國立政治大學商學院金融學系碩士班

碩士論文

Graduate Institute of Money and Banking

National Cheng-Chi University

Master Thesis

CoVaR 在資產配置下之應用

An Application of CoVaR on Asset Allocation

研究生：藍婉如

指導教授：陳威光　博士

郭維裕　博士

中華民國一零一年六月

誌　謝

記得大學畢業那年，沒能考上心目中理想的研究所，突然不知道自己的未來在哪裡？垂頭喪氣了好一陣子，憑著一股不服輸的倔強重新努力，現在不但如願進了政大金融所還將論文順利完成了！除了欣喜完成自己的願望，更多的是感謝一直陪伴我的你們。

首先感謝我敬愛的指導教授-陳威光博士與郭維裕博士，謝謝兩位教授總是不厭其煩地替我解惑、提點我方向，並帶領著我不斷思考、加以改進，讓我能如期將論文完成；更感激教授在為人處事上對我的關懷與照顧，讓我在面對未知未來時，能更加堅信地邁出下一步。

其次要感謝研究所的好夥伴們，謝謝你們的陪伴與包容，讓我最後的求學生涯留下最美好的回憶；謝謝乃項陪我走過的風風雨雨，讓我更加成長；也謝謝應數所的澤佑，幫助我解決程式大大小小的問題；還要感謝總是陪在我身邊的君龍，不論是學業還是生活，一直給我莫大的幫助與力量，真的謝謝能有你和我一起走過。

最後，要感謝我最親愛的家人陪我一路走來，謝謝你們的付出與犧牲，讓我從小就有充裕的生活可以好好學習，因為有你們對我不間斷的支持與鼓勵，讓我能有機會朝自己的理想前進、有此刻小小的成就和你們分享，謝謝你們一直當我最溫暖的後盾，未來我也會更加努力成為你們信賴的依靠。

藍婉如　謹誌於

國立政治大學　金融所

中華民國一〇二年三月

摘　要

金融市場中個別資產的風險感染效果越趨嚴重，使得傳統資產配置理論下的投資組合面臨極大的虧損。有鑑於此，若能在投資組合模型中納入考量此種擴散效果，將可更加分散風險以增進投資組合的效率性，並進一步降低投資組合面臨極端虧損的可能性。因此，要如何納入此一風險擴散效果，以在良好的風險控管下進行資產配置，將可能遭受的損失降至最低，是本論文主要探討的問題。

本研究延伸Adrian, Brunnermeierz (2009) CoVaR的概念，納入考量系統性風險因素，透過CoVaR模型衡量系統性風險擴散時，造成個別標的資產報酬率變動的程度，並將Markowitz的效率前緣加以改良，建構更具效率性的Mean-CoVaR資產配置模型，以計算新的最適配置權重與最適投資組合。此外，本研究也就Mean-CoVaR資產配置模型與傳統Markowitz(1952)所提出的Mean-Variance模型進行探討與比較。

綜合本研究之實證結果，Mean-Variance模型雖然能使投資組合報酬率的波動度最小，但在面臨極端系統性風險下，其績效表現卻不如Mena-CoVaR模型所建構出的投資組合；因此，在傳統的Mean-Variance模型下，若能以CoVaR取代Variance所建構出新的Mean-CoVaR投資組合模型，納入大盤風險可能的擴散效果下，將可有效降低投資組合在大盤崩跌時的虧損程度，以維持較佳的投資績效。

目　錄

表目錄

圖目錄

第一章 緒論

第一節 研究背景

1952年，諾貝爾經濟學獎得主Markowitz發表投資組合理論，其將風險加以量化，提出均數－變異數投資組合模型(Mean-Variance Portfolio Model)，自此奠定了現代投資組合理論的基礎。Mean-Variance模型係利用各資產的平均報酬率、報酬率的變異數與共變異數決定各資產間最適權重配置，以求解最佳投資組合；此模型總合考量投資組合的風險及報酬，將資金分散投資於多個風險性資產上，以避免風險過於集中於單一資產，並提供投資者進行投資決策時，從風險與報酬的取捨關係中(Trade-off)尋求最佳的投資組合。Mean-Variance模型自發表以來已逾60年，至今仍被廣泛應用於各類資產配置決策中。

在Markowitz的理論下，係採投資組合報酬的變異數來衡量投資風險，以建構效率投資前緣(Efficient Frontier)，達到單一風險下最大報酬，且固定報酬下極小化風險的效果，即最具效率性資產配置組合。而隨著金融市場的發展，風險管理在金融體系越顯重要，衡量風險的方法也跟著推陳出新，從傳統使用的變異數/標準差，到1996年Jorion提出的風險值(Value at Risk, VaR)的觀念，以及Artzner et al.於1999年提出條件風險值(Conditional VaR)等，這些新的概念很快地被後期的學者應用在資產配置決策中，運用不同的風險衡量方法以確切掌握投資組合的風險，增進投資的效率性。

