經 濟 論 文
中央研究院經濟研究所
32 : 1 (2004), 149–199

匯率連動遠期生效亞洲選擇權

陳松男 *
國立政治大學金融學系

姜一銘
中華技術學院財務金融系

關鍵詞: 新奇選擇權、匯率連動、亞洲選擇權
JEL **分類代號**: G13

* 聯繫作者: 陳松男, 國立政治大學金融學系, 台北市 116 文山區指南路二段 64 號。 電話: (02) 2939-3091 分機 81016; 傳真: (02) 2939-8004; E-mail: slchen@nccu.edu.tw。作者感謝匿名評審及編輯委員提供的指正與寶貴的建議。惟文中仍若有任何錯誤, 當由作者負責。

摘　要

本文考慮針對投資人規避匯率風險與防止股票市場的可能受到人為操縱下, 提出幾種匯率連動之遠期生效亞洲選擇權(Quanto Forward-Start Asian Options), 同時雖然一般亞洲選擇權無封閉解, 本文嘗試提出一階及二階泰勒近似封閉解, 並計算避險參數。最後, 計算出評價理論公式的最大估計誤差上限, 並簡單舉例, 發現在波動度較小時, 一階及二階泰勒近似封閉解相差不大, 可以考慮使用公式簡單的一階泰勒近似封閉解; 反之, 在波動度較大時, 考慮二階泰勒近似封閉解的可靠度相當高。

1. 前言

觀察近年來, 台灣在邁向二十一世紀金融自由化與國際化過程中, 不斷地從資本市場發展完備的國家中, 引進新金融商品, 使得國內投資環境對外國投資人來說, 一方面進入障礙下降, 讓台灣能夠吸引更多世界各地投資人來投資, 從而提昇國家的產業發展; 另一方面, 新金融商品的多樣化的優點是可以使得外國投資人避險管道增加, 並降低在台灣投資的風險。

針對外國投資人來設計的新金融商品, 必須考量匯率風險。投資人對他國投資股票時, 除了關心外國股價風險外, 也關切匯率變動的風險。匯率連動選擇權可提供投資人同時對外國股價風險及匯率風險進行避險。此外, 尚有不少在國外上市交易的本國金融商品, 諸如: 在新加坡上市交易的日本 Nikke 指數; 指數期貨在加拿大多倫多交易的日本 Nikke 指數認購權證; 在美洲交易所(AMEX)上市的日本 Nikke 認購及認售權證; 台積電及聯電在美國上市的 ADR 等等, 這些金融商品的標的物都是在當地國交易, 但其衍生性商品卻在外國交易, 以外幣計價。因此, 這些匯率連動的選擇權評價更形重要。

另一方面, 為了防止商品受人為操縱或其他原因而產生不合理的價格, 新金融商品在設計時, 應針對投資人避險的考量, 採用平均價格作為交割計算的基礎, 可降低受人為操縱或非預期因素的不良效應。再者, 對外匯收入的避險, 採用平均匯率作為履約價可控制外匯收入不會低於某一水準, 匯率風險可因此降低。

一般亞洲選擇權(Asian options)或稱平均選擇權(average options)的履約價計算是以契約生效日起至到期日之間的標的價格的算術平均作為履約價。但遠期生效亞洲選擇權(Forward-Start Asian Options)的履約價是契約生效日後某一時點開始至到期日之間的標的價格的算術平均。

本文主要是延伸 Reiner(1992)和 Bouaziz, Briys, and Crouhy (1994; 以下簡稱 BBC (1994))的文章, 考慮針對外國投資人, 除了面臨股價以及規避人為操縱風險外, 並規避可能因為匯率風險所帶來的損失, 提出匯率連動之遠期生效(股票)亞洲選擇權。另一方面, 為考慮投資人對外匯收入的避險, 提

出股價連動之遠期生效(匯率)亞洲選擇權。

第 2 節首先介紹基本假設、模型建立以及風險中立評價法(Risk-Neutral Valuation), 至於所需利用到的 Girsanov 定理、機率測度轉換與應用在附錄中簡單說明。在第3 節我們考慮在固定匯率下的遠期生效(股票)亞洲選擇權評價及賣買權平價(The Put-Call Parity)關係。第 4 節考慮浮動匯率下的情況, 並且嘗試利用一價法則(The Law of One Price)來說明評價公式的推導。第 5 節則考慮浮動股價與匯率下(表示以本國貨幣計價之下外國資產)的遠期生效亞洲選擇權評價及賣買權平價關係。第 6 節考慮在浮動股價下的遠期生效亞洲(匯率)選擇權評價及賣買權平價關係。第 7 節為計算出近似理論評價公式與真實理論價格的最大誤差上限,[1] 並舉出一個例子來探討估計誤差的大小以及準確度。第8 節提出未來研究方向與建議。文章最後, 附錄 1 列出在評價時所需用到的一些公式與結果, 以簡化計算過程。附錄 2 及 3 為相對應於第 3 及 4 節的評價計算。 附錄 4 為計算近似理論評價公式的最大誤差上限。

2. 理論模型

2.1 基本假設和模型建立

⑴ 股價與匯率變動過程都符合幾何布朗運動(geometric Brownian motion)。
⑵ 股票交易連續進行, 且股票具有分割性。
⑶ 交易費用及稅不存在。
⑷ 可無限放空股票及充分利用得來的資金。
⑸ 無風險利率存在。
⑹ 標的股票在衍生性商品存續期間內, 不支付連續股票股利。

根據上述假設, 在風險中立機率測度(Risk-Neutral Probability Measure: Q)

[1] 我們知道一般情況下, 亞洲選擇權無封閉解(the closed-form solution), 詳細探討可參考 Conze and Viswanathan (1991), Kemna and Vorst (1990), Levy (1992) 以及 Turnbull and Wakeman (1991)。我們的理論評價封閉解為一逼近理論公式。

存在下, 以本國投資人觀點下的外國股價過程可由下列方程式表示 [2,3]

$$\frac{dS}{S} = (r_f - \rho\sigma_S\sigma_X)\,dt + \sigma_S dz_S^Q, \tag{1}$$

其中, S 表示外國標的股票的價格、r_f 表示外國的無風險利率、ρ 表示外國標的股票與匯率的相關係數、σ_S 表示外國標的股票的波動度（volatility）、σ_X 表示匯率的波動度以及 dz_S^Q 表示在風險中立下, 外國標的股票增量的標準布朗運動（increment of standard Brownian motion）。再者, 匯率變動過程可由下列方程式表示:[4]

$$\frac{dX}{X} = (r_d - r_f)\,dt + \sigma_X dw_X^Q, \tag{2}$$

其中, X 表示以本國貨幣計價的每一單位外幣(即每一單位外幣的本國價值)、r_d 表示本國的無風險利率、dw_X^Q 表示在風險中立下, 匯率增量的標準布朗運動。

另一方面, 在往後幾小節中我們必須使用, 以本國貨幣計價的外國資產隨機過程, 因此利用伊藤清引理 (Ito's lemma) 以及 (1) 式和 (2) 式可得:

$$\frac{d(XS)}{XS} = r_d dt + \sigma_S dz_S^Q + \sigma_X dw_X^Q. \tag{3}$$

2.2 風險中立評價法

本節說明在風險中立機率測度 Q 存在下, 如何使用風險中立評價法來評價選擇權理論價格。

假設一選擇權 C_t 的到期日 T 時的報酬 C_T 等於函數 $f(S_T, X_T, K_T)$, 其中 S_T 及 X_T 表示外國標的股票及匯率在到期日 T 時的價格、K_T 為標的股

[2] 若放寬假設條件 6 為支付連續股票股利 q 時, 僅需將方程式 (1) 中的 r_f 替換成 $r_f - q$ 即可。

[3] 對於股價過程與匯率變動過程, 在風險中立下可以表示成 (1) 及 (2) 式, 請參見 Musiela and Rutkowski (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, pp.160–164, Springer。

[4] 同註 3。

票到期日 T 時的履約價格。在時間 t $(0 \leq t < T)$, 選擇權的理論價格為:[5]

$$C_t = e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[C_T|F_t] = e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[f(S_T, X_T, K_T)|F_t]. \quad (4)$$

風險中立評價法以 (4) 式來說明: 時間 t 的選擇權理論價格 C_t 等於在風險中立機率測度 Q 以及訊息集合F_t 下, 未來到期日 T 時報酬的條件期望值, 然後以國內無風險利率 r_d 折現。

3. 固定匯率連動下遠期生效（股票）亞洲選擇權

3.1 理論評價

首先說明固定匯率連動下遠期生效(股票)亞洲選擇權, 令 $C_1(S_T, K_T, T)$ 表示到期時, 以國內貨幣計價的外國股票買權, 因此它的期末報酬為:

$$C_1(S_T, K_T, T) = \bar{X} \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0), \quad (5)$$

其中 $K_T = (\int_{T-h}^{T} S_u du)/h$ 表示選擇權的履約價格是以到期前一段時間 (h) 的股價平均來做計算, $\bar{X}$ 是選擇權契約開始就訂定的一固定匯率值。

這種買權是在到期時以預先訂定的匯率 $\bar{X}$ 將外國股價買權轉換成以本國貨幣計價的買權, 相當於投資人對於到期時害怕匯率變動太大, 而設計的一種新金融商品, 用於規避匯率風險。

定理 1 在上述的期末報酬下, 固定匯率連動下遠期生效(股票)亞洲選擇權的買權一階 (FO)、二階 (SO) 泰勒[6] 近似理論價格 $C_1^j(S_t, K_t, t)$ 為 $(j = \mathrm{FO}, \mathrm{SO})$:

---

[5] 這是最一般化的套利評價方法, 更詳細的說明請參見 Harrision and Krep (1979) 以及 Harrision and Pliska (1981) 的文章。

[6] 本文原先僅考慮一階泰勒近似理論價格, 感謝匿名審查人提供寶貴意見, 提出建議考慮二階泰勒逼近時, 在平價上會較具有可靠性, 但是因為考慮二階泰勒逼近時, 隨機變數的分配函數不易求出, 文獻上大都使用常態分配來逼近, 可參見 Tsao et al. (2003) 的文章有更詳細的討論。

$$\begin{cases} \bar{X}\cdot S_t e^{-r_d(T-t)} e^{(r_f-\rho\sigma_S\sigma_X)(T-t-h)} \left\{ \mu_1^j N\left(\frac{\mu_1^j}{v_1^j}\right) + v_1^j g\left(\frac{\mu_1^j}{v_1^j}\right) \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t < T-h < T \\ \bar{X}\cdot S_t e^{-r_d(T-t)} \left\{ m_{1T}^j N\left(\frac{m_{1T}^j}{\sigma_{1T}^j}\right) + \sigma_{1T}^j g\left(\frac{m_{1T}^j}{\sigma_{1T}^j}\right) \right\}, \quad T-h \le t < T, \end{cases} \tag{6}$$

其中的常數

$$\begin{aligned}
\mu_1^{FO} &= \frac{r_1 h}{2}, \\
\mu_1^{SO} &= \mu_1^{FO} + \frac{(r_1 h)^2}{3} + \frac{\sigma_S^2 h}{4}, \\
(v_1^{FO})^2 &= \frac{\sigma_S^2 h}{3}, \\
(v_1^{SO})^2 &= (v_1^{FO})^2 + \frac{\sigma_S^4 h^2}{4} + \frac{7(r_1^2\sigma_S^2 h^3)}{15} + \frac{3(r_1\sigma_S^2 h^2)}{4}, \\
r_1 &= r_f - \rho\sigma_S\sigma_X - \frac{\sigma_S^2}{2}, \\
m_{1T}^{FO} &= 1 - \frac{T-t}{h} + r_1\frac{2(T-t)h-(T-t)^2}{2h} - \frac{M_{1t}}{S_t}, \\
(\sigma_{1T}^{FO})^2 &= \left(1 - \frac{T-t}{h} + \frac{(T-t)^2}{3h^2}\right)\sigma_S^2(T-t), \\
M_{1t} &= \frac{\int_{T-h}^{t} S_u du}{h}, \\
m_{1T}^{SO} &= m_{1T}^{FO} + \frac{\sigma_S^2(T-t)}{2} + (T-t)^2\left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{\sigma_S^2}{4h}\right) - \frac{r_1^2(T-t)^3}{6h}, \\
(\sigma_1^{SO})^2 &= (\sigma_1^{FO})^2 + 2r_1^2\sigma_S^4\frac{(T-t)^5}{15h^2} + \sigma_S^2(T-t)^4\left(\frac{\sigma_S^2+5r_1}{12h^2} - \frac{2r_1^2}{3h}\right) \\
&\quad + \sigma_S^2(T-t)^3\left(r_1^2 - \left(5r_1 + \frac{\sigma_S^2}{3h}\right)\right) + \sigma_S^2(T-t)^2\left(2r_1 + \frac{\sigma_S^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

以及 $N(\mu_T/\sigma_T) = \int_{-\infty}^{\mu_T/\sigma_T} \exp(-W^2/2)dW/\sqrt{2\pi}$ 與 $g(\mu_T/\sigma_T) = \exp(-(\mu_T/\sigma_T)^2/2)/\sqrt{2\pi}$ 分別為標準常態分配在點 μ_T/σ_T 上的累積機率值與機率密度函數值。

