaussian 的缺點，能夠得到負值的分券評價結果並在 0%~3%及 3%~6%之分券評價較為準確，整體的絕對誤差和為 Gaussian 的四分之一倍。CSN 模型與 Gaussian 模型結果類似，僅在 0-3%分券較為準確，其餘分券結果與市場報價差異大，且其絕對誤差會大於 Gaussian 模型。MIX 各分券評價結果會介於 NIG(2)與 CSN 之間，但在 0-3%評價方面並沒有像前面四個模型準確，與前面修正方法相同，將 MIX 模型之 0~3%分券評價結果設定與 NIG(2)模型之 0~3%分券相同，修正後的 MIX*模型，其絕對誤差減少了約 200 bp，但整體配適效果並沒有比 NIG 模型較佳。此外，從表 5.6 還觀察到各模型資產間的違約相關性程度相當高(大於 60%)，由時間點上判斷很有可能受到歐債危機影響。

觀察表 5.7 結果，Gaussian 模型與 NIG(1)模型的配模結果類似，對於 0-3%

及 12-22%分券評價較為準確，在 3-6%及 6-9%分券評價結果皆為低估。NIG(2)模型相較於前面兩者，3%-6%分券評價結果相當接近市場報價，同時在 6%-9%分券評價結果也提升了不少，在整體的絕對誤差和的表現方面降低了約 400bp (等於 NIG(1)模型的四分之一倍)。CSN 模型除了在 0-3%分券評價較為準確外，其餘分券評價結果與市場報價有相當大的差距，唯一改善僅在於 9-12%分券評價表現會比前面三者降低了約 100~200bp，且其絕對誤差會大於 Gaussian 模型。MIX 各分券評價結果會介於 NIG(2)與 CSN 之間，0-3%分券評價方面並沒有像前面四個模型準確，與前面修正方法相同，將 MIX 模型之 0~3%分券評價結果設定與 NIG(2)模型之 0~3%分券相同，修正後的 MIX*模型，其絕對誤差減少了約 400bp，整體配適效果仍然沒有比 NIG(2)模型較佳。同時，此五個模型擁有共同的問題，它們皆過度地高估 9-12%分券。

表 5.2 2006 年 4 月 12 日之市場報價及不同模型配適結果

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX	MIX*
0-3%	23.53%(500bp)	23.53%	23.53%	23.53%	23.54%	23.99%	23.53%
3-6%	62.75 bp	135.22 bp	62.53 bp	62.73 bp	120.57 bp	64.35 bp	67.39 bp
6-9%	18 bp	28.02 bp	27.36 bp	27.42 bp	31.75 bp	20.40 bp	18.71 bp
9-12%	9.25 bp	6.81 bp	17.02 bp	17.05 bp	10.77 bp	10.92 bp	8.23 bp
12-22%	3.75 bp	0.72 bp	9.18 bp	9.19 bp	2.05 bp	6.06 bp	3.52 bp
絕對誤差		87.95 bp	22.68 bp	22.68 bp	75.81 bp	54.27 bp	6.61 bp
ρ		0.1578	0.1571	0.1575	0.1943	0.1923	0.1629
α			0.5040	0.4957		0.2171	0.5322
β			0	0.0212		0	0
σ_1^2					2.7519	2.7519	2.7519
p						0.5	0.5

表 5.3 邱熾燁(2007)評價結果

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX(p=0.5)
0%-3%	23.53%(500bp)	23.53%	23.53%	23.53%	23.53%	23.53%
3%-6%	62.75 bp	135.22 bp	62.75 bp	62.75 bp	120.31 bp	61.42 bp
6%-9%	18 bp	28.02 bp	27.40 bp	27.22 bp	31.61 bp	18.80 bp
9%-12%	9.25 bp	6.81 bp	17.02 bp	16.72 bp	10.70 bp	9.69 bp
12%-22%	3.75 bp	0.72 bp	9.17 bp	8.91 bp	2.03 bp	5.94 bp
絕對誤差		87.95 bp	22.60 bp	21.87 bp	74.34 bp	4.76 bp
ρ		0.1578	0.1571	0.1527	0.1939	0.2059
α			0.5047	0.7531		0.1045
β			0	-0.3001		0
σ_1^2					2.7519	2.7519

表 5.4 Kalemánov et al(2007)評價結果

分券	市場報價	Gaussian	t(4)-t(4)	t(3)-t(3)	NIG(1)	NIG(2)
0%-3%	23.53%(500bp)	23.53%	23.53%	23.53%	23.53%	23.53%
3%-6%	62.75 bp	140.46 bp	73.3 bp	53.88 bp	62.75 bp	62.75 bp
6%-9%	18 bp	29.91 bp	28.01 bp	23.94 bp	27.9 bp	27.76 bp
9%-12%	9.25 bp	7.41 bp	16.53 bp	15.96 bp	17.64 bp	17.42 bp
12%-22%	3.75 bp	0.8 bp	8.68 bp	9.94 bp	9.79 bp	9.6 bp
絕對誤差		94.71 bp	32.82 bp	27.82 bp	24.34 bp	23.77 bp
ρ		0.1572	0.1983	0.1801	0.1621	0.1594
α					0.4794	0.6020
β					0	-0.1605

表 5.5 2009 年 3 月 31 日之市場報價及不同模型配適結果

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX	MIX*
0-3%	66.83%(500bp)	66.89%	66.87%	66.82%	66.83%	68.30%	66.82%
3%-6%	31.23%(500bp)	27.55%	27.46%	31.23%	24.35%	28.87%	28.56%
6%-9%	11.53%(500bp)	6.71%	6.62%	9.13%	4.30%	7.17%	7.33%
9%-12%	418.8 bp	380.49 bp	379.41 bp	390.90 bp	358.55 bp	375.01 bp	377.49 bp
12%-22%	155 bp	139.12 bp	139.44 bp	116.91 bp	150.71 bp	126.08 bp	129 bp
絕對誤差		910.063 bp	926.84 bp	307.23 bp	1475.9 bp	891.38 bp	754.29 bp
ρ		0.2589	0.2601	0.2347	0.3047	0.2289	0.2289
α			10.0174	2.9963		2.9963	2.9963
β			0	1.4850		1.4850	1.4850
σ_1^2					1.767	1.767	1.767
p						0.6859	0.7140

表 5.6 2010 年 3 月 31 日之市場報價及不同模型配適結果

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX	MIX*
0-3%	27.03%(500bp)	26.98%	27.03%	27.04%	27.02%	29.46%	27.04%
3-6%	-4.18 bp(300bp)	1531.84 bp	-4.07 bp	-3.63 bp	1433.60 bp	44.99 bp	-52.56 bp
6-9%	-3.99 bp(300bp)	782.61bp	-347.92 bp	-358.45 bp	691.28 bp	-332.19 bp	-372.05 bp
9-12%	94.01 bp(100bp)	1215.93 bp	465.36 bp	447.43 bp	1146.84 bp	457.63 bp	389.54 bp
12-22%	37.13 bp(100bp)	633.83 bp	347.88 bp	324.05 bp	603.03 bp	315.16 bp	337.45 bp
絕對誤差		4045.99 bp	1026.52 bp	995.99 bp	3752.35bp	1262.22 bp	1013.3 bp
ρ		0.6451	0.7878	0.7920	0.6551	0.8000	0.8000
α			0.5017	1.0360		0.4500	0.2500
β			0	-0.5310		-0.1688	0.2383
σ_1^2					1.4824	1.4824	1.4824
p						0.8905235	0.632816