此外近年來金融市場整合日益密切，使得資產間相互影響程度更加劇烈，且隨著科技進步，資訊的傳達越來越快，資訊網絡已將個別市場連成一體，更造成單一資產問題透過高度的市場連動而擴散成系統性危機。在金融市場

快速發展下，產品不斷創新，相對的也容易產生極不穩定的風險情況，尤其是2008年的金融海嘯，造成全球投資環境動盪，個別機構或資產的巨大損失對其他機構或資產甚至是整體市場造成巨大的損失擴散，因此在市場越趨發達、投資管道更多元化的同時，風險管理更趨重要。

第二節 研究動機與目的

在資產間的風險感染效果越趨嚴重下，將使得傳統資產配置理論下的投資組合面臨極大的虧損；有鑑於此，若能在投資組合模型中納入風險擴散的考量，將能提升分散風險的效果，進一步降低投資組合面臨極端虧損的可能性，以增進投資組合的效率性。因此要如何納入此一風險擴散效果，在良好的風險控管下進行資產配置，將可能遭受的損失降至最低，係為本論文主要探討的問題。

而在探討資產報酬率之風險擴散效果的文獻中，線性相關係數分析、ARCH/GARCH模型以及極值理論等為較常見的檢定方法，傳統的線性相關係數更是被廣泛運用於實證研究中。然而在2009年，Adrian, Brunnermeierz提出以分量回歸法(Quantile Regression)發展出CoVaR模型，作者以新的風險估算觀念來衡量個別金融機構發生極端風險時對其他金融機構造成風險外溢的方向與大小。其中CoVaR的“ Co ”即表達了條件(Conditional)、共變(Comovement)、傳染(Contagion)與貢獻(Contributing)等概念。CoVaR模型彌補了傳統僅就單一機構或商品來衡量本身風險的缺失，更能完全的反應出單一機構或商品對整個系統性風險的影響程度。

本研究擬延伸Adrian, Brunnermeierz (2009) CoVaR的概念，透過CoVaR模型衡量系統性風險擴散時，造成個別標的資產報酬率變動的程度，納入系統

性風險的考量，加以改良Markowitz的效率前緣，建構新的Mean-CoVaR資產配置模型，並計算出新的最適配置權重，以提升投資組合之績效。本研究擬透過此一Mean-CoVaR資產配置模型，在考量風險擴散因子後，可大幅降低投資組合虧損的情況，此外本研究也將就Mean-CoVaR資產配置模型與傳統Markowitz(1952)所提出的Mean-Variance模型進行探討與比較。

本研究將以臺灣50指數內前10檔股票作為本研究中的標的資產，資料期間為2003年01月02日至2009年12月31日止，共6年的日報酬資料，且本研究係欲檢測Mean-Variance與Mean-CoVaR模型所建構出的投資組合，在面臨巨大系統性風險下，何者能降低虧損程度，維持較佳的績效，故本研究將以2007年為界，將2007年以前共1,241筆日報酬資料(2003/01/02-2007/12/31)作為樣本內(in-of-sample)資料，用以建構最適投資組合，並以2007年後共500筆資料(2008/01/02-2009/12/31)進行樣本外(out-of-sample)測試。

本研究共分為五章，首先說明本研究之背景、研究動機與目的；其次將於文獻回顧中分別簡述風險值的相關文獻，以及探討資產配置模型之演進；並在研究方法中詳細說明本研究所使用的Mean-Variance模型與Mean-VaR模型；此外實證研究將會闡述樣本資料與實證結果，並針對結果進行分析與比較；最後則提出本研究之總結以利後續研究參考。

第二章 文獻探討

第一節 風險值之相關文獻

傳統上，財務金融領域以資產報酬率的波動度來衡量投資風險，但此波動度包含資產價格向上與向下的不確定性，以買入資產為例，其價格向上變動會產生資本利得，相反的當價格向下變動時，則發生損失；但若將資產報酬向上向下的波動同時計入，並無法反應出一般投資人在意的投資下方風險(Downside Risk)。

Jorion於1996年提出風險值的觀念，簡稱VaR，即「在一特定目標期間(T)之內，既定的信賴水準下(θ)，當市場發生不利變動時，預期潛在最大損失金額之估計值」；舉例來說，若一投資組合在95%之信賴水準下，其每日之VaR為100萬元，則表示有95%的機率，投資部位未來一天所損失的金額不會超過100萬元，即有5%的機率在未來一天該投資部位的最大損失金額會超過100萬元。其可用數學式表達如下：

$$\Pr(\chi \leq -\mathrm{VaR}) = \theta \tag{1}$$

其中， χ：投資組合損益，正值代表收益，負值代表損失。

θ：信賴水準，介於0和1之間。

Jorion將風險值之評價方法分為兩大類：(a)局部評價法(Local Valuation)，係先衡量投資組合價值對風險變數的敏感度，並模擬當風險變數變動時，投資組合價值的變化程度，如Delta-Normal法；(b)完全評價法(Full-Valuation)，如蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Simulation)及歷史模擬