證明: 請見附錄 2。

觀察 (6) 式, 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 買權的一階泰勒近似理論價格不僅與時間點 t 有關, 同時也與存續時間 $T-t$ 有關。這與 BBC(1994)的結果不同, 這是因為在考量固定匯率連動下, 對於發行券商或投資銀行而言, 必須承擔未來匯率變動的風險, 因此匯率的風險溢酬(貼水), 當然必須被包含在買權價格中, 而透過存續時間的長短來計算其大小。[7] 另一方面, 隨著外國標的股票的波動度 σ_S 增加, 權利金上升; 同時考量外國標的股票的波動度 σ_S、匯率波動度 σ_X 以及相關係數 ρ 大小的情況下, 當 $\rho > [r_f(T-t-h) - r_d(T-t)]/[\sigma_S\sigma_X(T-t-h)]$ 時(由 (6) 式計算), 隨著外國標的股票的波動度 σ_S 以及匯率波動度 σ_X 的上升, (6) 式所計算的權利金將下降, 在第 7 節的舉例數值中可以得到此結果。此外, 若不考慮匯率連動時($\bar{X}=1, \rho=0, \sigma_X=0, r_d=r_f$), 則一階泰勒近似理論價格立即縮減成為 BBC(1994)的遠期生效亞洲選擇權。

3.2 賣買權平價關係

正如一般選擇權, 遠期生效亞洲選擇權的買權及賣權也存有平價關係。在本小節中, 將推導並說明它的意義。首先, 考慮下列到期時現金流量恆等式:

$$\bar{X}(K_T - S_T) + \bar{X}(S_T - K_T)^+ = \bar{X}(K_T - S_T)^+. \tag{7}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 在風險中立下, (7) 式的現值恆等式為

$$\begin{aligned}
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[\bar{X}(K_T - S_T) + \bar{X}(S_T - K_T)^+ | F_t\right] \\
&\qquad = \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[\bar{X}(K_T - S_T)^+ | F_t]}_{P_1(S_T,\, K_T,\, t)}, \\
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[\bar{X}(K_T - S_T) | F_t] + \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[\bar{X}(S_T - K_T)^+ | F_t]}_{C_1(S_T,\, K_T,\, t)} \\
&\qquad = P_1(S_T, K_T, t),
\end{aligned} \tag{8}$$

移項整理可得[8]

[7] 如果考量的是浮動匯率連動的情況, 則結果與 BBC (1994) 相同, 請見第 4 節。

[8] 根據 (1) 式, $\mathrm{E}^Q[S_u|F_t] = S_t e^{r_1(u-t)}\mathrm{E}^Q[e^{\sigma_s(z_u^Q - z_t^Q)}|F_t] = S_t e^{(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)(u-t)}$。因此, 我們可進

$$
\begin{aligned}
&P_1(S_T, K_T, t) \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q[K_T|F_t] - e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q[S_T|F_t] \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\left[\frac{e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}-1}{\left(r_1+\dfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)h}S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h-t)}\right] \\
&\qquad\qquad -e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\left[S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}\right] \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\left[\frac{1-e^{-(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}}{\left(r_1+\dfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)h}-1\right]S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}, \text{(9a)}
\end{aligned}
$$

(9a) 式代表在尚未計算履約平均價格期間內固定匯率連動下遠期生效賣買權的平價關係。

情況 2: 當 $t \in [T-h, T]$ 時, 此時 (8) 式改寫為 [9]

一步計算:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^Q[K_t|F_t] &= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left[\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q[S_u|F_{T-h}]du|F_t\right] \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left[S_{T-h}\int_{T-h}^{T}e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(u-(T-h))}du|F_t\right] \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left[S_{T-h}\frac{e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}-1}{\left(r_1+\dfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)}|F_t\right] \\
&= \frac{e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}-1}{\left(r_1+\dfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)h}S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h-t)}.
\end{aligned}
$$

[9] 同註 8, 僅將積分下限 $T-h$ 改為 t。

$$
\begin{aligned}
P_1(S_T, K_T, t) &= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q\left[M_{1t} + \frac{1}{h}\int_t^T S_u du|F_t\right] \\
&\qquad - e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q[S_T|F_t] \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}M_{1t} + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q\left[\frac{1}{h}\int_t^T S_u du|F_t\right] \\
&\qquad - e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\mathrm{E}^Q[S_T|F_t] \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}M_{1t} + e^{-r_d(T-t)}\bar{X} \times \\
&\quad \left[\frac{e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)} - 1}{\left(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)(T-t)} S_t\right] - e^{-r_d(T-t)}\bar{X}\left[S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}\right] \\
&= C_1(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\bar{X}M_{1t} + e^{-r_d(T-t)}\bar{X} \times \\
&\qquad \left[\frac{1 - e^{-(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}}{\left(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)(T-t)} - 1\right] S_t e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}, \qquad \text{(9b)}
\end{aligned}
$$

(9b) 式代表在計算履約平均價格期間內固定匯率連動下遠期生效賣買權的平價關係。

在推導遠期生效亞洲選擇權賣買權平價關係過程中, 當在履約價計算時點 $t \in [0, T-h)$ 之前, 事實上是考慮在風險中立下, 履約價格的條件期望值。這與一般在固定已知履約價下的賣買權平價關係不同, 其理由是因為當時間點在 $t \in [0, T-h)$ 時, 未來履約價格無法事先預知(unpredictable), 因此根據外國股價符合平賭過程下, 在 $t \in [0, T-h)$ 時間點, 最佳的預測值就是履約價格的條件期望值; 但當在履約價計算時點 $t \in [T-h, T]$, 已實現的平均履約價格 M_{1t}, 就與固定已知履約價下的賣買權平價相同, 以國內無風險利率折現, 至於未實現部分如同前述。

4. 浮動匯率連動下的遠期生效 (股票) 亞洲選擇權

4.1 理論評價

首先說明浮動匯率連動下的遠期生效(股票)亞洲選擇權, 令 $C_2(S_T, K_T, T)$ 表示到期時, 以國內貨幣計價的外國股票買權, 因此它的期末報酬為:

$$C_2(S_T, K_T, T) = X_T \cdot \text{Max}(S_T - K_T, 0), \tag{10}$$

其中 $K_T = \left(\int_{T-h}^{T} S_u du\right)/h$ 表示選擇權的履約價格是以到期前一段時間 (h) 的股價平均來做計算, X_T 表示到期時, 以本國貨幣計價的每一單位外幣。

與第一種類型不同之處是, 這種選擇權是在到期時, 以外幣計算買權的價值, 而後再以當時的匯率轉換成本國貨幣值的買權。因此, 投資人重視外國股價風險, 但對匯率風險態度持平(投資人也許認為在買權有效期限內, 匯率應該是穩定, 或是變動不大, 或許外幣會升值)。

定理 2 在上述的期末報酬下, 浮動匯率連動下的遠期生效(股票)亞洲選擇權的買權一階、二階泰勒理論近似價格 $C_2^j(S_t, K_t, t)$ 為 $(j = \text{FO}, \text{SO})$:

$$\begin{cases} X_t \cdot S_t e^{-r_f h}\left\{\mu_2^j N\left(\dfrac{\mu_2^j}{v_2^j}\right) + v_2^j g\left(\dfrac{\mu_2^j}{v_2^j}\right)\right\}, & 0 \le t < T-h < T \\ X_t \cdot S_t e^{-r_f (T-t)}\left\{m_{2T}^j N\left(\dfrac{m_{2T}^j}{\sigma_{2T}^j}\right) + \sigma_{2T}^j g\left(\dfrac{m_{2T}^j}{\sigma_{2T}^j}\right)\right\}, & T-h \le t < T, \end{cases} \tag{11}$$

其中的常數

$$\mu_2^{FO} = \frac{r_2 h}{2},$$

$$r_2 = r_f - \frac{\sigma_S^2}{2},$$

$$\mu_2^{SO} = \mu_2^{FO} + \frac{(r_2 h)^2}{3} + \frac{\sigma_S^2 h}{4},$$

$$
\begin{aligned}
(v_2^{FO})^2 &= \frac{\sigma_S^2 h}{3},\\
(v_2^{SO})^2 &= (v_2^{FO})^2 + \frac{\sigma_S^4 h^2}{4} + \frac{7(r_2^2\sigma_S^2 h^3)}{15} + \frac{3(r_2\sigma_S^2 h^2)}{4},\\
(\sigma_{2T}^{FO})^2 &= (\sigma_{1T}^{FO})^2,\\
m_{2T}^{SO} &= m_{2T}^{FO} + \frac{\sigma_S^2(T-t)}{2} + (T-t)^2\left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{\sigma_S^2}{4h}\right) - \frac{r_2^2(T-t)^3}{6h},\\
(\sigma_{2T}^{SO})^2 &= (\sigma_{2T}^{FO})^2 + \frac{2r_2^2\sigma_S^4(T-t)^5}{15h^2} + \sigma_S^2(T-t)^4\left(\frac{\sigma_S^2+5r_2}{12h^2} - \frac{2r_2^2}{3h}\right)\\
&\quad + \sigma_S^2(T-t)^3\left(r_2^2 - \left(5r_2 + \frac{\sigma_S^2}{3h}\right)\right) + \sigma_S^2(T-t)^2\left(2r_2 + \frac{\sigma_S^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

與 $m_{2T}^{FO} = 1-(T-t)/h + r_2[2(T-t)h-(T-t)^2]/(2h) - M_{1t}/S_t$。

證明: 請見附錄 3。

觀察 (11) 式, 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 買權的一階泰勒理論近似價格與時間點 t 無關, 同時也與存續時間 $T-t$ 無關。這個結果與 BBC(1994)的結果相同。[10] 再者, 也可發現 (11) 式與匯率的波動度無關, 這是因為在浮動匯率連動下, 對於發行券商或投資銀行而言, 可視為投資者自行承擔因匯率變動產生的風險, 所以匯率的波動度大小, 不會影響選擇權價格。

另外一種可行的解釋是利用一價法則(The Law of One Price): 若以某一共同貨幣計價, 資產的價格是相同的。因此, 外國的股票買權乘以匯率 X_t, 就是以本國計價的外國股票買權。這也就是公式 (11)。(若令 $X_t = 1$ 則 (11) 式成為單純外國股票買權的評價公式, 詳見第 4 節 4.3 小節的論述。)

4.2 賣買權平價關係

相似於第 3 節 3.2 小節的作法。首先, 考慮下列到期時現金流量恆等式:

---

[10] 同註 7。但是對於二階泰勒近似理論價格來說, 不論是固定匯率連動或者是浮動匯率連動都與時間有關, 這是因為在做二階泰勒近似時, 在假設隨機變數是近似常態分配下, 會出現布朗運動的平方項($(z_{T-t}^Q)^2$), 根據伊藤清引理及條件期望值運算會得到與時間 $T-t$ 有關的項式, 也就是說 $\mathrm{E}[(Z_{(T-t)}^Q)^2|F_t] = T-t$。

$$X_T(K_T - S_T) + X_T(S_T - K_T)^+ = X_T(K_T - S_T)^+. \tag{12}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 在風險中立下, (12) 式的現值恆等式為

$$\begin{aligned}
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[X_T(K_T - S_T) + X_T(S_T - K_T)^+|F_t\Big] \\
&\qquad\qquad = \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T(K_T - S_T)^+|F_t]}_{P_2(S_T,\, K_T,\, t)}, \\
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T(K_T - S_T)|F_t] + \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T(S_T - K_T)^+|F_t]}_{C_2(S_T,\, K_T,\, t)} \\
&\qquad = P_2(S_T, K_T, t),
\end{aligned} \tag{13}$$

移項整理可得 [11]

---

[11] 根據 (3) 式, $\mathrm{E}^Q[X_u S_u|F_t] = X_t S_t e^{[r_d - \frac{1}{2}(\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_X + \sigma_X^2)](u-t)}\mathrm{E}^Q[e^{\sigma_S(z_u^Q - z_t^Q) + \sigma_X(w_u^Q - w_t^Q)}|F_t] = X_t S_t e^{r_d(u-t)}$。 因此, 我們可進一步計算:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^Q[X_T K_T|F_t] \\
&\quad = \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q[X_T S_u|F_{T-h}]du|F_t\right\} \\
&\quad = \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\Big[X_{T-h}e^{(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2)h + \sigma_X(w_T^Q - w_{T-h}^Q)}S_u|F_{T-h}\Big]du|F_T\right\} \\
&\quad = \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}e^{(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2)h}\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\Big[e^{\sigma_X(w_T^Q - w_{T-h}^Q)}S_u|F_{T-h}\Big]du|F_t\right\} \\
&\quad = \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\Bigg\{X_{T-h}e^{(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2)h} \times \\
&\qquad\qquad \int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\Big[e^{\sigma_X(w_T^Q - w_{T-h}^Q)}S_{T-h}e^{r_1(u-(T-h)) + \sigma_S(z_u^Q - z_{T-h}^Q)}|F_{T-h}\Big]du|F_t\Bigg\} \\
&\quad = \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\Bigg\{X_{T-h}S_{T-h}e^{(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2)h} \times
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&P_2(S_T, K_T, t) \\
&\quad = C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T K_T|F_t] - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t] \\
&\quad = C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\left[e^{(r_d-r_f)h}\frac{e^{r_f h}-1}{r_f h}X_t S_t e^{r_d(T-h-t)}\right] \\
&\qquad\qquad -e^{-r_d(T-t)}\left[X_t S_t e^{r_d(T-t)}\right] \\
&\quad = C_2(S_T, K_T, t) + X_t\left(\frac{1-e^{-r_f h}}{r_f h} - 1\right)S_t, \qquad \text{(14a)}
\end{aligned}
$$