表 5.7 2011 年 9 月 11 日之市場報價及不同模型配適結果

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX	MIX*
0-3%	61.65%(500bp)	61.67%	61.67%	61.63%	61.65%	60.58%	61.63%
3-6%	27.60%(500bp)	24.15%	24.11%	27.66%	20.90%	24.18%	26.95%
6-9%	19.17%(300bp)	14.11%	14.07%	16.48%	11.68%	14.41%	14.42%
9-12%	491.5 bp(100bp)	1274.90 bp	1272.49 bp	1352.34 bp	1156.62 bp	1317.70 bp	1182.17 bp
12-22%	243.17 bp(100bp)	260.94 bp	261.24 bp	176.44 bp	295.45 bp	288.21 bp	135.18 bp
絕對誤差		1653.96bp	1660.02 bp	1204.5 bp	2135.96 bp	1797.31 bp	1338.62 bp
ρ		0.3018	0.3024	0.2758	0.3490	0.3005	0.2434
α			15.2841	2.9572		2.9572	2.9572
β			0	1.4886		1.4886	1.4886
σ_1^2					1.796	1.796	1.796
p						0.667538	0.5809181

第二節 觀察各模型在不同時期 DJ iTraxx 之隱含相關性

本文所使用的單因子關聯結構模型，是給定在 LHP 假設下，也就是假定 DJ iTraxx 中各資產具有相同的違約機率、復原率以及違約相關性，另外，在評價成型 CDO 分券價格時，假定各分券與市場的相關性皆為相同。然而，Hull and White (2004)實證上發現單因子常態關聯結構模型會造成中間層級分券的隱含相關性(implied compound correlation)較低，而低順位及優先順位層級的分券的隱含相關性高的情況，也就是所謂的相關性微笑曲線現象(correlation smile)，此現象違反了 LHP 假設。以上所提到的隱含相關，其計算方法為在給定單因子關聯結構模型下，固定其他模型參數，找到一個最適相關係數值能使得各分券(k1%~k2%)的估計價格要與分券對應的市場報價相等，此相關係數值即為分券的隱含相關。McGinty et al.(2004)提出了另一個計算隱含相關的方法：隱含基底相關(implied based correlation)，此方法著重在最先損失的分券(first loss tranches)之隱含相關性，以 DJ iTraxx 來說，就是觀察 0~3%、0~6%、0~9、0~12%及 0~22%分券，每一個

最先損失分券的隱含基底相關值必須透過 bootstrapping⁵過程來求取。隱含基底相關最大的優點在於它能夠產生一致性的隱含相關值，允許市場參與者能快速且穩定地決定非標準化分券的價格。接下來，將呈現各模型在不同時期 DJ iTraxx 之隱含相關以及隱含基底相關。

各模型在不同時期 DJ iTraxx 之各分券隱含相關結果在附錄三中的表 5 到表 8 呈現，而各表下面都有附各模型的隱含相關曲線。觀察此四個表格結果可以發現 Gaussian、NIG(1)、NIG(2)及 CSN 模型在各分券的隱含相關值會呈現較大幅度震盪，像是表 5 及表 8 的中間分券相關性較低的微笑曲線現象；表 6 則在 9%~12% 呈現較高相關性，其餘分券相關性皆低的近似反微笑曲線現象；表 7 則為隱含相關值震盪幅度最大，上下相關值差距最高將近 90%，其中最高相關值在 3%~6% 分券，最低相關值在 9%~12%，整體相關值呈現先上升後下降，再上升的情形。由以上結果來看，明顯地，各分券的隱含相關並不相同，這表示 Gaussian、NIG(1)、NIG(2)及 CSN 模型可能違反了 LHP 假設，相對而言，MIX⁶模型則不論在哪一時期的 DJ iTraxx，其隱含相關曲線會以較平坦的方式呈現。

各模型在不同時期 DJ iTraxx 之隱含基底相關結果在附錄四中的表 9 到表 12 呈現，而各表下面都有附各模型的隱含基底相關曲線。從此四個表格結果可以發現，具有常態性質的 Gaussian 及 CSN 模型明顯觀察到相關偏斜(correlation skew)現象，像是表 9、表 11、表 12，但在表 10 中，在 3%~12% 分券呈現相關偏斜幅度小，而其餘兩個分券偏斜幅度大的現象；NIG 模型在隱含基底相關表現上，相關曲線幾乎都是以緩慢上升呈現，但在表 12 中，觀察到 NIG 模型也會產生相關偏斜現象；相對而言，MIX 模型則不論在哪一時期的 DJ iTraxx，其隱含基底相關幾乎都以水平曲線方式呈現。

⁵ bootstrapping 過程在附錄二

⁶ 本文運用 MIX 模型去計算隱含相關與隱含基底相關時，皆是使用在實證分析中未修正的 MIX 模型的參數結果。

第六章 結論與建議

本研究應用各種單因子關聯結構模型評價不同時期之 DJ iTraxx 分券，探討各模型在不同商品型態的評價以及綜合各模型之比較分析。根據以上各章節研究內容以及實證分析之結果，提出本研究之結論，並對於評價合成型抵押擔保債券憑證等相關層面給予適當建議，期許能使此研究更為完善。

自 1992 年開始發行信用衍生性商品後，其市場交易量急遽成長，遂成為金融市場上很重要的商品。隨著市場的演變，金融機構所面臨的信用風險已從單一標的資產轉變為多標的資產的組合信用風險。對金融機構而言，如何控管組合信用風險儼然成為一項重要的議題，在這樣的時空背景下，給予了組合信用衍生性商品發展契機。以抵押擔保債券為主的信用衍生性商品發行量在 2000-2006 年間迅速成長，然而，由於此商品所帶來的龐大效益，也間接成為了 2007 年美國「次級房貸」風暴的導火線。此次事件也連帶影響到整個國際金融情勢，像是歐洲的「歐債危機」等等。由於這幾件國際重大經濟事件，對於全球的抵押擔保債券價格及發行量帶來了相當大的衝擊，也影響了抵押擔保債券之商品結構，開始產生大幅度的變化。本文發現自 2008 年起，商品內容開始出現變化，而以往評價合成型抵押擔保債券價格時，商品內容皆為同一種型式，因此本文將對 2008 年之後的不同商品型式之合成型抵押擔保債券價格評價。

在過往探討評價合成型抵押擔保債券之文獻中，由理論或實務上證實在進行商品評價時必須要考慮各資產之間的違約相關性因素，目前最廣為使用的方法為單因子關聯結構模型，此模型最早是由 O'Kane and Schlogl (2001) 所提出的應用 LHP 假設之單因子高斯關聯結構模型，其在執行各分券評價時，僅有在權益層級得到好的配適而已，此外，還會造成相關性微笑曲線等問題。由文獻顯示，單因子關聯結構模型若能帶有厚尾度或偏斜性能夠改善以上問題，且對於分券評價

時也會有較好的效果。Kalemanova et al. (2007) 提出應用 LHP 假設之單因子 NIG 關聯結構模型，其評價結果遠優於常態分配，但其高估了 6%~9% 以上的分券。邱熾燁 (2007) 使用 CSN 分配取代 NIG 分配作為擔保債權憑證分券的評價，但是與單因子常態關聯結構模型相同，CSN 分配的單因子關聯結構模型仍然無法估計的很準確，僅有在最高層級分券的評價上有明顯的改進。邱熾燁 (2007) 嘗試使用 NIG 及 CSN 複合分配之單因子關聯結構模型評價抵押擔保債權，而在實證分析中此模型得到極佳的評價結果。以上各學者皆是對 2008 年以前單一型式的抵押擔保債券評價。