法(Historical Simulation)。

然而即使VaR在現今風險管理中有著重要的影響性，但VaR係假設各資產報酬率的歷史分配在未來仍持續不變，因此若市場上發生未能預期的大波動，如金融風暴等事件時，VaR將會嚴重低估。此外VaR也假設資產報酬為常態分配，但Lawrence and Robinson(1995)實證發現，標的資產的報酬分配具有厚尾(fat tails)及高峰(highpeaks)等現象，因此依常態分配假設所計算出的VaR將不符合實際的損失情況。

基於改善VaR之缺失，Rockafellar and Uryasev(2000)發展出另一種衡量風險的新興工具 — 條件風險值(Conditional VaR，簡稱CVaR)，做為風險值的輔助方法。條件風險值又稱尾部風險值(Tail VaR)、期望差額(Mean Shortfall)或平均超額損失(Mean Excess Loss)。若信賴水準θ%下的風險值，$\mathrm{VaR}_{\theta}(\chi) = \min\{\alpha \in R : \psi(x, \alpha) \geq \theta\}$，則信賴水準$\theta$%下的條件風險值，我們將以符號$\mathrm{CVaR}_{\theta}(\chi)$來表示，其數學式表達如下：

$$\mathrm{CVaR}_{\theta} = \int_{\chi \leq -\mathrm{VaR}_{\theta}(\chi)} \chi * f(\chi) \; d\chi \qquad (2)$$

其中，θ：信賴水準，介於0和1之間。

χ：投資組合損益，正值代表收益，負值代表損失。

$\mathrm{VaR}_{\theta}(\chi)$：投資組合損益在信賴水準$1-\theta\%$之最大損失。

由於投資組合損失大於風險值$\mathrm{VaR}_{\theta}(\chi)$的機率等於$1-\theta$，所以條件風險值是指「在給定損失超過VaR水準下的損失條件期望值」。Pflug(2000)

證明了條件風險值(CVaR)是一個具有次可加性且具連貫性的(coherent)風險衡量指標。故分散投資組合資產可以降低投資組合的CVaR，但卻不一定能降低投資組合的VaR。因此CVaR較VaR具有作為風險衡量指標的優良特性。

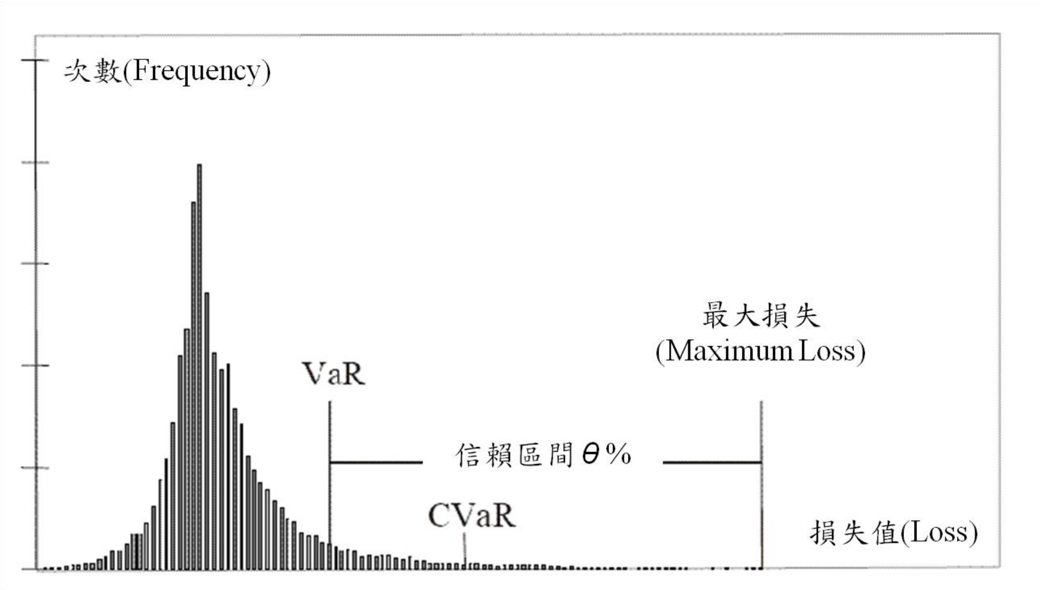

圖1　損失分配圖(VaR、CVaR)

此外在傳統VaR估計方法上分為有母數模型及無母數模型。有母數模型包括變異數－共變異數法(Variance-Covariance method)和蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Method)等；而在報酬分配複雜且不確定性高的情況下，許多學者則採用無母數模型來估計報酬率或VaR，如歷史模擬法（Historical simulation）或壓力測試法（Stress testing），另有學者以Koenker and Bassett(1978)提出的分量回歸模型(Quantiles Regression)來估計VaR。

分量迴歸模型最早由Koenker and Bassett(1978)所提出，其與最小平方法的差別在於最小平方法乃指解釋變數對被解釋變數的「平均」邊際效果，而分量迴歸是指解釋變數對被解釋變數在「特定分位點」上的邊際效果；

