行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

以比值矩陣法處理高維度中相容性問題
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 98-2118-M-004-001-
執 行 期 間 ：98 年 08 月 01 日至 99 年 07 月 31 日
執 行 單 位 ：國立政治大學應用數學學系

計 畫 主 持 人 ：宋傳欽

處 理 方 式 ：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 99 年 10 月 27 日

計畫名稱：以比值矩陣法處理高維度中相容性問題

首先對處理二維相容性問題的比值矩陣法做一回顧。給予條件分配$f_{X|Y}$與$f_{Y|X}$，相容性的議題包含了三個部分：

1. 是否可以找到(X,Y)的聯合分配以$f_{X|Y}$與$f_{Y|X}$爲其條件分配？

2. 當此聯合分配存在時，如何檢驗它是唯一的？

3. 若聯合分配非唯一時，如何找出所有的聯合分配？

Arnold and Press (1989) 提出了比值矩陣法的概念，並獲得了條件分配相容的充要條件。但在有限離散情況下，他們所提供檢驗相容性的重要定理是有瑕疵的，而且他們檢驗唯一性的方法在實際執行上也是有困難的。

Arnold , Castilo and Sarabia (2004) 對檢驗相容性提出了正確的結果，即$f_{X|Y}$與$f_{Y|X}$相容 A與B的比值矩陣 (ratio matrix) 有秩爲1的正擴張矩陣 (rank one positive extension matrix , 簡稱ROPE矩陣) ，其中A、B是分別對應於$f_{X|Y}$與$f_{Y|X}$的條件機率矩陣 (conditional matrix) 。然而在檢驗唯一性以及如何找出所有聯合分配的議題上並沒有任何新進展。

Song et al. (2010) 提出了不可約化區塊對角線矩陣 (irreducible block diagonal matrix , 簡稱IBD矩陣) 的概念。他們先將比值矩陣經由行、列交換後，轉變成IBD矩陣。在檢驗條件機率矩陣A與B是否相容時，只需檢查IBD矩陣對角線上的每一區塊是否有ROPE矩陣即可。在檢驗唯一性時，只需檢查IBD矩陣對角線上是否只有一個區塊即可。倘A與B相容，在求所有聯合分配時，只需針對每一區塊找出對應的唯一解 (因區塊本身是不可約化) 後，再將他們做適當的線性組合即可。

在將比值矩陣法從二維延伸至高維時，Arnold and Press (1989) 提出了三維中條件機率矩陣相容的充要條件。然而這是一個純理論的結果，在實際運用層面

上極爲困難與不可行，更不必說進一步去處理唯一性和求出所有可能聯合分配的問題。

在將比值矩陣法推展至高維度時，所遭遇到的主要難題是，如何定義高維度中的比值矩陣？又如何將許許多多的比值矩陣合併成一個能處理問題的大矩陣？在本計畫中，政大應用數學系統計研究群的伙伴們 (郭琨霖、姜志銘以及計畫主持人宋傳欽) 洞察了其中的奧秘，提出了高維度中比值矩陣的創新概念，並將這些高維度中的比值矩陣合併起來，得到所謂的擴大比值矩陣 (augmented ratio matrix) 。我們發現，在二維中處理條件分配相容性問題時，運用在比值矩陣上的手法或程序，完全適用在高維中的擴大比值矩陣上。在二維時，經由比值矩陣所獲得的定理結果，同樣可經由高維中的擴大比值矩陣而獲得。擴大比值矩陣法之所以能成功解決高維中條件分配相容性的所有議題，主要的關鍵就在本方法能將高維中之所有條件機率比值正確、適當的在平面上陳列。

執行本計畫時所獲致的成果已撰寫成論文並準備發表中。茲將部分內容整理如下：

Suppose that we have k (≥ 2) different proper subsets of N, say $a_1, \ldots, a_k$, and the following collections of nonnegative numbers:

$$B_m = \left\{ b_m(x,y) \geq 0 \,\middle|\, \sum_{x \in S_{a_m}} b_m(x,y) = 1 \text{ for each } y \in S_{\bar{a}_m} \right\},\ 1 \leq m \leq k.$$

Theorem 1. *B_m's, $1 \leq m \leq k$, are compatible if and only if the associated augmented ratio matrix $R^{[1;2,\ldots,k]}$ has a ROPE matrix.*