而本文研究目的在於應用以上的單因子關聯結構模型對不同的商品型式的合成型抵押擔保債券進行評價，來看以上的模型是否能應用在新型的合成型抵押擔保債券以及綜合各模型之比較分析。本研究選擇了四個時期以 DJ iTraxx Europe 信用違約交換指數為標的之市場報價資料進行實證分析，各模型的參數估計是由絕對誤差極小化方法來計算。另外，也對各模型進行隱含相關性分析以驗證是否符合 LHP 假設。根據以上實證分析結果，提出了本研究結論如下：

隨著 DJ iTraxx 商品結構的改變，由實證分析結果顯示 NIG(2) 模型優於其他模型，更符合市場實際需求，特別是在 2009 及 2011 年，NIG(2) 模型除了維持原本在權益層級及次順位層級分券配適佳的優點外，並在中間順位層級分券得到極佳的配適效果。這也證明 NIG 分配的第二個參數 β 能夠帶來改善的評價效果，此項發現與 Kalemanova et al. (2007) 所結論是有所不同，主要原因在於所評價為不同商品結構的 DJ iTraxx。除此之外，當 DJ iTraxx 分券出現負的市場報價時 (2010 年)，NIG 模型具有能反應此市場現況的能力，而這年度的 NIG(1) 模型及 NIG(2) 模型配適結果相當。

MIX 模型評價效果僅次於 NIG(2) 模型，其結果並不如預期為最佳模型。在最早的 2006 年時，本文藉由將 MIX 模型修正再去評價分券獲得了極佳的配適結

果，以同樣修正方法再去評價不同商品結構之 DJ iTraxx，所得到的絕對誤差皆會大於 NIG(2)模型。仔細深入探討 MIX 模型之所以無法得到最佳的配適結果，原因很可能在於 CSN 模型評價結果差距過大，雖然在執行過程中，已將 MIX 模型組成調整以 NIG(2)模型為主(調整比例 p)，但仍舊無法顯著改善評價結果。雖然 MIX 模型結果不如預期，但是其為唯一一個符合 LHP 假設的模型，特別是在隱含相關分析裡，MIX 模型在各時期之分券隱含相關表現上，幾乎以水平曲線方式呈現，不像 Gaussian 模型、NIG 模型及 CSN 模型會呈現大幅度震盪，甚至出現相關性微笑曲線現象。另外，由於 MIX 模型包含 NIG(2)模型，因此其對於分券市場報價為負的情形，同樣具有反應此市場現況的能力。

CSN 模型原本擁有最高層級分券評價佳的優點(如 2006 年及 2009 年)，但隨著 DJ iTraxx 商品結構的改變，此模型對於市場價格的適應性漸漸逝去，也使得其絕對誤差值漸趨擴大(如 2010 年及 2011 年)，整體配適結果甚至還會次於 Gaussian 模型(如 2009 年及 2011 年)。由於本研究在應用 CSN 分配引入單因子關聯結構模型時，會先對 CSN 分配標準化的前置作業，而此步驟使得 CSN 分配僅剩下單一參數 σ_1^2 來控制分配之偏態及峰度，減低了調整分配的厚尾度及偏斜性的彈性，這也導致 CSN 模型無法適應不同時期的 DJ iTraxx 商品的原因。

Gaussian 模型評價結果與過去文獻相同，僅在權益層級分券得到極佳的配適結果，但隨著 DJ iTraxx 商品結構的改變，發現 Gaussian 模型會與 NIG(1)模型結果相當，其在次順位分券評價上得到改善(2009 年及 2011 年)，這也顯示 Gaussian 模型是具有適應不同市場價格的能力。然而，同樣具有常態性質的 Gaussian 模型與 CSN 模型，面對分券市場報價為負的現況，皆是完全沒有反應能力的。

觀察四個時期的各模型之相關係數值，可以得知資產間的違約相關性大部分會介於 15%到 30%之間，屬於低違約相關性，表示當一個資產發生違約會影響到另一個資產機率較低。但仔細觀察 2010 年結果，發現各模型的資產違約相關

性相當高，介於 60%到 80%之間，這也表示當一個資產發生違約會連帶影響到其他資產，進而產生資產違約的骨牌效應性。本文深入探討此結果，由發布市場報價時間點為 2010 年再加上本文所評價的 DJ iTraxx 是以歐洲為主要範圍的信用違約指數，推測可能受到當時「歐債危機」的影響，並且此年度的分券市場報價首度出現負值的情形。由以上發現，初步顯示「單因子關聯結構模型」具有反應真實資產違約或是市場現況的能力。

綜合以上分析結果，我們以得知對於新型的 DJ iTraxx 商品(2008 年之後)，單因子 NIG(2)關聯結構模型會是最佳的評價模型，而 MIX 模型以及 NIG(1)模型次之，最後為 Gaussian 模型與 CSN 模型。雖然 NIG(2)模型能夠在權益層級、次順位層級以及中間順位層級分券得到極佳的評價結果，但其會有違反 LHP 假設條件的可能性。因此，若想要改良 NIG(2)模型，使其能具有更佳的評價效果以及服從 LHP 假設條件。在此本文建議，以含有 NIG(2)分配之 MIX 模型為主要模型，再加入另一個能夠彈性調整偏態與峰態的分配，像是 NIG 分配與具有厚尾性質之 T 分配混合分配等等。如此一來，模型不但保有 NIG(2)模型原有的評價優點，或許也能改善優先層級以上分券的評價結果，更重要的是，模型也能服從 LHP 假設條件。

參考文獻

1. Amato, J.D. and Gyntelberg, J. (March 2005). *CDS Index Tranches and The Pricing of Credit Risk Correlations*. BIS Quarterly Review.
2. Andersen, L., and Sidenius, J. (2004 winter). "Extensions to the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings." *Journal of Credit Risk*, Vol. 1, pp. 29-71.
3. Arellano-Valle, R.B., Gómez, H.W. and Quintana, F. A. (2004). "A New Class of Skew-Normal Distributions." *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 33, pp.1465-1480.
4. Azzalini, A. (2005). "The Skew-normal Distribution and Related Multivariate Families." *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 32, pp.159-188.
5. Barndorff-Nielsen, O.E. (1997). "Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modeling." *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 24, pp.1-13.
6. Black, Fischer and John C. Cox, "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2, (May 1976), pp. 351-367
7. Burtschell, X., Gregory, J. and Laurent, L.-P. (April 2005). *A Comparative Analysis of CDO Pricing Models*. Working paper.
8. Dezhong, W. Rachev S.T., Fabozzi F.J. (October 2006). *Pricing Tranches of a CDO and a CDS Index: Recent Advances and Future Research*. Working paper.
9. Dezhong W., Rachev S.T., Fabozzi F.J. (November 2006). *Pricing of Credit Default Index Swap Tranches with One-Factor Heavy-Tailed Copula Models*. Working paper.
10. González-Farías, G., Domínguez-Molina, J.A. and Gupta, A.K. (2004). "Additive