由其現今許多研究關注的往往不只是該變數的平均表現,反而更在意其分配兩端的情形，故越來越多研究採用分量迴歸模型於實證分析上。Engle and Manganelli(2004)提出CAViaR模型(Conditional Autoregressive Value at Risk)，其主要概念就是以分量迴歸避開分配假設的問題，且CAViaR藉樣本資料即可直接求得各分位線，以推估出未來最大預期損失，提高了CAViaR的準確性。

此外由於金融市場整合日益密切,使得資產間相互影響程度更加劇烈，造成單一資產問題透過高度的市場連動而擴散成系統的金融危機;又因金融產品不斷創新，產生極不穩定的風險情況，尤其是2008年的金融海嘯，造成全球投資環境動盪,個別機構或資產的巨大損失對其他機構或資產甚至是整體市場造成巨大的損失擴散。

Adrian & Brunnermeier 於2009年發展出CoVaR模型,提供金融市場在面對系統性風險時，衡量各金融機構風險貢獻程度，以作為內部風險控管的衡量指標，了解各金融機構對他家機構的曝險程度。該模型係建立在傳統VaR上，並加以考慮風險外溢時對其他標的之影響，亦即計算當其他金融機構處於風險值情況下，整體金融市場或單家金融機構的風險值。Adrian & Brunnermeier所提出的隨時間變動CoVaR模型為：

$$X_t^i = \alpha^i + \gamma^i M_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

$$X_t^{system} = \alpha^{system|i} + \beta^{system|i} X_t^i + \gamma^{system|i} M_{t-1} + \varepsilon^{system|i} \tag{4}$$

X_t為金融機構總資產市值成長率。M_{t-1}為落後一期可用來解釋金融機

構資產市值變化的系統性狀態變數，如VIX指數、流動性利差、信用利差、股價等。透過分量迴歸模型得到參數係數後，將可代迴上述回歸式以估計VaR及CoVaR：

$$\mathrm{VaR}_t^i = \alpha^i + \gamma^i M_{t-1} \tag{5}$$

$$\mathrm{CoVaR}_t^i = \alpha^{system|i} + \beta^{system|i}\mathrm{VaR}_t^i + \gamma^{system|i} M_{t-1} \tag{6}$$

此外Adrian and Brunnermeierz定義單家金融機構對金融市場風險值的邊際貢獻(ΔCoVaR)為金融市場在金融機構處於風險值狀態時($\mathrm{CoVaR}^{system|X^i=VaR}$)與金融機構處於正常(中位數)狀態時($\mathrm{CoVaR}^{system|X^i=Median}$)兩者CoVaR的差異。Adrian and Brunnermeierz也藉CoVaR的預測結果分析金融機構的槓桿、規模等特性與ΔCoVaR的關係，並估計各特性對金融機構的系統風險貢獻程度，以作為整體審慎規範的根據。本研究將應用CoVaR的概念衡量系統性風險擴散時，造成個別標的資產報酬率變動的程度，並加以建構Mean-CoVaR模型。

第二節 資產配置之相關文獻

Markowitz(1952)提出均數-變異數模型(Mean-Variance Portfolio Model)，開創了投資組合理論。在假設資產過去報酬率為未來預期報酬率之不偏估計值下，即利用歷史報酬率資料求得的平均數與變異數－共變異數做為模型之投入要素，此模型藉估計資產報酬率之期望值、標準差及共變異數，推導出最適資產配置權重，建構投資組合效率前緣線，以達到單一風險下最大報酬，且固定報酬下極小化風險的效果，即最具效率性資產配置組合。此外Mean-Variance模型理論較淺顯易懂，故為資產配置主題

中最廣為人知的模型。

然而Mean-Variance模型存在些許缺失：其假設投資標的報酬率分佈必須符合常態分配，並使用變異數來衡量投資風險，此兩項假設均與現實不符，事實上大部分投資標的報酬率呈現非常態分配，且投資人通常僅在報酬率往不利方向變動時才視為風險，故以變異數衡量投資下方風險無法確切反映真實的”風險”大小；故有學者針對Mean-Variance模型的問題提出了所謂的Safety- first選擇理論，此理論是在限制最壞情形發生的機率下，進行最適資產的配置，換而言之Safety- first選擇理論直接考慮了投資組合的下方風險，以限制下方風險為前提建構其最適投資組合。

Roy（1952）為最早提出Safety- first理論的學者，其認為投資者會以投資的安全性為最高原則，並因此設定一個可接受的最低報酬，而所謂的最適投資組合，則建構在極小化投資組合報酬率低於投資者要求報酬率的機率；Safety- first理論的概念也為後續下方風險的相關研究立下基石。

Kataoka(1963)則改良Safety- first理論，提出在限制投資組合報酬率不高於最低報酬率的機率，在小於或等於某一給定機率下，尋求最大化投資組合的最低報酬，其中投資組合的最低報酬就是在既定的機率下，投資人心目中所能承受投資組合的最大損失。此模型的限制式即類似風險值的概念，而所謂風險值(Value at Risk，VaR)係為一種衡量下方風險的方法，其將市場風險(Market Risk)量化後，以衡量標的資產或投資組合在特定信賴區間下，因市場因素導致價格變動造成資產或投資組合預期之最大損失。