Theorem 2. *Suppose that $E = [e_{x,y}^{[1;m]}]$ is a ROPE matrix of $R^{[1;2,\ldots,k]}$, where $x \in S_{\bar{a}_m}$, $y \in S_{\bar{a}_1}$, and $2 \leq m \leq k$. Then, for $y \in S_{\bar{a}_1}$,*

(F1) $\pi_{\bar{a}_1}(y) = \left(\sum_{x \in S_{\bar{a}_m}} e_{x,y}^{[1;m]} \right)^{-1}$*, for arbitrary $2 \leq m \leq k$;*

(F2) $\pi_{\bar{a}_1}(y) = (k-1)\left(\sum_{m=2}^{k}\sum_{x\in S_{\bar{a}_m}} e_{x,y}^{[1;m]}\right)^{-1}$;

(F3) $\pi_{\bar{a}_1}(y) = \frac{1}{e_{x,y}^{[1;m]}}\left(\sum_{y^*\in S_{\bar{a}_1}} \frac{1}{e_{x,y^*}^{[1;m]}}\right)^{-1}$, *for* $2 \le m \le k$ *and arbitrary* $x \in S_{\bar{a}_m}$.

In addition, the associated joint distribution can be determined by $\pi_N(x \uplus y) = b_1(x,y)\pi_{\bar{a}_1}(y)$.

Lemma 3. *Let* $\mathrm{Diag}(T_1,\ldots,T_L)$, $L \ge 1$, *be any IBD matrix of an augmented ratio matrix* R. *Then*

(i) *R has a ROPE matrix if and only if each T_ℓ has a ROPE matrix;*

(ii) *If R has a ROPE matrix, then the ROPE matrix is unique if and only if $L = 1$.*

With Theorem 1 and Lemma 3(i), we have the following corollary.

Corollary 4. *Let* $\mathrm{Diag}(T_1,\ldots,T_L)$ *be any IBD matrix of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$. *Then the* B_m*'s are compatible if and only if each* T_ℓ *has a ROPE matrix.*

Theorem 5. *Let* $\mathfrak{E}$ *be the set of all ROPE matrices of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$, *and* $\mathfrak{F}$ *be the set of all associated joint distributions. Then there is a one-to-one correspondence between* $\mathfrak{E}$ *and* $\mathfrak{F}$.

Corollary 6. *Suppose that* $\mathrm{Diag}(T_1,\ldots,T_L)$, $L \ge 1$, *is an IBD matrix of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$. *Then the following statements are equivalent.*

(i) *The associated joint distribution is unique;*

(ii) *The ROPE matrix of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$ *is unique;*

(iii) $L = 1$ *and* T_1 *has a ROPE matrix.*

Theorem 7. *Suppose that* $\mathrm{Diag}(T_1, \ldots, T_L)$ *is an IBD matrix of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$ *and each* T_ℓ*, with size* $I_\ell \times J_\ell$*, has the ROPE matrix* $\widetilde{T}_\ell = [t_{ij}^{(\ell)}]$*. Assume that the column, labeled* y*, of* $R^{[1;2,\ldots,k]}$ *has been interchanged to the column covering the* j*-th column of, say* T_ℓ*. Then, all possible marginal distributions* $\pi_{\bar{a}_1}$*'s can be found by either*

(F4) $\pi_{\bar{a}_1}(y) = (k-1)p_\ell \left(\sum_{i=1}^{I_\ell} t_{ij}^{(\ell)} \right)^{-1}$

or

(F5) $\pi_{\bar{a}_1}(y) = \dfrac{p_\ell}{t_{ij}^{(\ell)}} \left(\sum_{j^*=1}^{J_\ell} \dfrac{1}{t_{ij^*}^{(\ell)}} \right)^{-1}$ *for arbitrary* $1 \le i \le I_\ell$*,*

where $y \in S_{\bar{a}_1}$ *and* $p_1 > 0, \ldots, p_L > 0$ *are arbitrary with* $p_1 + \cdots + p_L = 1$*. In addition, the associated joint distribution can be determined by* $\pi_N(x \uplus y) = b_1(x, y)\pi_{\bar{a}_1}(y)$*.*

參考書目

B.C. Arnold, E. Castillo, J.M. Sarabia, Conditionally specified distributions: An introduction (with discussions), Statist. Sci. 16 (2001) 249–274.