- properties of skew normal random vectors.” *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 126, pp. 521-534.
11. González-Farías, G., Domínguez-Molina, J.A. and Gupta, A.K. (2004). “A multivariate skew normal distribution.” *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 89, pp.181-190.
 12. Hull, J. and White, A. (winter 2004) “Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS without Monte Carlo Simulation.” *The Journal of Derivatives*, Vol. 12, pp. 8-23.
 13. Garcia, J., Dwyspelaere, T., Leonard, L. Alderweireld, T. and Van Gestel, T. (January 2005). *Comparing BET and Copulas for Cash Flows CDO*. Working Paper.
 14. Garcia, J., Gielens, G., Leonard, L. and Van Gestel, T. (June 2003). *Pricing Baskets Using Gaussian Copula and BET Methodology: A Market Test*. Working Paper.
 15. Kalemanove, A., Schmid, B., and Werner, R. (spring 2007). “The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic CDO pricing.” *The Journal of Derivatives*, Vol. 14, pp. 80-93.
 16. Karlis, D. and Papadimitriou, A. (2004). *Inference for the Multivariate Normal Inverse Gaussian Model*. Working paper.
 17. Karlis. D. (2000). An EM type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal – inverse Gaussian distribution. *Statistic & Probability Letters* , 57, 43-52.
 18. Li, D.X. (April 2000). *On Default Correlation: A Copula Function Approach*. Working Paper.
 19. Lüscher, A. (December 2005). *Synthetic CDO Pricing Using the Double Normal Inverse Gaussian Copula with Stochastic Factor Loadings*. Master’s thesis in

Zürich University.

20. McGinty, L., Ahluwaila, R., Watts, M. and Beinstein, E. (2004). *Introducing Base Correlation*. JP Morgan Credit Derivatives Strategy.
21. McGinty, L., Ahluwaila, R., Watts, M. and Beinstein, E. (2004a). *Credit Correlation: A Guide*.a JP Morgan Credit Derivatives Strategy.
22. Merton, R. C (1974) . On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, 29, pp. 449-470.
23. McGinty, L., R. Ahluwalia, M. Watts, and E. Beinstein (2004). *Introducing Base Correlation*. JP Morgan Credit Derivatives Strategy.
24. Nelsen, R.B. (2005). *An Introduction to Copulas*. Springer. Second Edition.
25. D. O’Kane and L. Schloegl., M. (2001). *Modeling Credit: Theory and Practice*. Quantitative Credit Research, Lehman Brothers.
26. D. O’Kane and L. Schloegl., M. (2004). *Base Correlation Explained*. Quantitative Credit Research, Lehman Brothers.
27. O.E. Barndor®-Nielsen. (1978). Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian. Journal of statistics*, 5, 151-157.
28. O.E. Barndor®-Nielsen. (1997.) Normal Inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of statistics*, 24, 1-13.
29. Willemann, S. (2004). *An Evaluation of the Base Correlation Framework for Synthetic CDOs*. Working Paper.
30. Torresetti, R., Brigo, D., Pallavicini, A. (November 2006). *Implied correlation in CDO tranches: a Paradigm to be handled with care*. Working Paper.
31. Vasicek, O. (2002). “Loan Portfolio Value.” *Risk*, Vol. 12, pp. 160-162.
32. 陳松男 (民 98)。固定收益證券與衍生產品。台北市：新陸書局。
33. 邱熾燁 (民 97)。探討單因子複合分配關聯結構模型之擔保債權憑證之評價。國立政治大學統計學系碩士論文，台北市。

附錄一

表 1 2006 年 4 月 12 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	23.53%(500bp)	23.53%	23.53%	23.53%	23.54%	23.99%
3-6%	62.75 bp	135.22 bp	62.53 bp	62.73 bp	120.57 bp	64.35 bp
6-9%	18 bp	28.02 bp	27.36 bp	27.42 bp	31.75 bp	20.40 bp
9-12%	9.25 bp	6.81 bp	17.02 bp	17.05 bp	10.77 bp	10.92 bp
12-22%	3.75 bp	0.72 bp	9.18 bp	9.19 bp	2.05 bp	6.06 bp
絕對誤差		87.95 bp	22.68 bp	22.68 bp	75.81 bp	54.27 bp
ρ		0.1578	0.1571	0.1575	0.1943	0.1923
α			0.5040	0.4957		0.2171
β			0	0.0212		0
σ_1^2					2.7519	2.7519
p						0.5

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	23.53%(500bp)	23.53%	23.53%	23.53%	23.53%	23.39%
3-6%	62.75 bp	134.78 bp	62.74 bp	64.07 bp	119.95 bp	78.15 bp
6-9%	18 bp	27.80 bp	27.33 bp	27.50 bp	31.44 bp	25.43 bp
9-12%	9.25 bp	6.73 bp	16.94 bp	16.79 bp	10.62 bp	12.50 bp
12-22%	3.75 bp	0.71 bp	9.10 bp	8.85 bp	2.01 bp	5.96 bp
絕對誤差		87.38 bp	22.67 bp	22.5 bp	73.94 bp	42.57 bp
ρ		0.1573	0.1563	0.1534	0.1935	0.2122
α			0.5060	0.6301		0.2877
β			0	-0.1466		0
σ_1^2					2.7519	2.7519
p						0.5

表 2 2009 年 3 月 31 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	66.83%(500bp)	66.89%	66.87%	66.82%	66.83%	68.30%
3%-6%	31.23%(500bp)	27.55%	27.46%	31.23%	24.35%	28.87%
6%-9%	11.53%(500bp)	6.71%	6.62%	9.13%	4.30%	7.17%
9%-12%	418.8 bp	380.49 bp	379.41 bp	390.90 bp	358.55 bp	375.01 bp
12%-22%	155 bp	139.12 bp	139.44 bp	116.91 bp	150.71 bp	126.08 bp
絕對誤差		910.063 bp	926.84 bp	307.23 bp	1475.9 bp	891.38 bp
ρ		0.2589	0.2601	0.2347	0.3047	0.2289
α			10.0174	2.9963		2.9963
β			0	1.4850		1.4850
σ_1^2					1.767	1.767
p						0.6859

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	66.83%(500bp)	66.88%	66.86%	66.82%	66.83%	66.14%
3%-6%	31.23%(500bp)	27.52%	27.48%	31.23%	24.38%	29.55%
6%-9%	11.53%(500bp)	6.65%	6.61%	9.08%	4.30%	8.00%
9%-12%	418.8 bp	378.96 bp	378.55 bp	389.02 bp	357.87 bp	385.40 bp
12%-22%	155 bp	137.71 bp	137.93 bp	115.07 bp	149.54 bp	123.40 bp
絕對誤差		920.95 bp	927.64 bp	315.44bp	1473.97 bp	654.04 bp
ρ		0.2568	0.2575	0.2325	0.3021	0.2146
α			15.0000	2.9962		2.9962
β			0	1.4948		1.4948
σ_1^2					1.7601	1.7601
p						0.905316

表 3 2010 年 3 月 31 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	27.03%(500bp)	26.98%	27.03%	27.04%	27.02%	29.46%
3-6%	-4.18 bp(300bp)	1531.84 bp	-4.07 bp	-3.63 bp	1433.60 bp	44.99 bp
6-9%	-3.99 bp(300bp)	782.61bp	-347.92 bp	-358.45 bp	691.28 bp	-332.19 bp
9-12%	94.01 bp(100bp)	1215.93 bp	465.36 bp	447.43 bp	1146.84 bp	457.63 bp
12-22%	37.13 bp(100bp)	633.83 bp	347.88 bp	324.05 bp	603.03 bp	315.16 bp
絕對誤差		4045.99 bp	1026.52 bp	995.99 bp	3752.35bp	1262.22 bp
ρ		0.6451	0.7878	0.7920	0.6551	0.8000
α			0.5017	1.0360		0.4500
β			0	-0.5310		-0.1688
σ_1^2					1.4824	1.4824
p						0.8905235