1999年，Duarte and Alcantara 提出Mean-VaR模型的概念，以VaR 取代變異數作為衡量風險的指標，並以此推導出Mean-VaR效率前緣。該研

究標的資產包含十五種股票、四種衍生性商品及定期存款，並使用蒙地卡羅模擬法來計算投資組合的風險值。事實上Mean-VaR模型與Mean-Variance模型建構效率前緣的概念相似，均為在給定目標報酬率下，尋找一個可使風險值最小的投資組合，或在限定的風險值下，尋找一個可使報酬率最大的投資組合。

此外Campbell, Huisman, and Koedijk(2001)在極大化預期報酬的目標函數中納入VaR限制式，以VaR衡量下方風險，並將資產組合問題簡化為類似夏普指數（Sharpe Index）的函數，在此限制下求解期望報酬最大化。該研究係以美國股價指數與債券進行實證分析，其研究結果發現當假設標的資產報酬分配符合常態時，Mean-VaR模型與Mean-Variance模型的結果幾乎相同，但若實際報酬分配與常態分配差異越大時，使用Mean-Variance模型將會大幅低估投資組合的VaR。

Mean-VaR模型不僅可適用參數型分配，也適用於無母數分配，相較於傳統的Mean-Variance模型，Mean-VaR模型可避免參數估計誤差過大的問題；然而Artzner et al.(1999)指出，VaR僅能表達損失超過虧損門檻的機率，並不能完整描繪超過VaR的損失分配，忽略了在VaR以外的損失問題，故無法分析左尾的損失情況。此外若標的資產分配為非常態時，VaR將不符合次可加性(Sub-Additive)，造成新納入投資組合部位反而會增加投資組合風險，因此VaR不具備一致性(Coherent)的特質，且不是一個優良的風險衡量指標。此外針對最適化投資組合模型，若以VaR為其目標式或限制式，VaR函數將不具凸性(Convex)，且其非平滑性的特質將會造成模型求解上的困難。

綜合以上缺失，Rockafellar and Uryasev(2000)則提出以條件風險值

(Conditional VaR, CVaR)作為風險衡量的指標；Mean-CVaR模型將可改善上述VaR不具凸性、次可加性、一致性等問題，此外Mean-CVaR模型可藉線性規劃法快速且穩定地求出最適解。該研究也證明在資產報酬分配為常態的假設下，以標準差、VaR和CVaR為風險衡量指標所建構之最適投資組合將相同。

又近年來金融市場整合日益密切，資產間相互影響程度更加劇烈；針對標的資產報酬相關性，有研究發現資產報酬分配的尾端報酬具有相當高的相關性，隱含在高度波動的股票市場中，投資組合的多角化利益將會受到侵蝕。Longin and Solnik (2001)則應用極值理論建構標的資產報酬的多變量分配，並以美國、英國、法國、德國及日本五個國家為實證對象，探討極端機率下資產報酬的相關性，其實證顯示在負尾端(negative tail)機率下，資產報酬的相關性將顯著大於常態模型所預測之結果，即暗示股市發生大幅崩跌時，傳統的資產配置模型將無法有效降低投資組合的風險。

因此若能在投資組合模型中納入考量極端事件下標的資產的風險連動效果，將可望提升投資組合的效率性，進一步降低投資組合面臨極端虧損的可能性；故本研究將以CoVaR的概念運用在資產配置中，以建構Mean-CoVaR模型。

第三章 研究方法

本章將介紹第四章實證研究中兩種資產配置模型；首先介紹 1952 年 Markowitz 提出的 Mean-Variance 模型與相關假設，其次簡述 CoVaR 之計算與其意涵，最後則說明本研究所建構的 Mean-CoVaR 模型。

此外本研究將使用 GAMS(General Algebraic Modeling Systems)作業軟體建構 Mean-Variance 與 Mean-CoVaR 模型。GAMS 最早是由世界銀行(World Bank)的 Meeraus 和 Brooke (Brooke, Kendrickm and Meeraus, 1992)所發展，係針對數學規劃的高階建模系統，其中包含編譯器和高效能求解引擎；GAMS 對線性與非線性規劃問題係採新南威爾斯大學的 Murtagh、及史丹福大學的 Gill、Marray、Saunders、Wright 等人所發展的 MINOS(Murtagh and Saunders, 1983)演算法，為一針對大型、複雜的模型應用問題而量身訂做的軟體，且 GAMS 具有強健穩定的數值分析能力可解決大規模數學優化問題，也支持特定線性編程、混合整數編程以及其他非線性轉換優化等問題。