(14a) 式代表在尚未計算履約平均價格期間內, 浮動匯率連動下遠期生效賣買權的平價關係。

情況 2: 當 $t \in [T-h, T]$ 時, 此時 (13) 式改寫為 [12]

$$
\begin{aligned}
P_2(S_T, K_T, t) &= C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_T\left(M_{1t} + \frac{1}{h}\int_t^T S_u du\right)|F_t\right] \\
&\qquad -e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t] \\
&= C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T M_{1t}|F_t] \\
&\qquad +e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_T\left(\frac{1}{h}\int_t^T S_u du\right)|F_t\right] - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{T-h}^T \mathrm{E}^Q\left[e^{\sigma_X(w_T^Q - w_{T-h}^Q)}e^{r_1(u_1(T-h))+\sigma_S(z_u^Q - z_{T-h}^Q)}|F_{T-h}\right]du|F_t\Bigg\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}S_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\int_{T-h}^T e^{r_f(u-(T-h))}du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}S_{T-h}\frac{e^{r_f h}-1}{r_f}F_t\right\} = e^{(r_d-r_f)h}\frac{e^{r_f h}-1}{r_f h}X_t S_t e^{r_d(T-h-t)}.
\end{aligned}
$$

[12] 同註 11, 僅將積分下限 $T-h$ 改為 t。

$$= C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_f(T-t)} X_t M_{1t} + e^{-r_d(T-t)} \times \left[e^{(r_d - r_f)(T-t)} \frac{e^{r_f(T-t)} - 1}{r_f(T-t)} X_t S_t \right] - e^{-r_d(T-t)} \left[X_t S_t e^{r_d(T-t)} \right]$$
$$= C_2(S_T, K_T, t) + e^{-r_f(T-t)} X_t M_{1t} + X_t \left[\frac{1 - e^{-r_f(T-t)}}{r_f(T-t)} - 1 \right] S_t, \tag{14b}$$

(14b) 式代表在計算履約平均價格期間內, 浮動匯率連動下遠期生效賣買權的平價關係。

對於浮動匯率下遠期生效亞洲選擇權賣買權平價關係, 當在履約價計算時點 $t \in [0, T-h)$ 之前, 事實上是考慮在風險中立下, 以本國貨幣計價履約價格 $X_T K_T$ 的條件期望值。這與一般在固定已知履約價下的賣買權平價關係不同, 其理由是因為當時間點在 $t \in [0, T-h)$ 時, 未來履約價格無法事先預知, 因此根據以本國貨幣計價的外國股價符合平賭過程下, 在 $t \in [0, T-h)$ 時間點, 最佳的預測值就是以本國貨幣計價履約價格的條件期望值; 但當在履約價計算時點 $t \in [T-h, T]$, 已實現的以本國貨幣計價平均履約價格 $X_t M_{1t}$, 就與固定已知履約價下的賣買權平價相同, 以國內無風險利率折現, 至於未實現部分如同前述。

4.3　一價法則成立

我們首先介紹國際金融的一個基本法則: 一價法則。所謂一價法則是指在完美市場（the perfect market）下, 以同一種貨幣計價的相同商品（或衍生性商品）在全世界各地的價格一定相等, 否則會有套利機會產生。就實證結果而言, 只有在長期觀察下才會成立, 但短期內不成立。此外, 在物價及匯率穩定的短時間內, 該法則成立的可能性大。在此, 我們只是利用它來說明另一種求解評價模型的方法。

首先從浮動匯率連動下的遠期生效（股票）亞洲選擇權買權的到期現金流量 $C_2(S_T, K_T, T) = X_T \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)$ 可知: $\mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)$ 其實是以外國貨幣計價的遠期生效（外國股票）亞洲選擇權的買權到期現金流量。我們

可利用 BBC(1994)的評價模型來評估該買權的價值,[13] 再引用一價法則, 將該買權價值乘以現在匯率 X_t 必相等於以本國計價的買權。因此, 該買權的最後評價模型為

$$
\begin{aligned}
C_2(S_T,K_T,t) &= X_t\cdot C_2^f(S_T,K_T,t)\\
&= \begin{cases}
X_t\cdot S_t e^{-r_f h}\left\{\mu_2^{FO}N\left(\dfrac{\mu_2^{FO}}{v_2^{FO}}\right)+v_2^{FO}g\left(\dfrac{\mu_2^{FO}}{v_2^{FO}}\right)\right\}, & 0\le t<T-h<T\\
X_t\cdot S_t e^{-r_f(T-t)}\left\{m_{2T}^{FO}N\left(\dfrac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{2T}^{FO}}\right)+\sigma_{2T}^{FO}g\left(\dfrac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{2T}^{FO}}\right)\right\}, & T-h\le t<T,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

上式與嚴謹數學推導下的浮動匯率連動遠期生效買權評價 (11) 式的一階泰勒近似理論價格完全相同, 其中 $C_2^f(S_T,K_T,t)$ 表示以外國貨幣計價的遠期生效(外國股票)亞洲選擇權買權的價值。

5. 以本國貨幣計價下外國資產的遠期生效亞洲選擇權

5.1 理論評價

首先說明以本國貨幣計價之下外國資產的遠期生效亞洲選擇權, 令 $C_3(X_TS_T, J_T,T)$ 表示到期時, 以國內貨幣計價的外國股票的遠期生效亞洲買權, 因此它的期末報酬為:

$$C_3(X_TS_T,J_T,T)=\mathrm{Max}(X_TS_T-J_T,0), \tag{15}$$

[13] 在 BBC(1994)中所提出的遠期生效(外國股票)亞洲選擇權買權 $C_2^f(S_T,K_T,t)$, 以本文的符號表示為

$$
C_2^f(S_T,K_T,t)=\begin{cases}
S_t e^{-r_f h}\left\{\mu_2^{FO}N\left(\dfrac{\mu_2^{FO}}{v_2^{FO}}\right)+v_2^{FO}g\left(\dfrac{\mu_1^{FO}}{v_2^{FO}}\right)\right\}, & 0\le t<T-h<T\\
S_t e^{-r_f(T-t)}\left\{m_{2T}^{FO}N\left(\dfrac{\mu_{2T}^{FO}}{v_{2T}^{FO}}\right)+\sigma_{2T}^{FO}g\left(\dfrac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{2T}^{FO}}\right)\right\}, & T-h\le t<T.
\end{cases}
$$

其中 $J_T = \left(\int_{T-h}^{T} X_u S_u du\right)/h$ 表示選擇權的履約價格是以到期前一段時間 (h) 的股價匯率平均來做計算, S_T 與 X_T 分別表示到期時的外國股票價格與以本國貨幣計價的每一單位外幣。

這種買權是外國股價與履約價都是以本國貨幣計價。因此,投資人希望在外國股價及匯率雙重變動下,能從外國買權獲得正的報酬率。或者投資人希望外國股價及履約價都以本國貨幣計價容易理解。

定理 3 在上述的期末報酬下,以本國貨幣計價下外國資產的遠期生效亞洲選擇權的買權一階、二階泰勒理論近似價格 $C_3^j(X_T S_T, J_T, t)$ 為 $(j = \text{FO}, \text{SO})$:

$$\begin{cases} X_t \cdot S_t e^{-r_d h}\left\{\mu_3^j N\left(\dfrac{\mu_3^j}{v_3^j}\right) + v_3^j g\left(\dfrac{\mu_3^j}{v_3^j}\right)\right\}, & 0 \le t < T-h < T \\ X_t \cdot S_t e^{-r_d(T-t)}\left\{m_{3T}^j N\left(\dfrac{m_{3T}^j}{\sigma_{3T}^j}\right) + \sigma_{3T}^j g\left(\dfrac{m_{3T}^j}{\sigma_{3T}^j}\right)\right\}, & T-h \le t < T, \end{cases} \tag{16}$$

其中的常數

$$\begin{aligned}
\mu_3^{FO} &= \frac{r_3 h}{2}, \\
\mu_3^{SO} &= \mu_3^{FO} + \frac{(r_3 h)^2}{3} + \frac{\sigma_{SX}^2 h}{4}, \\
(v_3^{FO})^2 &= \frac{\sigma_{SX}^2 h}{3}, \\
(v_3^{SO})^2 &= (v_3^{FO})^2 + \frac{\sigma_{SX}^4 h^2}{4} + \frac{7(r_3^2\sigma_{SX}^2 h^3)}{15} + \frac{3(r_3\sigma_{SX}^2 h^2)}{4}, \\
r_3 &= r_d - \frac{\sigma_{SX}^2}{2}, \\
\sigma_{SX}^2 &= \sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_X + \sigma_X^2, \\
m_{3T}^{FO} &= 1 - \frac{T-t}{h} + r_3\frac{2(T-t)h - (T-t)^2}{2h} - \frac{M_{2t}}{X_t S_t}, \\
M_{2t} &= \frac{\int_{T-h}^{t} X_u S_u du}{h}, \\
m_{3T}^{SO} &= m_{3T}^{FO} + \frac{\sigma_{SX}^2(T-t)}{2} + (T-t)^2\left(\frac{r_3^2}{2} - \frac{\sigma_{SX}^2}{4h}\right) - \frac{r_3^2(T-t)^3}{6h},
\end{aligned}$$

$$(\sigma_{3T}^{SO})^2 = (\sigma_{3T}^{FO})^2 + 2r_3^2\sigma_{SX}^4\frac{(T-t)^5}{15h^2} + \sigma_{SX}^2(T-t)^4\left(\frac{\sigma_{SX}^2+5r_3}{12h^2} - \frac{2r_3^2}{3h}\right)$$
$$+\sigma_{SX}^2(T-t)^3\left(r_3^2 - \left(5r_3 + \frac{\sigma_{SX}^2}{3h}\right)\right) + \sigma_{SX}^2(T-t)^2\left(2r_3 + \frac{\sigma_{SX}^2}{2}\right),$$

以及 $(\sigma_{3T}^{FO})^2 = [1-(T-t)/h + (T-t)^2/(3h^2)]\sigma_{SX}^2(T-t)$。

證明: 與第 3 及 4 節的推導相似, 僅是在計算條件期望值時的機率測度不同。[14]

觀察 (16) 式, 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 買權的一階泰勒理論近似價格與時間點 t 無關, 同時也與存續時間 $T-t$ 無關。但股價、匯率以及兩者的波動度與相關係數是決定該類型選擇權價格的主要因素。

5.2 賣買權平價關係

相似於第 3 節 3.2 小節的作法。首先, 考慮下列到期時現金流量恆等式:

$$(J_T - X_TS_T) + (X_TS_T - J_T)^+ = (J_T - X_TS_T)^+. \tag{17}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 在風險中立下, (17) 式的現值恆等式為

$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[(J_T - X_TS_T) + (X_TS_T - J_T)^+|F_t\Big]$$
$$= \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[(J_T - X_TS_T)^+|F_t]}_{P_3(X_TS_T,\ J_T,\ t)},$$
$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[(J_T - X_TS_T)|F_t] + \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[(X_TS_T - J_T)^+|F_t]}_{C_3(X_TS_T,\ J_T,\ t)}$$
$$= P_3(X_TS_T, J_T, t), \tag{18}$$

[14] 由於證明過程太過繁雜, 造成本文太過冗長, 根據匿名審查人建議, 我們不在文章中提出證明, 讀者有興趣可嘗試自行計算或者向我們索取。

移項整理可得[15]

$$
\begin{aligned}
&P_3(X_TS_T, J_T, t)\\
&\quad = C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[J_T|F_t] - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_TS_T|F_t]\\
&\quad = C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\left[\frac{e^{r_dh}-1}{r_dh}X_tS_te^{r_d(T-h-t)}\right]\\
&\qquad\qquad -e^{-r_d(T-t)}\left[X_tS_te^{r_d(T-t)}\right]\\
&\quad = C_3(X_TS_T, J_T, t) + \left[\frac{1-e^{-r_dh}}{r_dh}-1\right]X_tS_t, \qquad (19a)
\end{aligned}
$$

(19a) 式代表在尚未計算履約平均價格期間內, 以本國貨幣計價下遠期生效賣買權的平價關係。

情況 2: 當 $t \in [T-h, T]$ 時, 此時 (18) 式改寫為[16]

$$
\begin{aligned}
&P_3(X_TS_T, J_T, t)\\
&= C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[\left(M_{2t}+\frac{1}{h}\int_t^T X_uS_udu\right)|F_t\right]\\
&\qquad -e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_TS_T|F_t]\\
&= C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[M_{2t}|F_t] + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[\frac{1}{h}\int_t^T X_uS_udu|F_t\right]\\
&\qquad -e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_TS_T|F_t]
\end{aligned}
$$

---

[15] 由註 11 以及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^Q[J_T|F_t] &= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{\int_{T-h}^T \mathrm{E}^Q[X_uS_u|F_{T-h}]du|F_t\right\}\\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}S_{T-h}\left(\int_{T-h}^T e^{r_d(u-(T-h))}du\right)|F_t\right\}\\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}S_{T-h}\frac{e^{r_dh}-1}{r_d}|F_t\right\} = \frac{e^{r_dh}-1}{r_dh}X_tS_te^{r_d(T-h-t)}.
\end{aligned}
$$