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	27.03%(500bp)	26.98%	27.04%	27.04%	27.02%	23.70%
3-6%	-4.18 bp(300bp)	1527.13 bp	-3.63bp	-3.75 bp	1429.778	272.07 bp
6-9%	-3.99 bp(300bp)	779.31bp	-346.06 bp	-356.42bp	689.03 bp	-157.97 bp
9-12%	94.01 bp(100bp)	1207.31bo	460.99 bp	443.62 bp	1139.27 bp	571.70 bp
12-22%	37.13 bp(100bp)	627.45 bp	344.22 bp	321.25 bp	597.56 bp	387.45 bp
絕對誤差		4023.44 bp	1017.21 bp	987.21 bp	3733.51 bp	1365.14 bp
ρ		0.6435	0.7865	0.7907	0.6537	0.8014
α			0.4999	1.0074		0.3039
β			0	-0.5056		0.0036
σ_1^2					1.4824	1.4824
p						0.7074874

表 4 2011 年 9 月 11 日隔夜拆款利率(上)與三個月拆款利率(下)的模型比較分析

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	61.65%(500bp)	61.67%	61.67%	61.63%	61.65%	60.58%
3-6%	27.60%(500bp)	24.15%	24.11%	27.66%	20.90%	24.18%
6-9%	19.17%(300bp)	14.11%	14.07%	16.48%	11.68%	14.41%
9-12%	491.5 bp(100bp)	1274.90 bp	1272.49 bp	1352.34 bp	1156.62 bp	1317.70 bp
12-22%	243.17 bp(100bp)	260.94 bp	261.24 bp	176.44 bp	295.45 bp	288.21 bp
絕對誤差		1653.96bp	1660.02 bp	1204.5 bp	2135.96	1797.305bp
ρ		0.3018	0.3024	0.2758	0.3490	0.3005
α			15.2841	2.9572		2.9572
β			0	1.4886		1.4886
σ_1^2					1.796	1.796
p						0.667538

分券	市場報價	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	MIX
0-3%	61.65%(500bp)	61.75%	61.67%	61.65%	61.65%	63.12%
3-6%	27.60%(500bp)	24.16%	24.03%	27.60%	20.90%	25.65%
6-9%	19.17%(300bp)	14.03%	13.93%	16.35%	11.64%	15.22%
9-12%	491.5 bp(100bp)	1261.25 bp	1256.92 bp	1336.75 bp	1147.79 bp	1331.32 bp
12-22%	243.17 bp(100bp)	251.20 bp	253.74 bp	168.15 bp	289.55 bp	243.75 bp
絕對誤差		1645.43bp	1658.71 bp	1201.91 bp	2125.49 bp	1576.92 bp
ρ		0.2988	0.3008	0.2736	0.3468	0.2742
α			10.0913	2.9768		2.9768
β			0	1.4940		1.4940
σ_1^2					1.7958	1.7958
p						0.701465

附錄二

在計算 0~K%的隱含基底相關之前，先定義 k1~k2%分券的現值為：

$$\begin{aligned}
 & PV_{tranch}(K_1, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1, K_2}) \\
 & = \text{protection leg} - \text{premium leg} \\
 & = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot (S_{K_1, K_2}) \cdot [1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i)] B(t_0, t_i) - \sum_{i=1}^n [EL_{(K_1, K_2)}(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}(t_{i-1})] B(t_0, t_i) \quad (1) \\
 & = mq + \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot (S_{K_1, K_2}) \cdot [1 - EL_{(K_1, K_2)}(t_i)] B(t_0, t_i) - \sum_{i=1}^n [EL_{(K_1, K_2)}(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}(t_{i-1})] B(t_0, t_i) \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中

(1)式為分券不包含期初的預付費用 (2)式為分券包含期初的預付費用

k1~k2%期望分券損失可以表示為

$$\begin{aligned}
 EL_{(K_1, K_2)}(t) & = \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF(x; t) - \int_{K_2}^1 (x - K_2) dF(x; t) \right) \\
 & = \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_0^{K_2} (x - K_2) dF(x; t) - \int_0^{K_1} (x - K_1) dF(x; t) \right) \\
 & = \frac{E_{\rho_{K_1, K_2}}^{LHP} [\text{Min}(L(t), K_2)] - E_{\rho_{K_1, K_2}}^{LHP} [\text{Min}(L(t), K_1)]}{K_2 - K_1}
 \end{aligned}$$

計算 0~K%的隱含基底相關需透過 bootstrapping 過程，過程如下：

步驟一：先求權益分券(0~K1%)的隱含基底相關 (=0~K1%的隱含相關)

$$\begin{aligned}
 0 & = PV_{tranch}(0, K_1, S_{0, K_1}, \rho_{K_1}) \\
 & = mq + \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot (S_{0, K_1}) \cdot [1 - EL_{(0, K_1)}(t_i)] B(t_0, t_i) - \sum_{i=1}^n [EL_{(0, K_1)}(t_i) - EL_{(0, K_1)}(t_{i-1})] B(t_0, t_i)
 \end{aligned}$$

其中

$$EL_{(0, K_1)}(t) = \frac{E_{\rho_{K_1}}^{LHP} [\text{Min}(L(t), K_1)]}{K_1}$$

步驟二：K1%~K2%的隱含基底相關

$$\begin{aligned}
0 &= PV_{tranch}(K_1, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1}, \rho_{K_2}) \\
&= PV_{tranch}(0, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_2}) - PV_{tranch}(0, K_1, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1})
\end{aligned}$$

先將 k1~k2%分券拆解成 0~k2%分券減去 0~k1%分券，要注意兩個分券的信用價差都要代 k1~k2%的市場報價。此式子又可寫成

$$\begin{aligned}
0 &= PV_{tranch}(K_1, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1}, \rho_{K_2}) \\
&= PV_{tranch}(0, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_2}) - PV_{tranch}(0, K_1, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot (S_{K_1, K_2}) \cdot [1 - EL_{(K_1, K_2)}^*(t_i)] B(t_0, t_i) - \sum_{i=1}^n [EL_{(K_1, K_2)}^*(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^*(t_{i-1})] B(t_0, t_i)
\end{aligned}$$

其中

$$EL_{(K_1, K_2)}^*(t) = \frac{E_{\rho_{K_2}}^{LHP} [Min(L(t), K_2)] - E_{\rho_{K_1}}^{LHP} [Min(L(t), K_1)]}{K_2 - K_1}$$

觀察期望損失 $EL_{(K_1, K_2)}^*(t)$ ，第二項的 ρ_{K_1} 是步驟一所算出來的值，因此第二項是已

知的固定值，變動項只有第一項的 ρ_{K_2} ，找出 ρ_{K_2} 能使分券現值等於 0 即為

k1~k2%分券的基底相關值。

步驟三：重複步驟二作法，找下一個 0~K%基底相關，找到最後一個基底相關為止。

註：若分券有包含預付費用，將 k1~k2%分券拆解成 0~k2%分券減去 0~k1%分券時，要注意兩個分券的信用價差及預付費用都要代 k1~k2%的市場報價，

而過程中預付費用 U_{K_1, K_2} 會被抵銷，因此式子就會變得如同步驟二相同。

附錄三

表 5 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之各分券隱含相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	15.78%	15.71%	15.74%	19.39%	20.45%
3-6%	7.79%	15.86%	15.75%	10.56%	21.22%
6-9%	13.00%	9.46%	9.49%	14.87%	20.37%
9-12%	17.34%	8.91%	8.95%	18.45%	20.23%
12-22%	22.93%	8.39%	8.44%	22.67%	18.45%