第一節 Mean-Variance 模型

1952 年，諾貝爾經濟學獎得主 Markowitz 發表了投資組合理論，提出均數－變異數投資組合模型(Mean-Variance Portfolio Model)，其將風險加以量化並建構效率投資組合以達到最佳的資產配置，自此奠定了現代投資組合理論的基礎。本研究將延用 Markowitz 的 Mean-Variance 模型，其模型假設如下：

1. 投資組合內有 n 項標的資產，但並不存在無風險資產；此外所有資產價格均為外生給定，投資者均為價格接受者(price taker)，並沒有影響價格的能力。

2. 投資者為風險驅避者(Risk aversion)，其偏好較高報酬與較低風險的投資；即在同一風險水準下，投資者希望期望報酬率越大越好，在同一期望報酬率下，投資者希望風險越小越好。

3. 市場為完全市場，無交易成本且標的資產可無限分割。

4. 標的資產報酬率呈常態分配，且投資風險可以投資報酬率之變異數或標準差來衡量。

5. 投資期間為單期，且不能放空。

根據上述假設，Mean-Variance模型利用各標的資產平均報酬率、報酬率變異數與共變異數以決定標的資產間的最適權重，且在標的資產之歷史報酬率為未來報酬率之不偏估計值的假設下，利用歷史資料以估計報酬率、報酬率變異數與共變異數等參數做為模型之投入要素。以下為Markowitz的Mean-Variance模型：

1. 投資組合要求報酬率固定下，最小化投資組合風險：

$$\text{Min} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\, \omega_j\, \sigma_{ij} \tag{7}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \ \geq \ R_{exp}$$

$$0 \le \omega_i \le 1\,, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$i \ne j$$

2. 固定投資組合風險下，最大化投資組合報酬：

$$\mathrm{Max} \sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \tag{8}$$

Subject to

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\, \omega_j\, \sigma_{ij}$$

$$0 \le \omega_i \le 1\,, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$i \ne j$$

其中，σ_p^2 為投資組合 p 之變異數

n為投資組合P中所含資產數

ω_i為投資於第 i 種資產之權重比例

σ_{ij}為資產 i 與資產 j 之共變異數

$\overline{r_i}$為資產 i 之日報酬率平均值

R_p為投資組合 p 之期望報酬率

R_{exp}為投資組合 p 之要求報酬率

以上兩模型係基於投資者為風險趨避者的假設下所設定，在面對同一報酬率水準下，投資人將選擇風險最小的投資組合，或在固定的風險水準下，會選擇預期報酬率最高的投資組合；此兩模型係為等價關係，而本研究將以固定要求報酬率，求解最小投資組合風險為本研究之實證模型。

若將標的資產所有可能的權重配置組成不同的投資組合，並將各投資組合繪製到報酬率(R_p) - 標準差(σ_p)圖中，即可繪製一可行投資組合集合(Feasible Set)的圖形，該集合範圍內任一點均為調整標的權重即可達到的投資組合；如下圖藍色陰影處，即為由資產A、B、C…等資產所組成之可行投資組合集合。

而透過Mean-Variance模型，求解不同期望報酬率下之最適投資組合，將可畫出投資組合之效率前緣線（Efficient Frontier），即下圖中的$\overline{\text{AH}}$曲線；該效率前緣線上的每一點投資組合，如A點、H點，均為該投資組合報酬率下，擁有最小風險之最適投資組合。

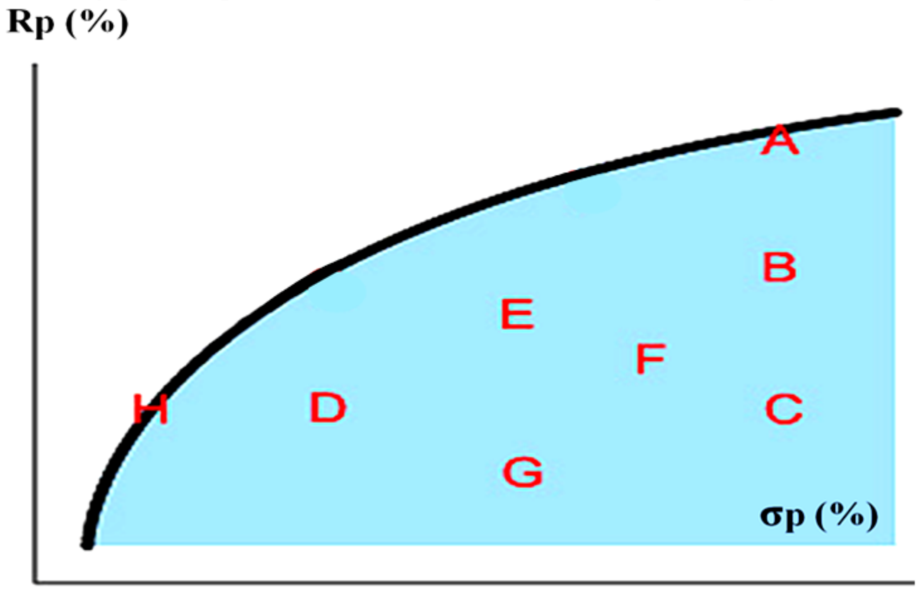

圖2　效率前緣線範例圖

第二節 Mean-CoVaR 模型

如前章文獻回顧所述，隨著金融市場的發展，衡量風險的方法也跟著推陳出新，從一開始使用資產報酬率的變異數或標準差來衡量投資風險，到之後發展出的風險值(Value at Risk, VaR)、條件風險值(Conditional VaR)、CoVaR等概念，且在資產配置決策中，也將這些不同的風險衡量方法加以運用，以確切掌握投資組合的風險，增進投資的效率性。