[16] 同註 15, 僅將積分下限 $T-h$ 改為 t。

$$= C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}M_{2t} + e^{-r_d(T-t)}\left[\frac{e^{r_d(T-t)}-1}{r_d(T-t)}X_tS_t\right]$$
$$-e^{-r_d(T-t)}\left[X_TS_Te^{r_d(T-t)}\right]$$
$$= C_3(X_TS_T, J_T, t) + e^{-r_d(T-t)}M_{2t} + \left[\frac{1-e^{-r_d(T-t)}}{r_d(T-t)} - 1\right]X_tS_t, \tag{19b}$$

(19b) 式代表在計算履約平均價格期間內, 以本國貨幣計價下遠期生效賣買權的平價關係。對於以本國貨幣計價之下外國資產的遠期生效亞洲選擇權賣買權平價關係, 相似的解釋在第 3 節 3.2 小節與第 4 節4.2 小節已有說明, 此處不在撰述。

6. 浮動股價下的遠期生效（匯率）亞洲選擇權

6.1 理論評價

首先說明浮動股價下的遠期生效(匯率)亞洲選擇權。令 $C_3(X_T, L_T, T)$ 表示到期時, 以國內貨幣計價的股票連動遠期生效外匯買權, 因此它的期末報酬為:

$$C_4(X_T, L_T, T) = S_T \cdot \text{Max}(X_T - L_T, 0), \tag{20}$$

其中 $L_T = \left(\int_{T-h}^{T} X_u du\right)/h$ 表示匯率選擇權的履約價格是以到期前一段時間 (h) 的匯率平均來做計算, S_T 表示到期時的外國股票價格。

這是一種平均匯率買權 $\text{Max}(X_T - L_T, 0)$, 並且連動外國股票價格 S_T, 主要目的是對於外匯收入避險, 採用平均匯率為履約價可控制外匯收入或外幣投資的期末價格不會低於某一水準。

定理 4 在上述的期末報酬下, 浮動股票下的遠期生效(匯率)亞洲選擇權的買權一階、二階泰勒理論近似價格 $C_4^j(X_T, L_T, t)$ 為 $(j = \text{FO}, \text{SO})$:

$$
\begin{cases}
S_t \cdot X_t e^{(r_f - r_d - \rho\sigma_S\sigma_X)h}\left\{\mu_4^j N\left(\frac{\mu_4^j}{v_4^j}\right) + v_4^j g\left(\frac{\mu_4^j}{v_4^j}\right)\right\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t < T-h < T \\
S_t \cdot X_t e^{(r_f - r_d - \rho\sigma_S\sigma_X)(T-t)}\left\{m_{4T}^j N\left(\frac{m_{4T}^j}{\sigma_{4T}^j}\right) + \sigma_{4T}^j g\left(\frac{m_{4T}^j}{\sigma_{4T}^j}\right)\right\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T-h \le t < T,
\end{cases}
\tag{21}
$$

其中的常數

$$
\begin{aligned}
\mu_4^{FO} &= \frac{r_4 h}{2}, \\
\mu_4^{SO} &= \mu_4^{FO} + \frac{(r_4 h)^2}{3} + \frac{\sigma_X^2 h}{4}, \\
(v_4^{FO})^2 &= \frac{\sigma_X^2 h}{3}, \\
(v_4^{SO})^2 &= (v_4^{FO})^2 + \frac{\sigma_X^4 h^2}{4} + \frac{7(r_4^2\sigma_X^2 h^3)}{15} + \frac{3(r_4\sigma_X^2 h^2)}{4}, \\
r_4 &= r_d - r_f + \frac{2\rho\sigma_X\sigma_S - \sigma_X^2}{2}, \\
m_{4T}^{FO} &= 1 - \frac{T-t}{h} + r_4\frac{2(T-t)h - (T-t)^2}{2h} - \frac{M_{3t}}{X_t}, \\
(\sigma_{4T}^{FO})^2 &= \left(1 - \frac{T-t}{h} + \frac{(T-t)^2}{3h^2}\right)\sigma_X^2(T-t), \\
M_{3t} &= \frac{\int_{T-h}^{t} X_u du}{h}, \\
m_{4T}^{SO} &= m_{4T}^{FO} + \frac{\sigma_X^2(T-t)}{2} + (T-t)^2\left(\frac{r_4^2}{2} - \frac{\sigma_X^2}{4h}\right) - \frac{r_4^2(T-t)^3}{6h},
\end{aligned}
$$

以及 $(\sigma_{4T}^{SO})^2 = (\sigma_{4T}^{FO})^2 + 2r_4^2\sigma_X^4(T-t)^5/(15h^2) + \sigma_X^2(T-t)^4((\sigma_X^2+5r_4)/(12h^2) - 2r_4^2/(3h)) + \sigma_X^2(T-t)^3(r_4^2 - (5r_4 + \sigma_X^2/(3h))) + \sigma_X^2(T-t)^2(2r_4 + \sigma_X^2/2)$。

證明: 與第 3 及 4 節的推導相似, 僅是在計算條件期望值時的機率測度不同。[17]

---

[17] 同註 14。

觀察 (21) 式, 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 買權的一階泰勒理論近似價格與時間點 t 無關, 同時也與存續時間 $T-t$ 無關。但股價、匯率以及兩者的波動度與相關係數是決定該類型選擇權價格的主要因素。

6.2 賣買權平價關係

相似於第 3 節 3.2 小節的作法。首先, 考慮下列到期時現金流量恆等式:

$$S_T(L_T - X_T) + S_T(X_T - L_T)^+ = S_T(L_T - X_T)^+. \tag{22}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 在風險中立下, (22) 式的現值恆等式為

$$\begin{aligned}
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[S_T(L_T - X_T) + S_T(X_T - L_T)^+|F_t\Big] \\
&\qquad = \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_T(L_T - X_T)^+|F_t]}_{P_4(X_T,\, L_T,\, t)}, \\
&e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_T(L_T - X_T)|F_t] + \underbrace{e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_T(X_T - L_T)^+|F_t]}_{C_4(X_T,\, L_T,\, t)} \\
&\qquad = P_4(X_T, L_T, t),
\end{aligned} \tag{23}$$

移項整理可得 [18]

$$\begin{aligned}
&P_4(X_T, L_T, t) \\
&\quad = C_4(X_T, L_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_T L_T|F_t] - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t] \\
&\quad = C_4(X_T, L_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\left[e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}\frac{e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}-1}{\left(r_4+\dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)h}X_t S_t e^{r_d(T-h-t)}\right] \\
&\qquad\qquad - e^{-r_d(T-t)}\Big[X_t S_t e^{r_d(T-t)}\Big]
\end{aligned}$$

---

[18] 由註 11 以及

$$= C_4(X_T, L_T, t) + S_t\left[\frac{1 - e^{-(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}}{\left(r_4 + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)h} - 1\right]X_t, \tag{24a}$$

(24a) 式代表在尚未計算履約平均價格期間內, 浮動股價連動下遠期生效賣買權的平價關係。

情況 2: 當 $t \in [T-h, T]$ 時, 此時 (23) 式改寫為 [19]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^Q[S_T L_T|F_t] \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q[S_T X_u|F_{T-h}]du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{\mathrm{E}^Q\left[\int_{T-h}^{T} S_{T-h}e^{r_1 h+\sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right)}X_u du|F_{T-h}\right]|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{S_{T-h}e^{r_1 h}\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\left[e^{\sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right)}X_u|F_{T-h}\right]du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{S_{T-h}e^{r_1 h}\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\left[e^{\sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right)}X_{T-h}\exp\left[\left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)\times\right.\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\left.\left(u-(T-h)\right)\right] + \sigma_X\left(w_u^Q - w_{T-h}^Q\right)|F_{T-h}\right]du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{S_{T-h}X_{T-h}e^{r_1 h}\int_{T-h}^{T}\mathrm{E}^Q\left[\exp\left[\sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q + \left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)\times\right.\right.\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\left.\left.\left(u-(T-h)\right)\right) + \sigma_X\left(w_u^Q - w_{T-h}^Q\right)\right]|F_{T-h}\right]du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}S_{T-h}e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}\int_{T-h}^{T}e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)(u-(T-h))}du|F_t\right\} \\
&= \frac{1}{h}\mathrm{E}^Q\left\{X_{T-h}S_{T-h}e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}\frac{e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h} - 1}{\left(r_4 + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)}|F_t\right\} \\
&= e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}\frac{e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h} - 1}{\left(r_4 + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)h}X_t S_t e^{r_d(T-h-t)}.
\end{aligned}$$

[19] 同註 18, 僅將積分下限 $T-h$ 改為 t。

$$
\begin{aligned}
&P_4(X_T, L_T, t) \\
&= C_4(X_T, L_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[S_T\left(M_{3t} + \frac{1}{h}\int_t^T X_u du\right)|F_t\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t] \\
&= C_4(X_T, L_T, t) + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_T M_{3t}|F_t] \\
&\qquad + e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[S_T\left(\frac{1}{h}\int_t^T X_u du\right)|F_t\right] - e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[X_T S_T|F_t] \\
&= C_4(X_T, L_T, t) + e^{-r_d(T-t)} S_t e^{(r_f - \rho\sigma_S\sigma_X)(T-t)} M_{3T} + e^{-r_d(T-t)} \times \\
&\qquad \left[e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_X^2)(T-t)}\frac{e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)(T-t)} - 1}{\left(r_4 + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)(T-t)} X_t S_t\right] - e^{-r_d(T-t)}\left[X_t S_t e^{r_d(T-t)}\right] \\
&= C_4(X_T, L_T, t) + S_t e^{-(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)(T-t)} M_{3t} + S_t\left[\frac{1 - e^{-(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)(T-t)}}{\left(r_4 + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2\right)(T-t)} - 1\right] X_t,
\end{aligned}
\tag{24b}
$$

(24b) 式代表在計算履約平均價格期間內, 浮動股價連動下遠期生效賣買權的評價關係。對於浮動股價下的遠期生效亞洲(匯率)選擇權賣買權平價關係, 相似的解釋在第 3 節 3.2 小節與第 4 節 4.2 小節已有說明, 此處不在撰述。

7. 評價模型的準確度

前面 4 節中, 已經推導出四種類型的匯率連動之下的遠期生效亞洲選擇權的一階、二階泰勒近似封閉解理論價格, 既然是近似解那麼就有必要了解其精確度有多高, 在 7.1 小節我們將推導出它們的最大誤差上限值。在 7.2 小節舉例說明近似封閉解的準確性以及敏感性分析, 結果發現當波動度低時, 兩個近似封閉解數值差異不大, 反之當波動度高時, 兩者明顯有差異, 這時由最大

誤差上限數值可知, 二階泰勒近似封閉解具有較高的可靠度。在 7.3 小節說明一階、二階泰勒近似封閉解的優缺點。

7.1 最大誤差上限

首先令 $C_i^E(\cdot,\cdot,0)$, $i=1,2,3,4$ 分別表示在時間 $t=0$ 時, 前面四節遠期生效亞洲選擇權買權的精確價格(exact price)。 因此, 我們前面四節推導的一階及二階泰勒近似封閉解與精確價格的最大誤差上限分別為[20]

$$\left|C_1(S_T,K_T,0)-C_1^E(S_T,K_T,0)\right| \leq \begin{cases} \bar{X}\cdot e^{-r_dT}S_0e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h)}\left(\dfrac{2\left(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^2h^2}{3}e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+\dfrac{3}{4}\sigma_S^2h\right) \\ \bar{X}\cdot e^{-r_dT}S_0e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h)}\left(\dfrac{5\left(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^3h^3}{24}e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+r_1\sigma_S^2h\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{1}{4}\sigma_S^4h^2+\dfrac{(2r_1^2+4r_1\sigma_S^2+\sigma_S^4)h^3}{12}\right), \end{cases} \tag{25}$$

$$\left|C_2(S_T,K_T,0)-C_2^E(S_T,K_T,0)\right| \leq \begin{cases} e^{-r_fh}X_0S_0\left(\dfrac{2\left(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^2h^2}{3}e^{(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+\dfrac{3}{4}\sigma_S^2h\right) \\ e^{-r_fh}X_0S_0\left(\dfrac{5\left(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^3h^3}{24}e^{(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+r_2\sigma_S^2h\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{1}{4}\sigma_S^4h^2+\dfrac{(2r_2^2+4r_2\sigma_S^2+\sigma_S^4)h^3}{12}\right), \end{cases} \tag{26}$$

[20] 詳細推導請見附錄 4。

$$
\begin{aligned}
&\left|C_3(X_T S_T, J_T, 0) - C_3^E(X_T S_T, J_T, 0)\right| \\
&\leq \begin{cases}
e^{-r_d h} S_0 X_0 \left(\dfrac{2\left(r_3 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2\right)^2 h^2}{3} e^{(r_3 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2)h} + \dfrac{3}{4}\sigma_{XS}^2 h \right) \\
e^{-r_d h} S_0 X_0 \left(\dfrac{5\left(r_3 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2\right)^3 h^3}{24} e^{(r_3 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2)h} + r_3 \sigma_{XS}^2 h \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{4}\sigma_{XS}^4 h^2 + \dfrac{(2r_3^2 + 4r_3\sigma_{XS}^2 + \sigma_{XS}^4)h^3}{12} \right),
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|C_4(X_T, L_T, 0) - C_4^E(X_T, L_T, 0)\right| \\
&\leq \begin{cases}
S_0 X_0 e^{-(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_X^2)h} \left(\dfrac{2\left(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)^2 h^2}{3} e^{(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + \dfrac{3}{4}\sigma_X^2 h \right) \\
S_0 X_0 e^{-(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_X^2)h} \left(\dfrac{5\left(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)^3 h^3}{24} e^{(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + r_4 \sigma_X^2 h \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{4}\sigma_X^4 h^2 + \dfrac{(2r_4^2 + 4r_4\sigma_X^2 + \sigma_X^4)h^3}{12} \right),
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