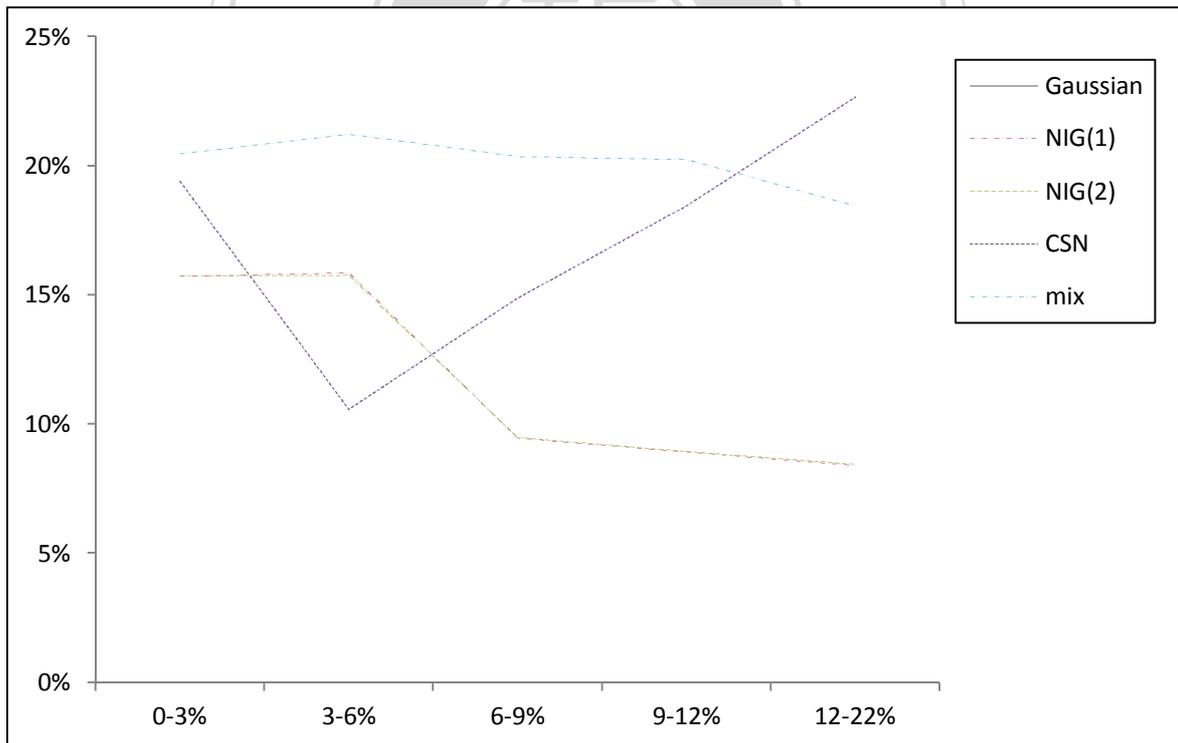


圖 1 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含相關曲線

表 6 不同模型在 在 2009 年 3 月 31 日之各分券隱含相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	25.94%	26.05%	23.46%	30.47%	30.84%
3-6%	20.34%	20.34%	23.47%	20.37%	29.91%
6-9%	21.19%	21.12%	20.74%	22.07%	30.00%
9-12%	39.86%	55.52%	67.27%	50.75%	29.76%
12-22%	28.83%	28.92%	29.32%	31.44%	30.47%

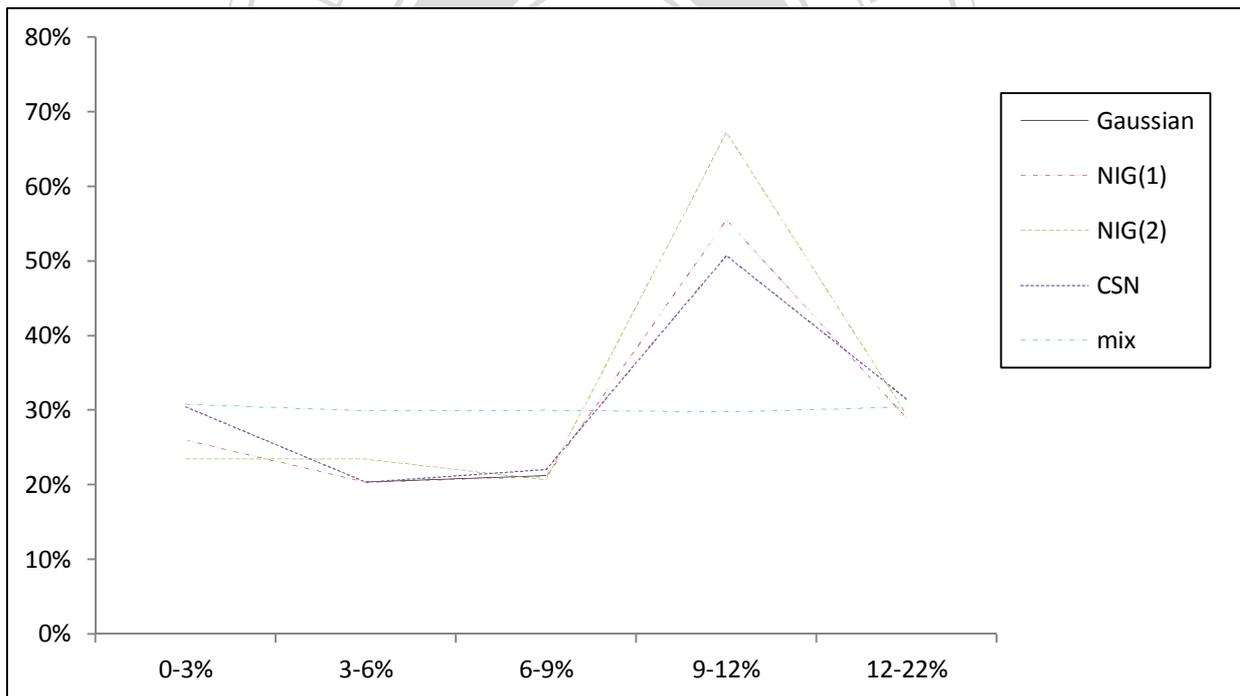


圖 2 不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含相關曲線

表 7 不同模型在 2010 年 3 月 31 日之各分券隱含相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	64.45%	78.78%	79.21%	65.50%	80.40%
3-6%	96.81%	78.78%	79.22%	96.51%	81.99%
6-9%	94.43%	31.62%	27.29%	25.18%	71.53%
9-12%	7.24%	12.48%	11.05%	7.75%	70.00%
12-22%	24.66%	34.91%	35.77%	25.47%	70.00%