一般在求解最適投資組合模型時，係以最小化投資組合報酬率之風險為目標式，並在不同的限制式下，如要求投資組合最小報酬率、標的資產不能放空等限制，計算出效率前緣線與其最適投資組合解；本節將以 CoVaR 作為投資組合風險之考量，建構 Mean-CoVaR 資產配置模型。以下為最適投資組合模型之一般式：

$$\text{Min} \quad Risk \tag{9}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \geq R_{exp}$$

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$i \neq j$$

一、 CoVaR之意涵

Adrian & Brunnermeier 於 2009 年發展出 CoVaR 模型，提供金融市場在面對系統性風險時，衡量各金融機構風險貢獻程度，以作為內部風險控管的衡量指標，了解各金融機構對他家機構的曝險程度。此外 Adrian and Brunnermeierz 在 VaR 前加上 Co，藉以強調 CoVaR 其與傳統 VaR 之不同，即 CoVaR 具有條件(Conditional)、共變(Comovement)、傳染(Cotagion)及貢獻(Contributing)等特質。

傳統的 VaR 定義為在特定期間及既定的信賴水準 1-θ 的條件下，標的 X^i 將有 θ%的機率損失會超過 VaR_θ^i 值，其定義式如下：

$$\Pr\left(X^i \leq VaR_\theta^i \right) = \theta \tag{10}$$

而 CoVaR 則定義為在特定期間及既定的信賴水準 1- θ 的條件下，當標的 X^j 發生特定事件($\delta\left(X^j\right)$)時，標的 X^i將有 θ%的機率損失會超過$CoVaR_\theta^{i|\delta(X^j)}$ 值，其定義式如下：

$$\Pr\left(X^i \leq CoVaR_\theta^{i|\delta(X^j)} \middle| \delta\left(X^j\right) \right) = \theta \tag{11}$$

而 CoVaR 與前一節提到的標準差不同，其係針對尾端機率以衡量極端事件的風險，因此較能確實掌握資產報酬率為厚尾分配的情形。且其具有條件性(Conditional)的概念，可用來捕捉風險傳染的效果，例如在標的 X^j 發生極端虧損時，造成對標的 X^i 的影響；又因 CoVaR 也具有方向性的概念，即標的 X^j 發生極端虧損時，對標的 X^i 的影響，並不等同於標的 X^i 發生極端虧損時，對標的 X^j 的影響。

二、 CoVaR之計算

在研究解釋變數與被解釋變數之關係中，一般而言有兩種參數迴歸估計模型，第一種為利用最小平方法之簡單線性迴歸模型（Ordinary Least Square, OLS），其透過極小化殘差的平方和來估計參數；且傳統的簡單線性迴歸下，所得參數係代表其自變數對應變數之「平均」趨勢的邊際效果。簡單線性迴歸模型如下：

$$Y_i = \beta_0 + X_i'\beta + \varepsilon_i \ , \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{12}$$

其中，Y_i為此迴歸模型中之應變數，β_0為常數項，X_i'為各解釋變數組成的向量，而ε_i則表示為誤差。在最小化此回歸之殘差平方後，即可得到β之估計值與以下之估計式：

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 - X_i'\hat{\beta} \tag{13}$$

其中，$\hat{\beta}$表示當解釋變數 X 變動一單位，被解釋變數 Y 將會變動$\hat{\beta}$單位；即為一單位 X 影響 Y 之邊際效果。

另一種方法則為 Adrian and Brunnermeierz(2009)的論文中計算 CoVaR 所使用的分量迴歸法(Quantile Regression)；分量迴歸(Quantiles Regression)最早係由 Koenker and Bassett(1978)提出，在不對母體做任何的分配假設下，估計的參數係由過去樣本原始的分配情況決定，故可呈現資料特性，並得出較具穩健性的統計推論。分量迴歸係利用最小絕對離差法(Least Absolute Deviation, LAD)，透過極小化殘差絕對值總和求解估計參數，所得參數則代表自變數影響應變數在「特定分位點」上的邊際效果，本研究也將延用此法衡量 CoVaR。分量迴歸模型如下：

$$\mathrm{Y}_i = \mathrm{X}_i'\beta_\theta + \varepsilon_{i\theta} \quad , \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{14}$$