觀察 (25) 式、(26) 式、(27) 式及 (28) 式, 首先經過計算後可得一階泰勒近似封閉解最大誤差上限值大於二階泰勒所計算。另外, 最大誤差上限值與期末報酬的設定方式有關, 例如: 以固定匯率之下的遠期生效(股票)亞洲選擇權的買權來說, 僅與國內、國外無風險利率以及外國股票價格波動度有關; 以本國貨幣計價之下外國資產的遠期生效亞洲選擇權的買權來說, 不僅與國內、國外無風險利率以及外國股票價格、匯率的波動度有關, 並且必須考慮外國標的股票與匯率的相關係數影響。

7.2 舉例說明

首先, 假設四種類型的買權到期日為六個月後, 國內與國外無風險利率分別為 $r_d = 10\%$ 與 $r_f = 9\%$, 現在外國股票價格與匯率價格分別為 $S_0 = 100$ 與 $X_0 = 32$, 兩者對應的波動度與相關係數分別為 $\sigma_S = 25\%$、$\sigma_X = 20\%$ 及 $\rho_{SX} = 0.5$, 以及履約價格的計算開始時間為到期日前 20 天。[21]

由表 1 及表 2 可以得到:

⑴ 表 1 中的第三列第一個數值表示浮動匯率連動遠期生效(股價)亞洲選擇權的價格[22] 為 45.862518, 約等於即期匯率乘上 BBC(1994)計算的亞洲選擇權價值 (32×1.436), 即表示我們的數值計算驗證了一價法則成立, 同時說明一階泰勒逼近封閉解的數值結果與 BBC(1994)具有一致性。

⑵ 四種選擇權的最大誤差百分比,[23] 發現一階泰勒近似封閉解的最大上限誤差相當高(甚至到 29%), 然而二階泰勒近似封閉解則都在 2% 以內。所以表示二階泰勒近似封閉解數值相對較具有可靠性。

表 3 及表 4 則是考慮當波動度與相關係數做變動時, 對一階及二階泰勒近似封閉解數值及最大誤差百分比的改變做敏感性分析。

由表 3 及表 4 可以得到:

⑴ 在相同的相關係數下, 當外國股票波動度越大(針對前三種買權)或者匯率波動度越大(針對第四種買權), 無論一階及二階泰勒近似封閉解數值, 四種連動遠期生效亞洲選擇權的買權價值越大。這個結果是合理的, 因為選擇權的價值隨著波動度越大, 買權價值越大。

⑵ 在相同的相關係數下, 無論一階及二階泰勒近似封閉解數值, 隨著匯率波動度 σ_X 的上升(針對第一種買權), 權利金下降, 這個情況因為 (6) 式複雜, 所以無法直接由公式推出這個結果。

⑶ 在相同的外國股票波動度下, 無論一階及二階泰勒近似封閉解數值, 除了固定匯率連動遠期生效亞洲(股票)選擇權外, 其他三種連動選擇權價值

---

[21] 這裡的參數設定與 BBC(1994)大致相同, 除了原文沒有的國外無風險利率、即期匯率、匯率波動度以及相關係數。

[22] 感謝匿名審稿人的寶貴意見, 建議我們以數值計算驗證一價法則成立。在 BBC(1994)文章中, 所計算的遠期生效(股價)亞洲選擇權價格為 1.436。

[23] 最大誤差百分比的計算是以最大誤差上限值除以近似封閉解數值。

表 1　一階泰勒近似封閉解數值、最大誤差上限值及最大誤差百分比

四種類型	近似封閉解數值	最大誤差上限值	最大誤差百分比
$C_1^e(S_T, K_T, 0)$	44.008871	7.9248007	18.0072%
$C_2^e(S_T, K_T, 0)$	45.862518	8.3451040	18.1959%
$C_3^e(X_T S_T, J_T, 0)$	68.520965	20.297801	29.6228%
$C_4^e(X_T, L_T, 0)$	35.347009	5.3310389	15.0820%

表 2　二階泰勒近似封閉解數值、最大誤差上限值及最大誤差百分比

四種類型	近似封閉解數值	最大誤差上限值	最大誤差百分比
$C_1^e(S_T, K_T, 0)$	45.501657	0.35630191	0.7831%
$C_2^e(S_T, K_T, 0)$	47.531541	0.65103360	1.3696%
$C_3^e(X_T S_T, J_T, 0)$	72.292404	0.69925815	0.9673%
$C_4^e(X_T, L_T, 0)$	36.313942	0.11059016	0.3045%

隨著相關係數的變大而變大。

(4) 表 3 中的一階泰勒近似封閉解數值, 對於固定匯率連動遠期生效亞洲 (股票) 選擇權, 當相關係數 ρ 由 0.2 增加至 0.8 (在第 3 節 3.1 小節中討論過, 當 $\rho > [r_f(T-t-h) - r_d(T-t)]/[\sigma_S \sigma_X (T-t-h)] = \rho^*$ 時), 權利金將下降。在本例子當中, 計算出的 ρ^* 值對應於表 3 第一列的後四個欄位, 計算都全部為負, 這四個數字都小於 0.8, 符合結果, 因此, 權利金隨著相關係數的變大而下降。同理可驗證, 表 4 中的二階泰勒近似封閉解數值也有相同結果。

(5) 比較表 3 及表 4 發現, 二階泰勒近似封閉解數值都高於一階泰勒近似封閉解數值, 這可能是因為二階泰勒近似比一階泰勒近似多增加了高階動差項, 使得價值上升。

(6) 在低波動度時, 一階及二階泰勒近似封閉解數值的最大上限誤差雖然有差異, 但是觀察封閉解數值, 其實兩者數值差異不大, 表示一階泰勒近似封閉解數值相對於二階泰勒近似封閉解公式簡單, 而且已經足夠; 反之, 當高波動度時, 一階及二階泰勒近似封閉解數值的最大上限誤差與數值都明顯有差異, 此時因考量以二階泰勒近似封閉解數值來評價相對可靠。

表 3　一階泰勒近似封閉解敏感度分析 [24]

參數值 / 四種類型	$\rho_{SX}=0.2$				$\rho_{SX}=0.8$			
	$\sigma_S=10\%$		$\sigma_S=40\%$		$\sigma_S=10\%$		$\sigma_S=40\%$	
	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$
$C_1^e(S_T,K_T,0)$	21.079375 (6.2133%)	20.843341 (6.2686%)	68.642241 (29.4903%)	67.460986 (30.0112%)	20.726036 (6.2948%)	19.804591 (6.5184%)	66.877048 (30.2775%)	62.362376 (32.5515%)
$C_2^e(S_T,K_T,0)$	21.304362 (6.4776%)	21.304362 (6.4776%)	69.586680 (30.5809%)	69.586680 (30.5809%)	21.304362 (6.4776%)	21.304362 (6.4776%)	69.586680 (30.5809%)	69.586680 (30.5809%)
$C_3^e(X_TS_T,J_T,0)$	30.833466 (10.5402%)	59.783057 (24.9648%)	74.818480 (33.0696%)	92.160292 (42.9697%)	36.531173 (13.2543%)	67.618682 (29.1351%)	82.822309 (37.5627%)	109.58935 (53.5684%)
$C_4^e(X_T,L_T,0)$	17.673632 (7.5445%)	50.793688 (23.6073%)	17.938480 (74.3727%)	51.532741 (23.2570%)	17.938480 (7.4373%)	51.532741 (23.2570%)	19.022066 (7.0541%)	54.551402 (22.0041%)

表 4　二階泰勒近似封閉解敏感度分析

參數值 / 四種類型	$\rho_{SX}=0.2$				$\rho_{SX}=0.8$			
	$\sigma_S=10\%$		$\sigma_S=40\%$		$\sigma_S=10\%$		$\sigma_S=40\%$	
	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$	$\sigma_X=10\%$	$\sigma_X=30\%$
$C_1^e(S_T,K_T,0)$	21.401174 (0.6540%)	21.159367 (0.6296%)	72.329701 (0.0763%)	71.054701 (0.5313%)	21.039197 (0.6173%)	20.095367 (0.5123%)	70.424622 (0.8436%)	65.558098 (3.5605%)
$C_2^e(S_T,K_T,0)$	21.664222 (0.6955%)	21.664222 (0.6955%)	73.469565 (0.3882%)	73.469565 (0.3882%)	21.664222 (0.6955%)	21.664222 (0.6955%)	73.469565 (0.3882%)	73.469565 (0.3882%)
$C_3^e(X_TS_T,J_T,0)$	31.589296 (1.1883%)	62.641035 (1.4425%)	79.332307 (0.3997%)	99.096468 (2.3835%)	37.592117 (1.3988%)	71.289571 (1.0323%)	88.384014 (0.6415%)	119.54901 (7.5086%)
$C_4^e(X_T,L_T,0)$	17.910431 (0.0709%)	52.789604 (0.08405%)	18.184072 (0.1285%)	53.603364 (0.2901%)	18.184072 (0.1285%)	53.603364 (0.2901%)	19.303947 (0.3418%)	56.929674 (1.7419%)

24 表 3 及表 4 中的數值與括弧數值分別為近似封閉解數值與最大誤差百分比。

7.3 比較說明

一階及二階泰勒近似封閉解理論價格的優缺點比較說明如下:

⑴ 兩者除了都是以泰勒展開式來逼近外, 二階泰勒近似封閉解的求解過程, 更假設了逼近常態分配而求得, 這是非常強的假設。如果真實情況不符合時, 公式的求得就有問題。

⑵ 如同前面小節所述, 二階泰勒近似封閉解數值都高於一階泰勒近似封閉解數值, 可能表示二階泰勒近似封閉解有高估選擇權價格的情況發生。

在 Tsao et al.(2003)文章中表 5 發現, 時間進入契約生效日後 $(T-h<t)$, 價內選擇權 (in the money options) 在高波動度時, 二階泰勒逼近封閉解會有高估選擇權價格的問題。這對於發行券商而言, 如果採用二階泰勒逼近封閉解時, 將高估避險比率 (Delta) 進而提高避險成本, 這是一大問題。至於一階泰勒近似封閉解數值, 不論高、低波動度時、價內價外都是有低估價值現象。所以也同樣有避險成本的問題, 未來研究可以考慮用內插法來解決高低估選擇權價值問題。

8. 結論與未來研究方向

在本文中, 使用泰勒展開式得到了四種匯率連動形式的亞洲選擇權的買權一階及二階泰勒近似封閉解以及避險參數,[25] 並且計算出它們的最大估計誤差上限值。文章最後舉例說明, 來評估衡量我們的近似封閉解, 發現具有可靠性。在低波動度時, 一階泰勒近似封閉解數值相對於二階泰勒近似封閉解公式簡單, 而且已經足夠。反之, 當高波動度時, 以二階泰勒近似封閉解數值來評價相對可靠。

近似封閉解可以節省利用數值方法所需耗費的龐大時間, 在實務上對於可以容忍最大誤差上限的, 不失為一好的近似值。最後, 當模型考慮發放股票股利為 q 時, 則僅需將所有公式中 S_t 替換成 $S_t\exp(-q(T-t))$ 即可。

---

[25] 關於避險參數的部分, 可以直接經由微分求得, 避免本文太過冗長, 根據匿名審稿人的意見, 此部分不在此列出, 讀者有興趣可嘗試計算或者向我們索取。

未來研究方向上, 可以探討除了泰勒展開式求算出近似封閉解外, 是否有其他逼近方法, 例如: Milesky and Posner(1998)考慮亞洲選擇權的漸進分配性質 — 倒數伽瑪機率分配(Reciprocal Gamma Distribution)— 推導出不同的近似封閉解。再者除了算出近似封閉解外, 若計算時間允許, 也可考慮數值方法來計算, 例如: ⑴ 使用蒙地卡羅方法, 搭配控制變異法(control variates)來求得。⑵ 從偏微分方程式(partial differential equation; PDE), 建構二元樹, 利用有限差分法(finite difference method)來探討解的收斂性(convergence)、解的一致性(consistency)、解的唯一性(uniqueness)等等問題作更進一步的探討。

附錄 1

假設兩隨機過程 $(z_t)_{t=0}^{T}$ 及 $(w_t)_{t=0}^{T}$ 為符合布朗運動, 兩者同期間的相關係數為 ρ, 不同期間為獨立, 定義一新的隨機過程 $(Y_t)_{t=0}^{T}$ 如下:

$$Y_T = \mu(T,t) + a_1(z_T - z_{T-h}) + a_2 \int_{T-h}^{T} (z_u - z_{T-h})du + b_1(w_T - w_{T-h}) + b_2 \int_{T-h}^{T} (w_u - w_{T-h})du, \quad (1A)$$