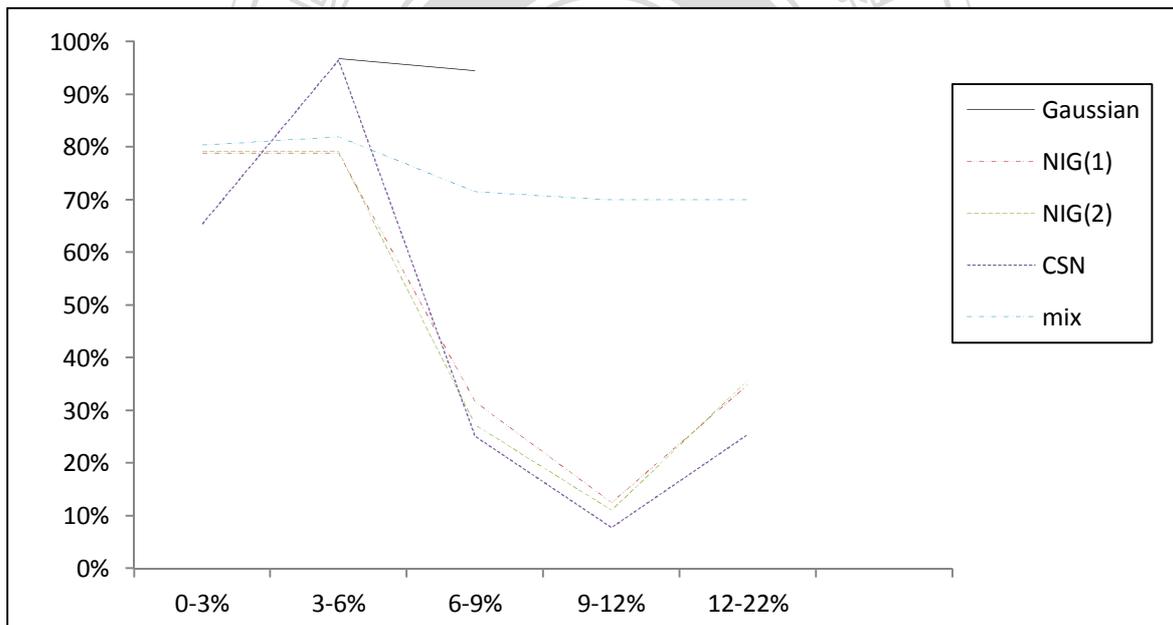


圖 3 不同模型在 2010 年 3 月 31 日之隱含相關曲線

表 8 不同模型在 2011 年 9 月 11 日之各分券隱含相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	30.20%	30.26%	27.56%	34.90%	27.95%
3-6%	24.18%	24.17%	27.68%	23.64%	27.75%
6-9%	21.56%	21.53%	21.05%	23.47%	25.76%
9-12%	9.43%	9.45%	10.03%	11.41%	20.73%
12-22%	29.41%	29.45%	29.91%	32.16%	27.63%

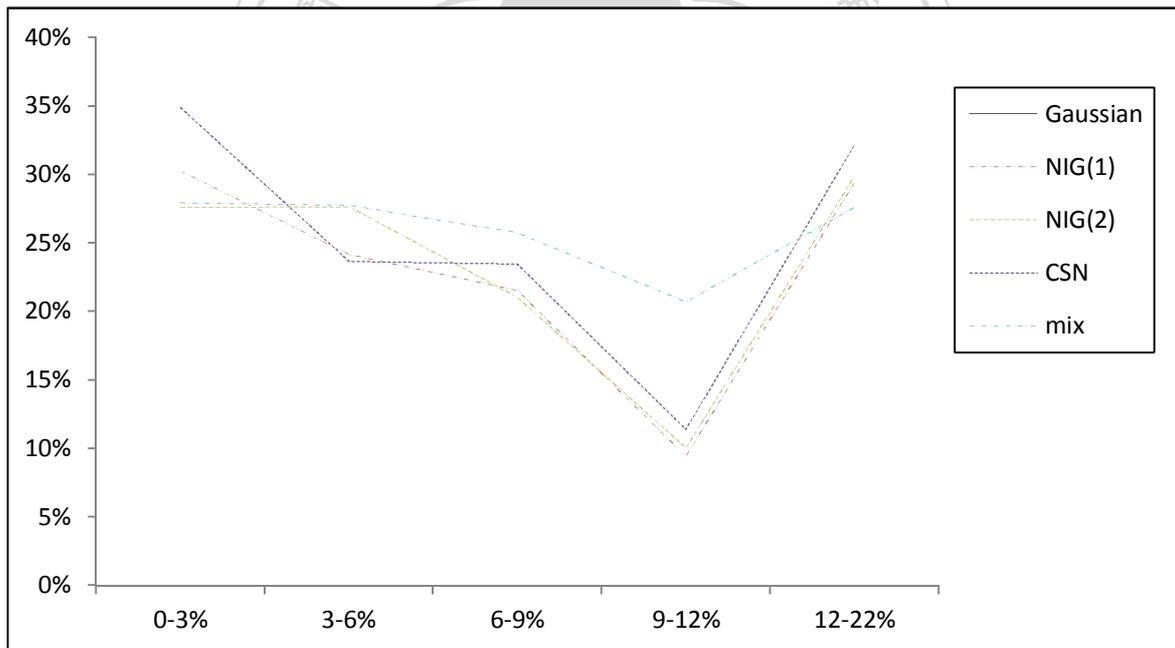


圖 4 不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含相關曲線

附錄四

表 9 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含基底相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	15.78%	15.71%	15.74%	19.39%	20.45%
3-6%	25.49%	15.70%	15.74%	27.00%	20.01%
6-9%	33.21%	17.01%	17.05%	32.66%	20.00%
9-12%	39.63%	18.45%	18.49%	37.34%	20.24%
12-22%	56.79%	24.16%	24.24%	48.78%	20.00%

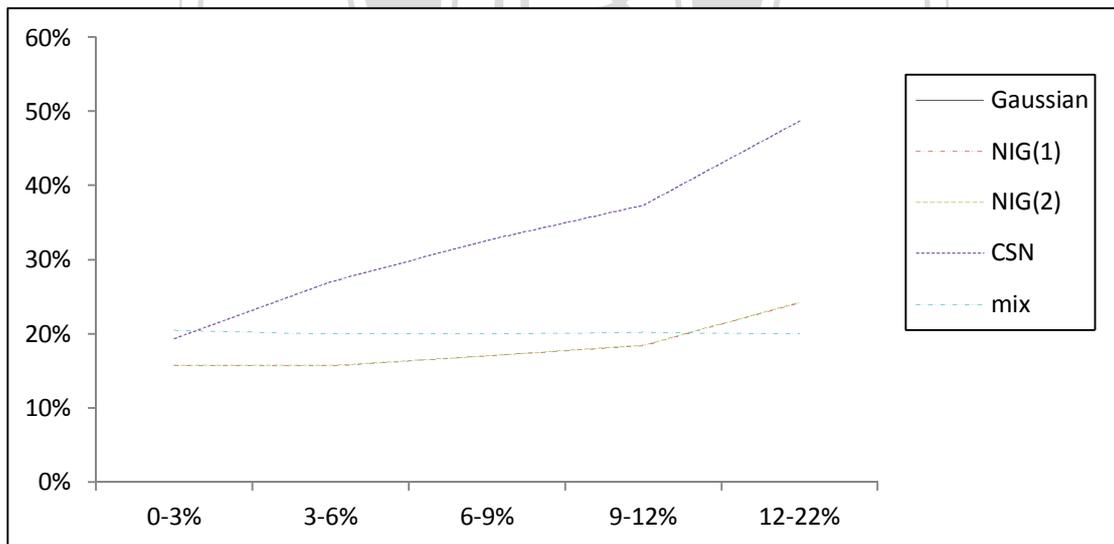


圖 5 不同模型在 2006 年 4 月 12 日之隱含基底相關曲線

表 10 不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含基底相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	25.94%	26.33%	23.73%	30.47%	30.84%
3-6%	44.02%	44.33%	42.99%	46.06%	30.00%
6-9%	47.11%	47.33%	46.96%	47.69%	30.15%
9-12%	47.26%	47.42%	47.91%	46.78%	30.00%
12-22%	57.72%	57.76%	59.49%	54.48%	35.42%