B.C. Arnold, E. Castillo, J.M. Sarabia, Compatibility of partial or complete conditional probability specifications, J. Statist. Plann. Inference 123 (2004) 133–159.

B.C. Arnold, S.J. Press, Compatible conditional distributions, J. Amer. Statist. Assoc. 84 (1989) 152–156.

E.H. Ip, Y.J. Wang, Canonical representation of conditionally specified multivariate discrete distributions, J. Mult. Anal. 100 (2009) 1282–1290.

P. Kopciuszewski, An extension of the factorization theorem to the non-positive case, J. Mult. Anal. 88 (2004) 118–130.

A.B. Slavkovic, S. Sullivant, The space of compatible full conditionals is a unimodular toric variety, J. Symbolic Comput. 41 (2006) 196–209.

C.-C. Song, L.-A. Li, C.-H. Chen, T.J. Jiang, K.-L. Kuo, Compatibility of finite discrete conditional distributions, Statist. Sinica 20 (2010) 423–440.

G. Tian, M. Tan, K.W. Ng, M. Tang, A unified method for checking compatibility and uniqueness for finite discrete conditional distributions, Comm. Statist. Theory Methods 38 (2009) 115–129.

無衍生研發成果推廣資料

98 年度專題研究計畫研究成果彙整表

計畫主持人：宋傳欽	計畫編號：98-2118-M-004-001-	
計畫名稱：以比值矩陣法處理高維度中相容性問題		

成果項目			量化			單位	備註（質化說明：如數個計畫共同成果、成果列為該期刊之封面故事...等）
			實際已達成數（被接受或已發表）	預期總達成數(含實際已達成數)	本計畫實際貢獻百分比		
國內	論文著作	期刊論文	0	0	0%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	0%		
		研討會論文	0	0	0%		
		專書	0	0	0%		
	專利	申請中件數	0	0	0%	件	
		已獲得件數	0	0	0%		
	技術移轉	件數	0	0	0%	件	
		權利金	0	0	0%	千元	
	參與計畫人力（本國籍）	碩士生	0	1	100%	人次	
		博士生	0	0	0%		
		博士後研究員	0	0	0%		
		專任助理	0	0	0%		
國外	論文著作	期刊論文	0	1	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	0%		
		研討會論文	0	0	0%		
		專書	0	0	0%	章/本	
	專利	申請中件數	0	0	0%	件	
		已獲得件數	0	0	0%		
	技術移轉	件數	0	0	0%	件	
		權利金	0	0	0%	千元	
	參與計畫人力（外國籍）	碩士生	0	0	0%	人次	
		博士生	0	0	0%		
		博士後研究員	0	0	0%		
		專任助理	0	0	0%		

其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)	無

	成果項目	量化	名稱或內容性質簡述
科教處計畫加填項目	測驗工具(含質性與量性)	0	
	課程/模組	0	
	電腦及網路系統或工具	0	
	教材	0	
	舉辦之活動/競賽	0	
	研討會/工作坊	0	
	電子報、網站	0	
	計畫成果推廣之參與（閱聽）人數	0	

國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

■達成目標

□未達成目標（請說明，以 100 字為限）

□實驗失敗

□因故實驗中斷

□其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文：□已發表 ■未發表之文稿 □撰寫中 □無

專利：□已獲得 □申請中 ■無

技轉：□已技轉 □洽談中 ■無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）

在本計劃中，我們徹底解決了高维度中完全條件分配相容性的議題，即相容性檢驗、唯一性檢驗以及求出所有可能的聯合分配等問題。與其它現有方法做比較，其他方法不是要用到很艱深的數學理論(如代數幾何)，要不然就是在使用上有某種的侷限，而且也無法同時處理前述相容性議題的三大主要內容。我們所獲致的擴大比值矩陣法，突破了比值矩陣法只適用於低维度的限制，在理論上是創新的，而且只需用到基礎的機率與線性代數知識。易懂、易學、在實際運用層面上又容易操作，是本方法最值得一提的地方。在本計劃中所獲致的成果，已撰寫成論文，並準備發表中。