其中 $\mu(T,t)$ 僅為與時間長短有關的常數, a_1, a_2, b_1 及 b_2 皆為常數則 $Y_T|F_{T-h}$ 符合常態分配, 也就是

$$Y_T|F_{T-h} \sim n\Big(\mu(T,t), \big(a_1^2 + 2\rho a_1 b_1 + b_1^2\big)h + (a_1a_2 + \rho a_2 b_1 + \rho a_2 b_1 + b_1 b_2)h^2 + \frac{1}{3}\big(a_2^2 + 2\rho a_2 b_2 + b_2^2\big)h^3\Big). \quad (1B)$$

首先 Y_T 為兩常態分配的線性相加, 因此仍然符合常態分配。再來, 它的條件期望值, $\mathrm{E}[Y_T|F_{T-h}] = \mu(T,t)$, 這是因為布朗運動符合平賭過程。[26] 最後計算條件變異數, $\mathrm{Var}[Y_T|F_{T-h}]$, 因為計算繁雜, 所以先計算所需用到的一些條件變異數與條件共變異數: [27]

$$(1)\ \mathrm{Cov}\left(\int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du, \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\right)$$
$$= \mathrm{E}\left(\int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\right)$$

[26] 若一隨機過程 $(z_t)_{t=0}^{T}$ 符合布朗運動, 表示 $\mathrm{E}[Z_T - Z_{T-h}|F_{T-h}] = 0$。

[27] 因為增量的標準布朗運動為獨立, 所以 (1) 的第二等式可化為第三等式。

$$= \mathrm{E}\left(\int_0^h (z_u - z_0)du \int_0^h (w_u - w_0)du|F_0\right).$$

注意在此處的兩個積分 du 並非相同, 必免混淆底下將後者改以 dv, 另外在訊息集合 F_0 之條件下, 等於無條件訊息集合, 因此上式等於 [28]

$$\int_0^h \int_0^h \mathrm{E}\Big[(z_u - z_0)(w_v - w_0)\Big]dudv = \rho \int_0^h \int_0^h \mathrm{Min}(u, v)dudv = \frac{\rho h^3}{3}.$$

同理, 條件變異數僅將相關係數 ρ 等於 1 時, 可得

$$\mathrm{Var}\left(\int_{T-h}^T (z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\right) = \mathrm{Var}\left(\int_{T-h}^T (w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\right) = \frac{h^3}{3},$$

及

(2) $\mathrm{Cov}\left((z_u - z_{T-h}), \int_{T-h}^T (w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\right)$

$$= \int_0^h \mathrm{E}\Big[(z_u - z_0)(w_u - w_0)du|F_0\Big] = \rho \int_0^h udu = \frac{\rho h^2}{2}.$$

同理, 可得

$$\mathrm{Cov}\left((w_u - w_{T-h}), \int_{T-h}^T (z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\right) = \frac{\rho h^2}{2},$$

以及

$$\mathrm{Cov}\left((z_u - z_{T-h}), \int_{T-h}^T (z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\right)$$

---

[28] 對於布朗運動相關的計算細節, 請參見 Klebaner (1998), *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press.

$$= \mathrm{Cov}\Big((w_u - w_{T-h}), \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\Big) = \frac{h^2}{2}.$$

最後,

(3) $\mathrm{Cov}\Big((z_u - z_{T-h}), \big(w_u - w_{T-h})|F_{T-h}\Big) = \mathrm{E}\Big[(z_u - z_0)(w_u - w_0)|F_0\Big] = \rho h,$

以及

$$\mathrm{Var}\Big((z_T - z_{T-h})|F_{T-h}\Big) = \mathrm{Var}\Big((w_T - w_{T-h})|F_{T-h}\Big) = h.$$

現在我們開始計算 $\mathrm{Var}[Y_T|F_{T-h}]$, 利用 (1A) 式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y_T|F_{T-h}] &= a_1^2\mathrm{Var}\Big((z_T - z_{T-h})|F_{T-h}\Big) + a_2^2\mathrm{Var}\Big(\int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ b_1^2\mathrm{Var}\Big((w_T - w_{T-h})|F_{T-h}\Big) + b_2^2\mathrm{Var}\Big(\int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2a_1a_2\mathrm{Cov}\Big((z_u - z_{T-h}), \int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2a_1b_1\mathrm{Cov}\Big((z_u - z_{T-h}), (w_T - w_{T-h})|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2a_1b_2\mathrm{Cov}\Big((z_u - z_{T-h}), \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2a_2b_1\mathrm{Cov}\Big((w_u - w_{T-h}), \int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2a_2b_2\mathrm{Cov}\Big(\int_{T-h}^{T}(z_u - z_{T-h})du, \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\Big) \\
&+ 2b_1b_2\mathrm{Cov}\Big((w_u - w_{T-h}), \int_{T-h}^{T}(w_u - w_{T-h})du|F_{T-h}\Big)
\end{aligned}$$

根據先前已經計算的 (1)、(2) 及 (3), 經過合併化簡上式可得 (1B) 式中的條件變異數。

假設一隨機過程 $(Y_t)_{t=0}^{T}$, 在訊息集合 F_0 之條件下, 符合常態分配 $n(\mu_t, \sigma_t^2)$, 其中 μ_t 及 σ_t^2 分別表示條件期望值與條件變異數, 並且僅為與時間長短有關的常數, 則 [29]

$$\mathrm{E}\Big[\mathrm{Max}(Y_T,0)|F_{T-h}\Big] = \mathrm{E}[Y_T^+|F_{T-h}] = \mu_T N\left(\frac{\mu_T}{\sigma_T}\right) + \sigma_T g\left(\frac{\mu_T}{\sigma_T}\right), \qquad \text{(1C)}$$

其中 $N(x)$ 及 $g(x)$ 分別表示標準常態分配, 在點 x 上的累積機率值與機率密度函數值。

根據期望值的定義:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y_T^+|F_{T-h}] &= \mathrm{E}[Y_T|F_{T-h}] - \mathrm{E}[Y_T^-|F_{T-h}] \\ &= \mu_T - \int_{-\infty}^{0} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \exp\left(-\frac{(Y-\mu_T)^2}{2\sigma_T^2}\right) dY,\end{aligned}$$

利用變數變換, 令 $W = (Y-\mu_T)/\sigma_T$ 則 $Y = \mu_T + \sigma_T W$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}&\mu_T - \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_T}{\sigma_T}} (\mu_T + \sigma_T W)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{W^2}{2}\right) dW \\ &= \mu_T\left(1 - \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_T}{\sigma_T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{W^2}{2}\right) dW\right) \\ &\qquad\qquad -\sigma_T \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_T}{\sigma_T}} W \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{W^2}{2}\right) dW \\ &= \mu_T\left(1 - N\left(-\frac{\mu_T}{\sigma_T}\right)\right) + \sigma_T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{W^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{\mu_T}{\sigma_T}}\end{aligned}$$

[29] 為簡化符號以及計算方便, 我們在這裡及後面附錄中使用 $Y_T^+ = \mathrm{Max}(Y_T, 0)$ 及 $Y_T^- = \mathrm{Min}(Y_T, 0)$。

$$= \mu_T N\left(\frac{\mu_T}{\sigma_T}\right) + \sigma_T g\left(\frac{\mu_T}{\sigma_T}\right), \tag{1D}$$

其中 $N(\mu_T/\sigma_T) = \int_{-\infty}^{\mu_T/\sigma_T} \exp(-W^2/2)dW/\sqrt{2\pi}$ 以及 $g(\mu_T/\sigma_T) = \exp(-(\mu_T/\sigma_T)^2/2)/\sqrt{2\pi}$ 分別為標準常態分配在點 μ_T/σ_T 上的累積機率值及機率密度函數值。

附錄 2

在風險中立評價法下, 在時間 t $(0 \le t < T)$, 利用 (4) 式以及期末報酬 (5) 式, 選擇權的買權理論價格為

$$C_1(S_T, K_T, t) = e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[\bar{X} \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)|F_t\Big]. \tag{2A}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 根據循序漸進條件期望定律 [30] (The Law of Iterated Conditional Expectations), 將 (2A) 式重寫如下:

$$C_1(S_T, K_T, t) = \bar{X} \cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[\mathrm{E}^Q[\mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)]|F_{T-h}|F_t\Big].$$

同時利用 (1) 式, 將外國股價 $S_T = S_{T-h}\exp((r_f - \rho\sigma_S\sigma_X - \sigma_S^2/2)\ h + \sigma_S(z_T^Q - z_{T-h}^Q))$ 以及履約價代入上式可得

$$\bar{X} \cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Bigg[S_{T-h}\mathrm{E}^Q\Bigg[\Bigg[e^{r_1 h + \sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right)} - \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} e^{r_1(u-(T-h)+\sigma_S\left(z_u^Q - z_{T-h}^Q\right)}du\Bigg]^+ |F_{T-h}\Bigg]|F_t\Bigg], \tag{2B}$$

[30] 所謂循序漸進條件期望定律說明如下: 對於隨機變數 (X_t) 而言, $0 < t < u < s < T$, $\mathrm{E}[X_s|F_t = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_s|F_u]|F_t]$。更詳細的說明與運用請參見 Duffie (1988), *Security Markets: Stochastic Models*, New York: Academic Press。

其中令 $r_1 = r_f - \rho\sigma_S\sigma_X - \sigma_S^2/2$, 為求封閉解, 我們對上式的指數函數以一階泰勒展開式表示如下:

$$e^{r_1 h + \sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right)} \cong 1 + r_1 h + \sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right), \tag{2C}$$

$$e^{r_1(u-(T-h)) + \sigma_S\left(z_u^Q - z_{T-h}^Q\right)} \cong 1 + r_1(u-(T-h)) + \sigma_S\left(z_u^Q - z_{T-h}^Q\right). \tag{2D}$$

(2B) 式內中括號的指數函數及積分項之相差以 Y_{1T} 表示之, 再將 (2C) 式及 (2D) 式代入 Y_{1T} 獲得

$$\begin{aligned} Y_{1T} &\cong 1 + r_1 h + \sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right) \\ &\qquad - \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}\left[1 + r_1\left(u-(T-h)\right) + \sigma_S\left(z_u^Q - z_{T-h}^Q\right)\right]du \\ &= \frac{r_1 h}{2} + \sigma_S\left(z_T^Q - z_{T-h}^Q\right) - \frac{\sigma_S}{h}\int_{T-h}^{T}\left(z_u^Q - z_{T-h}^Q\right)du. \end{aligned}$$

根據附錄 1 的 (1A) 式的計算（當 $\mu(t,T) = r_1 h/2,\ a_1 = \sigma_S,\ a_2 = -\sigma_S/h,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0$）時

$$Y_{1T}|F_{T-h} \sim n\left(\frac{r_1 h}{2}, \frac{\sigma_S^2 h}{3}\right) \equiv n\left(\mu_1^{FO},\ (v_1^{FO})^2\right). \tag{2E}$$

所以, (2B) 式內的第二個期望值, 根據附錄1 的 (1C) 式及 (2E) 式可得 [31]

$$\mathrm{E}[Y_{1T}^{+}|F_{T-h}] = \mu_1^{FO} N\left(\frac{\mu_1^{FO}}{v_1^{FO}}\right) + v_1^{FO} g\left(\frac{\mu_1^{FO}}{v_1^{FO}}\right).$$

因此, 選擇權的買權理論價格 (2B) 式可以改寫為

[31] 值得一提, 所計算出的 $\mathrm{E}[Y_{1T}^{+}|F_{T-h}]$ 是一常數與訊息集合 F_t 無關。

$$
\begin{aligned}
&\bar{X}\cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[S_{T-h}\mathrm{E}^Q[Y_{1T}^{+}|F_{T-h}]|F_t\Big]\\
&\quad=\bar{X}\cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[S_{T-h}|F_t]\cdot\mathrm{E}^Q[Y_{1T}^{+}|F_{T-h}]\\
&\quad=\bar{X}\cdot S_t\cdot e^{-r_d(T-t)}\cdot e^{(r_f-\rho\sigma_S\sigma_X)(T-t-h)}\times\\
&\qquad\left\{\mu_1^{FO}N\left(\frac{\mu_1^{FO}}{v_1^{FO}}\right)+v_1^{FO}g\left(\frac{\mu_1^{FO}}{v_1^{FO}}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

情況 2: 當 $t\in[T-h,T]$ 時, 履約價的平均值已累積一部分, 故可將履約價拆成兩部分如下:

$$
K_T=\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}S_u du=\frac{1}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du+\frac{1}{h}\int_{t}^{T}S_u du=M_{1t}+\frac{1}{h}\int_{t}^{T}S_u du,
$$

其中 $M_{1t}=\left(\int_{T-h}^{t}S_u du\right)/h$ 表示已知部分。

選擇權的買權理論價格為[32]

$$
\begin{aligned}
&C_1(S_T,K_T,t)\\
&\quad=\bar{X}\cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{Max}\left(S_T-M_{1t}-\frac{1}{h}\int_t^T S_u du,0\right)|F_t\right]|F_t\right] &\text{(2F)}\\
&\quad\cong\bar{X}\cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[S_t\mathrm{E}^Q\left[Y_{2T}^{+}|F_t\right]|F_t\right]=\bar{X}\cdot S_{T-h}\cdot e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q[Y_{2T}^{+}|F_t]\\
&\quad=\bar{X}\cdot S_{T-h}\cdot e^{-r_d(T-t)}\left\{m_{1T}^{FO}N\left(\frac{m_{1T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)+\sigma_{1T}^{FO}g\left(\frac{m_{1T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)\right\}. &\text{(2G)}
\end{aligned}
$$