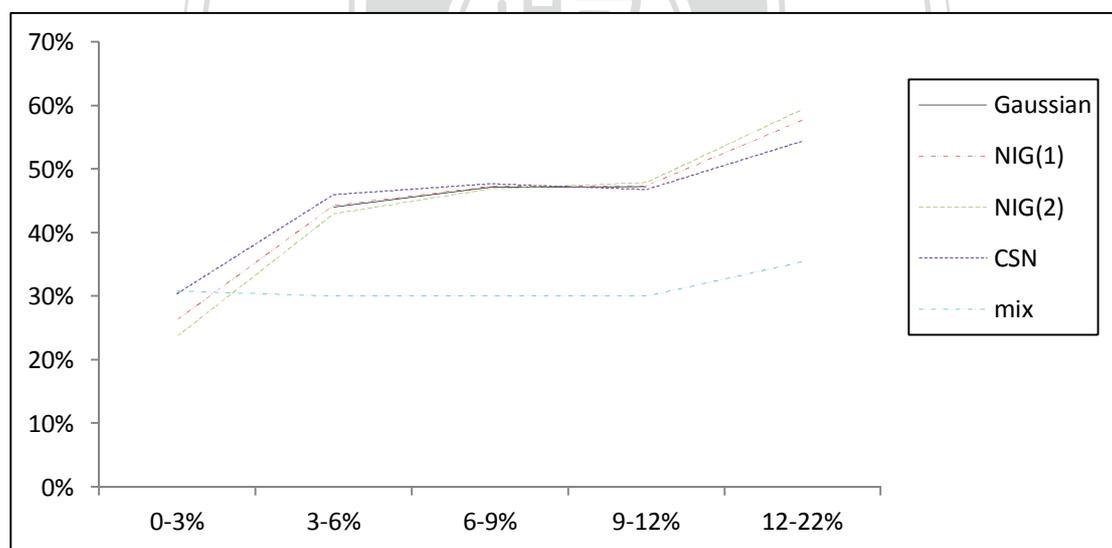


圖 6 不同模型在 2009 年 3 月 31 日之隱含基底相關曲線

表 11 不同模型在 2010 年 3 月 31 日隱含基底相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	64.45%	78.78%	79.21%	65.50%	80.40%
3-6%	76.61%	78.76%	79.19%	76.50%	78.08%
6-9%	80.09%	76.76%	77.14%	79.58%	78.00%
9-12%	86.36%	79.56%	79.83%	85.67%	80.00%
12-22%	95.66%	86.84%	86.67%	91.19%	81.09%

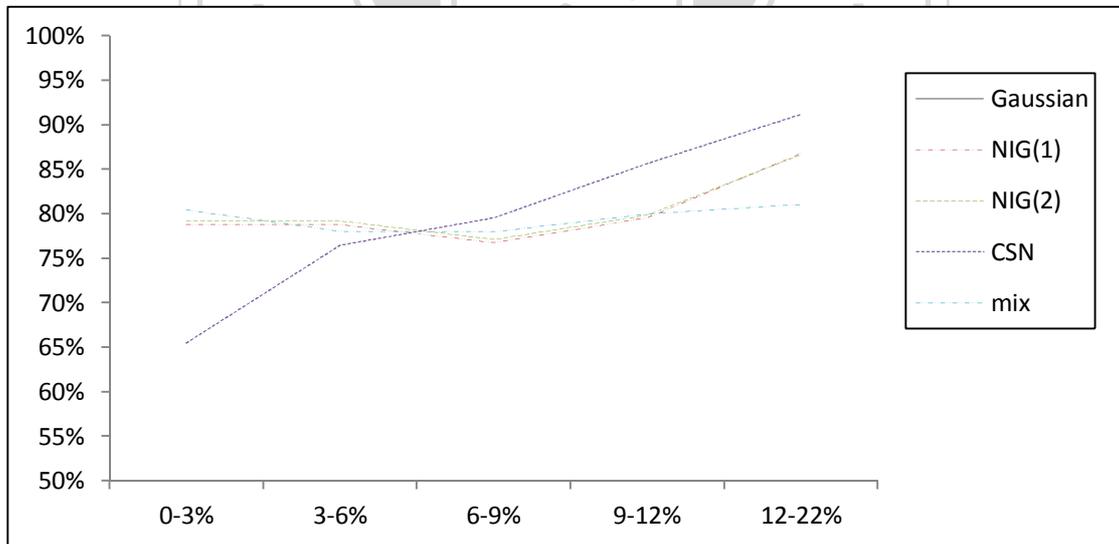


圖 7 不同模型在 2010 年 3 月 31 日之隱含基底相關曲線

表 12 不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含基底相關值

分券	Gaussian	NIG(1)	NIG(2)	CSN	mix
0-3%	30.20%	30.26%	27.56%	34.90%	27.95%
3-6%	46.70%	46.75%	45.37%	48.60%	27.98%
6-9%	55.19%	55.20%	54.37%	55.29%	27.80%
9-12%	64.84%	64.82%	64.00%	63.58%	28.83%
12-22%	81.24%	81.16%	80.28%	70.22%	30.00%

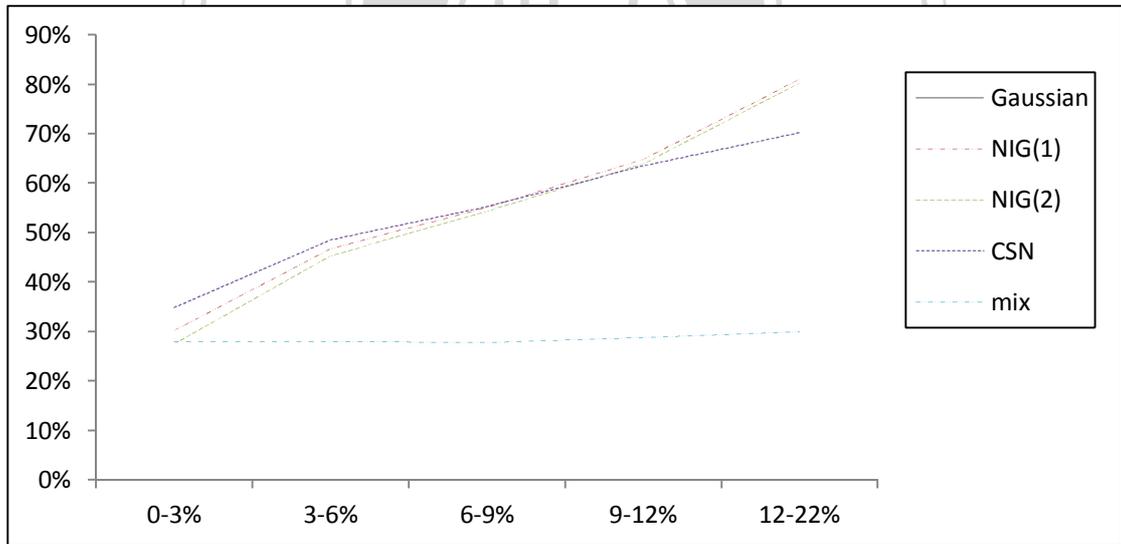


圖 8 不同模型在 2011 年 9 月 11 日之隱含基底相關曲線