此處相似於當 $t\in[0,T-h)$ 時的計算方式, 說明如下:

[32] 當 $t=T-h$ 時, $m_{1t}^{FO}=r_1,\ M_{1t}=0$, 情況 1 與情況 2 答案相同。

$$
\begin{aligned}
Y_{2T} &\cong 1 + r_1(T-t) - \frac{M_{1T}}{S_t} + \sigma_S\Big(z_T^Q - z_t^Q\Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{h}\int_t^T \Big[1 + r_1(u-t) + \sigma_S\Big(z_u^Q - z_t^Q\Big)\Big] du \\
&= 1 - \frac{T-t}{h} + r_1\left(\frac{2(T-t)h - (T-t)^2}{2h}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{M_{1T}}{S_t} + \sigma_S\Big(z_T^Q - z_t^Q\Big) - \frac{\sigma_S}{h}\int_t^T \Big(z_u^Q - z_t^Q\Big) du \\
&= m_{1T} + \sigma_S\Big(z_T^Q - z_t^Q\Big) - \frac{\sigma_S}{h}\int_t^T \Big(z_u^Q - z_t^Q\Big) du,
\end{aligned}
$$

其中 $m_{1T}^{FO} = 1 - (T-t)/h + r_1[2(T-t)h - (T-t)^2]/(2h) - M_{1t}/S_t$, 再次利用附錄 1 (1B) 式（當 $\mu(t,T) = m_{1T}^{FO}$, $a_1 = \sigma_S$, $a_2 = -\sigma_S/h$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$）並將積分下限由 $T-h$ 改為 t, 可得:

$$
Y_{1T}|F_{T-h} \sim n\Big(m_{1T}^{FO}, (\sigma_{1T}^{FO})^2\Big),
$$

其中 $(\sigma_{1T}^{FO})^2 = [1 - (T-t)/h + (T-t)^2/(3h^2)]\sigma_S^2(T-t)$, 最後利用附錄 1 (1C) 式可得 (2G) 式。

同理, 我們若考慮以二階泰勒展開式逼近時, 重複之前計算可分別求得當 $t \in [0, T-h)$ 及 $t \in [T-h, T]$ 時的二階逼近期望值與變異數如下:

當 $t \in [0, T-h)$ 時, 期望值為 $\mu_1^{SO} = \mu_1^{FO} + (r_1 h)^2/3 + (\sigma_S^2 h)/4$ 以及變異數為 $(v_1^{SO})^2 = (v_1^{FO})^2 + (\sigma_S^4 h^2)/4 + 7(r_1^2\sigma_S^2 h^3)/15 + 3(r_1\sigma_S^2 h^2)/4$。 當 $t \in [T-h, T]$ 時, 期望值為 $m_{1T}^{SO} = m_{1T}^{FO} + \sigma_S^2(T-t)/2 + (T-t)^2(r_1^2/2 - \sigma_S^2/(4h)) - r_1^2(T-t)^3/(6h)$ 以及變異數為 $(\sigma_{1T}^{SO})^2 = (\sigma_{1T}^{FO})^2 + 2r_1^2\sigma_S^4(T-t)^5/(15h^2) + \sigma_S^2(T-t)^4((\sigma_S^2 + 5r_1)/(12h^2) - 2r_1^2/(3h)) + \sigma_S^2(T-t)^3(r_1^2 - (5r_1 + \sigma_S^2/3h)) + \sigma_S^2(T-t)^2(2r_1 + \sigma_S^2/2)$。再次利用利用附錄 1 (1C) 式, 可得二階泰勒近似封閉解。

附錄 3

在風險中立評價法下, 在時間 t $(0 \leq t < T)$, 利用 (4) 式以及期末報酬 (10) 式, 選擇權的買權理論價格為

$$C_1(S_T, K_T, t) = e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[X_T \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)|F_t\Big]. \tag{3A}$$

情況 1: 當 $t \in [0, T-h)$ 時, 根據循序漸進條件期望定律, 以及利用(2) 式的匯率過程, 將 (3A) 式重寫如下:

$$C_2(S_T, K_T, t) = e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\mathrm{E}^Q\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma_X^2 h+\sigma_X\left(w_T^Q - w_{T-h}^Q\right)} \times \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)|F_{T-h}\right]|F_t\right], \tag{3B}$$

然後利用 Girsanov [33] 定理, 將 (3B) 式內的中括號從風險中立測度（Q-measure）轉換成另一測度（R-measure）, 其中測度轉換為$\beta_{1t} = \sigma_X, \beta_{2t} = 0$,

$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\mathrm{E}^R\left[\mathrm{Max}(S_T - K_T, 0)|F_{T-h}\right]|F_t\right].$$

因此, 在 R-measure 下, 外國股價 $S_T = S_{T-h}\exp((r_f - \sigma_S^2/2)h + \sigma_S(z_T^R - z_{T-h}^R))$ 以及履約價代入上式可得

[33] 在此僅運用 Giansov 定理來計算, 嚴謹的證明請參閱 Karatzas and Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, pp.190–196, Springer-Varlag。 也就是說, 令 $\xi_T = \exp\left(\int_0^T \beta_{1t}dw_X^Q + \int_0^T \beta_{2t}dz_S^Q - 1/2\int_0^T(\beta_{1t}^2 + 2\rho\beta_{1t}\beta_{2t} + \beta_{2t}^2)dt\right)$, 在新的機率測度 R 下的布朗運動可由風險中立機率測度 Q 下的布朗運動轉換, 以公式表示如下:

$$dw_X^Q = dw_X^R + (\beta_{1t} + \rho\beta_{2t})dt \quad 與 \quad dz_S^Q = dz_S^R + (\rho\beta_{1t} + \beta_{2t})dt.$$

因此, $\mathrm{E}^Q[\xi_T \cdot 1_A] = \mathrm{E}^R[1_A]$, 其中 1_A 為一指示函數。

$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Bigg[X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\cdot S_{T-h}\mathrm{E}^R\Bigg[\Big[e^{r_2h+\sigma_S(z_T^R-z_{T-h}^R)}$$

$$-\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}e^{r_2(u-(T-h))+\sigma_S(z_u^R-z_{T-h}^R)}du\Big]^+|F_{T-h}\Bigg]|F_t\Bigg],\quad \text{(3C)}$$

其中令 $r_2=r_f-\sigma_S^2/2$。

求算近似封閉解的過程中必須作泰勒展開式以及求算條件期望值與條件變異數, 觀察 (2B) 式及 (3C) 式內的中括號, 除了 r_1 替換成 r_2 外, 以及原先在 Q-measure 轉變成 R-measure 下, 其他各項不變。因此, 選擇權的買權理論價格 (3C) 可以改寫為

$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\cdot S_{T-h}|F_t\right]\left\{\mu_2^{FO}N\left(\frac{\mu_2^{FO}}{v_1^{FO}}\right)+v_1^{FO}g\left(\frac{\mu_2^{FO}}{v_1^{FO}}\right)\right\},$$

$$=X_t\cdot S_te^{-r_fh}\left\{\mu_2^{FO}N\left(\frac{\mu_2^{FO}}{v_1^{FO}}\right)+v_1^{FO}g\left(\frac{\mu_2^{FO}}{v_1^{FO}}\right)\right\},\quad \text{(3D)}$$

其中 $\mu_2^{FO}=(r_2h)/2$, 上式中的等號是用到以本國貨幣計價的外國資產隨機過程 (3) 式。

情況 2: 當 $t\in[T-h,T]$ 時, 履約價的平均值已累積一部分, 故可將履約價拆成兩部分如下:

$$K_T=\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}S_udu=\frac{1}{h}\int_{T-h}^{t}S_udu+\frac{1}{h}\int_{t}^{T}S_udu=M_{1t}+\frac{1}{h}\int_{t}^{T}S_udu,$$

其中 $M_{1t}=\left(\int_{T-h}^{t}S_udu\right)/h$ 表示已知部分。因此, 選擇權的買權理論價格為

$$C_2(S_T,K_T,t)$$

$$=e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\Bigg[X_te^{(r_d-r_f)(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[e^{-\frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)+\sigma_X(w_T^Q-w_t^Q)}\times$$

$$\mathrm{Max}\Big(S_T-M_{1t}-\frac{1}{h}\int_{t}^{T}S_udu,0\Big)|F_t\Big]|F_t\Bigg]$$

$$= e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_t e^{(r_d-r_f)(T-t)}\mathrm{E}^R\left[\mathrm{Max}\left(S_T - M_{1t} - \frac{1}{h}\int_t^T S_u du, 0\right)|F_t\right]|F_t\right]. \tag{3E}$$

同理, 求算近似封閉解的過程中必須作泰勒展開式以及求算條件期望值與條件變異數, 比較 (2F) 式及 (3E) 式, 求算 (3E) 式內的中括號, 除了 r_1 替換成 r_2 外, 以及原先在 Q-measure 轉變成 R-measure 下, 其他各項不變。因此, 選擇權的買權理論價格 (3E) 可以改寫為

$$e^{-r_d(T-t)}\mathrm{E}^Q\left[X_t e^{(r_d-r_f)(T-t)}\cdot S_t|F_t\right]\left\{m_{2T}^{FO}N\left(\frac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)+\sigma_{1T}^{FO}g\left(\frac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)\right\}$$

$$= X_t\cdot S_t e^{-r_f(T-t)}\left\{m_{2T}^{FO}N\left(\frac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)+\sigma_{1T}^{FO}g\left(\frac{m_{2T}^{FO}}{\sigma_{1T}^{FO}}\right)\right\},$$

其中 $m_{2T}^{FO} = 1-(T-t)/h + r_2[2(T-t)h-(T-t)^2]/(2h) - M_{1t}/S_t$。

同理, 我們若考慮以二階泰勒展開式逼近時, 重複之前計算可分別求得當 $t\in[0,T-h)$ 及 $t\in[T-h,T]$ 時的二階逼近期望值與變異數如下:

當 $t\in[0,T-h)$ 時, 期望值為 $\mu_2^{SO} = \mu_2^{FO} + (r_2h)^2/3 + (\sigma_S^2h)/4$ 以及變異數為 $(v_2^{SO})^2 = (v_2^{FO})^2 + (\sigma_S^4h^2)/4 + 7(r_2^2\sigma_S^2h^3)/15 + 3(r_2\sigma_S^2h^2)/4$、$(v_2^{FO})^2 = (v_1^{FO})^2$。當 $t\in[T-h,T]$ 時, 期望值為 $m_{2T}^{SO} = m_{2T}^{FO} + \sigma_S^2(T-t)/2 + (T-t)^2(r_2^2/2-\sigma_S^2/(4h)) - r_2^2(T-t)^3/(6h)$ 以及變異數為 $(\sigma_{2T}^{SO})^2 = (\sigma_{2T}^{FO})^2 + 2r_2^2\sigma_S^4(T-t)^5/(15h^2) + \sigma_S^2(T-t)^4((\sigma_S^2+5r_2)/(12h^2) - 2r_2^2/(3h)) + \sigma_S^2(T-t)^3(r_2^2-(5r_2+\sigma_S^2/(3h))) + \sigma_S^2(T-t)^2(2r_2+\sigma_S^2/2)$。再次利用利用附錄 1 (1C) 式, 可得二階泰勒近似封閉解。

附錄 4

首先依泰勒展開式可以得到下列性質:

(1) $e^x \geq 1 + x, \qquad \forall x \in \Re.$

(2) $\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq e^x - 1 - x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^2}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\frac{(p+2)!}{2}} \leq \frac{x^2}{2} e^x,$

$$\left(\because \frac{(p+2)!}{2} \geq p!, \ \ \forall p \geq 0 \right).$$

(3) $\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^3}{6} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\frac{(p+3)!}{6}} \leq \frac{x^3}{6} e^x,$

$$\left(\because \frac{(p+2)!}{3!} \geq p!, \ \ \forall p \geq 0 \right).$$

根據定義, 固定匯率連動之下遠期生效(股票)亞洲選擇權的買權精確價格為

$$\begin{aligned} C_1^E(S_T, K_T, 0) &= e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big[\bar{X} \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0) \Big] \\ &= \bar{X} e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left[S_{T-h} \mathrm{E}^Q \left[\frac{S_T}{S_{T-h}} - \frac{K_T}{S_{T-h}} \right]^+ \right] \\ &= \bar{X} e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left[S_{T-h} \mathrm{E}^Q (V_T - U_T)^+ \right], \end{aligned} \tag{4A}$$

其中 $V_T = S_T / S_{T-h}$ 與 $U_T = K_T / S_{T-h}$ 以及近似封閉解公式

$$\begin{aligned} C_1(S_T, K_T, 0) = \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Bigg[S_{T-h} \Bigg[& 1 + r_1 h + \sigma_S \Big(z_T^Q - z_{T-h}^Q \Big) \\ & - \frac{1}{h} \int_{T-h}^{T} \Big[1 + r_1 (u - (T-h)) + \sigma_S \Big(z_u^Q - z_{T-h}^Q \Big) \Big] \, du \Bigg]^+ \Bigg] \end{aligned}$$

$$= \bar{X} e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left[S_{T-h} \mathrm{E}^Q (G_T - H_T)^+ \right], \tag{4B}$$

其中 $G_u = 1 + r_1(u - (T-h)) + \sigma_S(z_u^Q - z_{T-h}^Q)$ 與 $H_T = \left(\int_{T-h}^{T} G_u du \right)/h$, 兩者分別為 V_u 與 U_T 的一階泰勒展開式。因此, 最大誤差上限為 [34]

$$\begin{aligned}
&\left| C_1(S_T, K_T, 0) - C_1^E(S_T, K_T, 0) \right| \\
&= \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big\{ S_{T-h} \mathrm{E}^Q \big| [U_T - V_T]^+ - [G_T - H_T]^+ \big| \Big\} \\
&\leq \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big\{ S_{T-h} \Big\{ \mathrm{E}^Q \big| [U_T - V_T]^+ - [G_T - V_T]^+ \big| \\
&\qquad + \mathrm{E}^Q \big| [G_T - V_T]^+ - [G_T - H_T]^+ \big| \Big\} \Big\} \text{（三角不等式）} \\
&\leq \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big\{ S_{T-h} \Big\{ \mathrm{E}^Q |U_T - G_T| + \mathrm{E}^Q |V_T - H_T| \Big\} \Big\} \text{（利用附註 34）} \\
&\leq \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big\{ S_{T-h} \Big\{ \mathrm{E}^Q (U_T - G_T) + \mathrm{E}^Q (V_T - H_T) \Big\} \Big\} \text{（利用性質 (2) 可得）} \\
&\leq \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left\{ S_{T-h} \left\{ \left(e^{(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} - (1 + r_1 h) \right) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\frac{e^{(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} - 1}{\left(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right) h} - \left(1 + \frac{r_1 h}{2} \right) \right) \right\} \right\} \text{（計算期望值）} \\
&\leq \bar{X} \cdot e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left\{ S_{T-h} \left\{ \left(\frac{\left(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right)^2 h^2}{2} e^{(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 h \right) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\frac{\left(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right)^2 h^2}{6} e^{(r_1 + \frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + \frac{1}{4}\sigma_S^2 h \right) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

（利用性質可得 (2) 及 (3) 可得）

[34] 考慮函數 $x \to x^+$ 符合一階 Lipschitzian 條件表示 $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$。

$$= \bar{X} \cdot e^{-r_d T} S_0 e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h)} \left(\frac{2\left(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^2 h^2}{3} e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + \frac{3}{4}\sigma_S^2 h \right).$$

同理, 我們可計算二階泰勒近似封閉解的最大誤差上限為

$$\bar{X} \cdot e^{-r_d T} S_0 e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-h)} \left(\frac{5\left(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^3 h^3}{24} e^{(r_1+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + r_1\sigma_S^2 h \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sigma_S^4 h^2 + \frac{(2r_1^2+4r_1\sigma_S^2+\sigma_S^4)h^3}{12} \right).$$

根據定義, 浮動匯率連動之下遠期生效(股票)亞洲選擇權的買權精確值為

$$\begin{aligned} C_2^E(S_T, K_T, 0) &= e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \Big[X_T \cdot \mathrm{Max}(S_T - K_T, 0) \Big] \\ &= e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left[X_{T-h} e^{(r_d-r_f)h} S_{T-h} \mathrm{E}^R \left[\frac{S_T}{S_{T-h}} - \frac{K_T}{S_{T-h}} \right]^+ \right], \end{aligned} \tag{4C}$$

以及近似封閉解公式

$$\begin{aligned} &C_2(S_T, K_T, 0) \\ &\quad = e^{-r_d T} \mathrm{E}^Q \left[X_{T-h} e^{(r_d-r_f)h} S_{T-h} \mathrm{E}^R \left[1 + r_2 h + \sigma_S \Big(z_T^R - z_{T-h}^R \Big) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \frac{1}{h} \int_{T-h}^{T} \left[1 + r_2(u-(T-h)) + \sigma_S \Big(z_u^R - z_{T-h}^R \Big) \right] du \right]^+ \right]. \end{aligned} \tag{4D}$$

在計算最大誤差上限時, 觀察 (4A) 式、(4B) 式與 (4C) 式、(4D) 式內中括號, 兩者差異為從 Q-measure 轉換成 R-measure, 它的表現就是 r_1 取代成為 r_2。

因此, 套用已經計算部分可得

$$
\begin{aligned}
&|C_2(S_T,K_T,0)-C_2^E(S_T,K_T,0)| \\
&\le e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\left[X_{T-h}e^{(r_d-r_f)h}\cdot S_{T-h}\left(\frac{2(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)^2h^2}{3}e^{(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+\frac{3}{4}\sigma_S^2h\right)\right] \\
&= e^{-r_fh}X_0S_0\left(\frac{2\left(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^2h^2}{3}e^{(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+\frac{3}{4}\sigma_S^2h\right).\ \text{（利用附註 11）}
\end{aligned}
$$

同理, 我們可計算二階泰勒近似封閉解的最大誤差上限為

$$
e^{-r_fh}X_0S_0\left(\frac{5\left(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)^3h^3}{24}e^{(r_2+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h}+r_2\sigma_S^2h\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{4}\sigma_S^4h^2+\frac{(2r_2^2+4r_2\sigma_S^2+\sigma_S^4)h^3}{12}\right).
$$

根據定義, 浮動股價之下的遠期生效(匯率)亞洲選擇權的買權精確價格為

$$
\begin{aligned}
C_3^E(X_T,L_T,t) &= e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\Big[S_T\cdot\mathrm{Max}(X_T-L_T,0)\Big] \\
&= e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\left[S_{T-h}e^{(r_f-\rho\sigma_S\sigma_X)h}X_{T-h}\mathrm{E}^R\left[\frac{X_T}{X_{T-h}}-\frac{L_T}{X_{T-h}}\right]^+\right], \qquad \text{(4E)}
\end{aligned}
$$

以及近似封閉解公式

$$
\begin{aligned}
&C_3(X_T, L_T, 0)\\
&\quad = e^{-r_d T}\mathrm{E}^Q\Bigg[S_{T-h}e^{(r_f-\rho\sigma_S\sigma_X)h}X_{T-h}\mathrm{E}^R\Bigg[1 + r_3 h + \sigma_X\Big(w_T^R - w_{T-h}^R\Big)\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}\Big[1 + r_3(u-(T-h)) + \sigma_X\Big(w_u^R - w_{T-h}^R\Big)\Big]du\Bigg]^+\Bigg]. \quad (4F)
\end{aligned}
$$

在計算最大誤差上限時, 觀察 (4C) 式、(4D) 式與 (4E) 式、(4F) 式內中括號, 兩者差異為隨機變數由 S_t 取代為 X_t, 它的表現就是 r_2、σ_S 與 z^R 取代成為 r_3、σ_X 與 w^R。因此, 套用已經計算部分可得

$$
\begin{aligned}
&|C_3(X_T, L_T, 0) - C_3^E(X_T, L_T, 0)|\\
&\leq e^{-r_d T}\mathrm{E}^Q\left[S_{T-h}e^{(r_f-\rho\sigma_S\sigma_X)h}X_{T-h}\left(\frac{2\left(r_3+\frac{1}{2}\sigma_X^2\right)^2 h^2}{3}e^{(r_3+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}+\frac{3}{4}\sigma_X^2 h\right)\right]\\
&= S_0X_0e^{-(r_3+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}\left(\frac{2\left(r_3+\frac{1}{2}\sigma_X^2\right)^2 h^2}{3}e^{(r_3+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}+\frac{3}{4}\sigma_X^2 h\right).
\end{aligned}
$$

同理, 我們可計算二階泰勒近似封閉解的最大誤差上限為

$$
\begin{aligned}
&e^{-r_d h}S_0X_0\left(\frac{5\left(r_3+\frac{1}{2}\sigma_{XS}^2\right)^3 h^3}{24}e^{(r_3+\frac{1}{2}\sigma_{XS}^2)h}+r_3\sigma_{XS}^2 h\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left. + \frac{1}{4}\sigma_{XS}^4 h^2 + \frac{(2r_3^2+4r_3\sigma_{XS}^2+\sigma_{XS}^4)h^3}{12}\right).
\end{aligned}
$$

根據定義, 以本國貨幣計價之下外國資產的遠期生效亞洲選擇權的買權精確價格為

$$C_4^E(X_TS_T, J_T, 0) = e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\Big[\mathrm{Max}(X_TS_T - J_T, 0)\Big]$$
$$= e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\left[X_{T-h}S_{T-h}\mathrm{E}^Q\left[\frac{X_TS_T}{X_{T-h}S_{T-h}} - \frac{L_T}{X_{T-h}S_{T-h}}\right]^+\right], \qquad (4G)$$

以及近似封閉解公式

$$C_4(X_TS_T, J_T, 0)$$
$$= e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\Bigg[X_{T-h}S_{T-h}\mathrm{E}^R\Bigg[1 + r_4h + \sigma_S\Big(z_T^R - z_{T-h}^R\Big) + \sigma_X\Big(w_T^R - w_{T-h}^R\Big)$$
$$-\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}\Big[1 + r_4(u-(T-h)) + \sigma_S\Big(z_u^R - z_{T-h}^R\Big)\sigma_X\Big(w_u^R - w_{T-h}^R\Big)\Big]du\Bigg]^+\Bigg]. \qquad (4H)$$

在計算最大誤差上限時, 觀察 (4C) 式、(4D) 式與 (4G) 式、(4H) 式內中括號, 兩者差異為隨機變數由 S_t 取代為 X_tS_T, 它的表現就是 r_2、σ_S 取代成為 r_3、σ_{XS}。因此, 套用已經計算部分可得

$$|C_4(X_TS_T, J_T, 0) - C_3^E(X_TS_T, J_T, 0)|$$
$$\leq e^{-r_dT}\mathrm{E}^Q\left[S_{T-h}X_{T-h}\left(\frac{2\left(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2\right)^2h^2}{3}e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_{XS}^2)h} + \frac{3}{4}\sigma_{XS}^2h\right)\right]$$
$$= e^{-r_dh}S_0X_0\left(\frac{2\left(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_{XS}^2\right)^2h^2}{3}e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_{XS}^2)h} + \frac{3}{4}\sigma_{XS}^2h\right).$$

同理, 我們可計算二階泰勒近似封閉解的最大誤差上限為

$$S_0X_0e^{-(r_4+\frac{1}{2}\sigma_X^2)h}\left(\frac{5\left(r_4 + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)^3h^3}{24}e^{(r_4+\frac{1}{2}\sigma_S^2)h} + r_4\sigma_X^2h\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sigma_X^4h^2 + \frac{(2r_4^2 + 4r_4\sigma_X^2 + \sigma_X^4)h^3}{12}\right).$$

參考文獻

Bouaziz, L., E. Briys, and M. Crouhy (1994), "The Pricing of Forward-Starting Asian options," *Journal of Banking and Finance*, 18, 823–839.

Conze, A. and Viswanathan (1991), "European Path Dependent Options: The Case of Geometric Averages," *Finance*, 12, 7–22.

Duffie, D. (1988), *Security Markets: Stochastic Models*, New York: Academic Press.

Harrision, M. and D. Krep (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

Harrision, M. and S. Pliska (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215–271.

Karatzas, I. and S. Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, Springer-Varlag.

Kemna, A. and T. Vorst (1990), "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values," *Journal of Banking and Finance*, 14, 113–129.

Klebaner, F. C. (1998), *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press.

Levy, E. (1992), "Pricing European Average Rate Currency Options," *Journal of International Money and Finance*, 11(5), 474–491.

Milesky, M. A. and S. E. Posner (1998), "Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33(3), 409–422.

Musiela, M. and M. Rutkowski (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, 160–164 Springer.

Reiner, E. (1992), "Quanto Mechanics," *Risk*, 5(10), 59–63.

Tsao, C. Y., C. C. Chang, and C. G. Lin (2003), "Analytic Approximation Formulate for Pricing Forward-Starting Asian Options," *Journal of Futures Markets*, 23, April (forthcoming).

Turnbull, S. M. and L. MacDonald Wakeman (1991), "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3), 377–389.

經濟論文 32 : 1 (2004)

QUANTO FORWARD-START ASIAN OPTIONS

Son-Nan Chen *

Department of Money and Banking
National Chengchi University

I-Ming Jiang

Department of Finance
China Institute of Technology

Keywords: Exotic option, Quanto option, Asian option
JEL classification: G13

* Correspondence: Son-Nan Chen, Department of Money and Banking, National Chengchi University, Taipei 116, Taiwan. Tel: (02) 2939-3091 ext. 81016; Fax: (02) 2939-8004; E-mail: slchen@nccu-edu.tw.

ABSTRACT

In this paper, we propose several Quanto Forward-Start Asian options for investors who wish to hedge both currency risk and the risk of being possibly manipulated by some market participants. Although Asian options have no closed-form solutions, we try to find the "approximate" closed-form solution and compute hedge parameters for them. In addition, we also determine the upper bound of maximum estimation error of our pricing model. The numerical results show that the difference between the first-order and the second-order Taylor's expansion of approximate closed-form solution is not significant when the volatility is small. Under this circumstance, we can simply use first-order Taylor's expansion of approximate closed-form solution. However, second-order Taylor's expansion of approximate closed-form solution is employed when the volatility is large.