其中，$\mathrm{Y_i}$為此迴歸模型中之應變數，β_θ為參數向量，$\varepsilon_{i\theta}$表示為相對應的誤差項。令β_θ為分量迴歸係數估計式，$\mathrm{X_i'}\beta_\theta$為$\mathrm{Y}_i$的第θ個條件分量(conditional quantile)。又若Y之累積分配函數為$\mathrm{F_Y}$，則Y的第θ個分量(0 <θ< 1)為：

$$q(\theta) = \inf\{y : \mathrm{F_Y(Y)} \geq \theta\} \tag{15}$$

並可由最小絕對離差法求得分量q(θ)：

$$\mathrm{Min}_q\ \theta \int_{y>q} |y-q|\ \mathrm{d\,F_Y(Y)} + (1-\theta)\int_{y<q} |y-q|\ \mathrm{d\,F_Y(Y)} \tag{16}$$

故當 Y 之條件累積分配函數為$\mathrm{F_{Y|X}(Y)}$，則 Y 的第 θ 個分量$Q_\theta(\mathrm{X})$即可透過極小化下式求之：

$$\mathrm{Min}_{Q_\theta(\mathrm{X})}\quad \theta \int_{y>Q_\theta(\mathrm{X})} |y-Q_\theta(\mathrm{X})|\ \mathrm{d\,F_{Y|X}(Y)} \tag{17}$$

$$+ (1-\theta)\int_{y<Q_\theta(\mathrm{X})} |y-Q_\theta(\mathrm{X})|\ \mathrm{d\,F_{Y|X}(Y)}$$

現今實證研究中注重的不再只是平均行為，分配兩端的情況反而更值得關切；而相較於傳統迴歸僅能分析樣本的平均行為，分量迴歸模型更能清楚地描繪應變數的整體分配特性，其對於兩側尾端樣本具有更佳的預測能力。相較於最小平方法只能提供一個平均數字，分量回歸模型卻能提供更多不同分位數的估計結果，是故分量迴歸在近年來逐漸受到重視。綜合以上特性，本研究將採分量迴歸法以準確計算 CoVaR。

三、 Mean-CoVaR模型

由上述CoVaR的定義可知，在特定期間及既定的信賴水準1-θ的條件下，當標的X^i處於θ%的尾端事件時，即$X^i = \mathrm{VaR}^i_\theta$下，標的 X^j將有 θ %的機率損失會超過$CoVaR^{j|i}_\theta$ 值，其定義式如下：

$$\Pr\left(X^j \le CoVaR_\theta^{j|\,X^i=\mathrm{VaR}^i_\theta} \,\middle|\, X^i = \mathrm{VaR}^i_\theta\right) = \theta \tag{18}$$

本研究將假定標的 X^i為大盤指數，標的 X^j為投資組合中其他標的資產，因此將可藉$CoVaR^{j|i}_\theta$衡量當大盤崩跌、造成系統性風險時，對其他標的資產造成風險擴散的影響程度。在採用分量迴歸法的計算基礎下，可將上述概念轉化為以下迴歸模型：

$$\mathrm{r}^{j|i} = \alpha^{j|i} + \beta^{j|i} * \mathrm{R}^{\mathrm{i}} \tag{19}$$

其中，$\mathrm{r}^{j|i}$為標的 j 之報酬率(或是投資組合的報酬率)，且在 i = system 下，R^{i}係為大盤的報酬率；此外在最小化絕對離差後，將可求出上述回歸式中$\mathrm{r}^{j|i}$、$\alpha^{j|i}$ 與 $\beta^{j|i}$ 之估計值：

$$\min_{\alpha,\beta,\mu_t,\nu_t} \quad \theta \sum_{t=1}^{T} \mu_t + (1-\theta) \sum_{t=1}^{T} \nu_t \tag{20}$$

Subject to

$$r_t = \alpha + \beta * R_t + \mu_t - \upsilon_t$$

$$\mu_t, \nu_t \ge 0$$

$$for\ \ t = 1, \dots, \mathrm{T}$$

其中μ_t, ν_t分別為此分量迴歸模型中的第 t 期之正負偏差值，r_t為第 t 期之標的資產報酬率(或是投資組合的報酬率)，R_t為第 t 期之大盤報酬率。在求出 $\hat{r}^{j|i}$、 $\hat{\alpha}^{j|i}$ 與 $\hat{\beta}^{j|i}$ 後，可得出$\widehat{\mathrm{CoVaR}}^{j|i} = -(\hat{\alpha}^{j|i} + \hat{\beta}^{j|i} * \mathrm{VaR}^{i})$，即在大盤報酬率處於極端機率下，標的資產之 CoVaR 值。

又根據上述 CoVaR 模型並結合最適投資組合模型之一般式下，將可建構出本研究之 Mean-CoVaR 模型，其模型簡化如下：

$$\min_{\omega_i, \alpha, \beta, \mu, \nu} \quad -\left[\alpha + \beta * \left(-\mathrm{VaR}^{\tau}_{\mathrm{system}}\right)\right] \tag{21}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \geq R_{exp}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_t^i * \omega_i = \alpha + \beta * R_t + \mu_t - \upsilon_t$$

$$for\ \ i = 1, \dots, \mathrm{n} \quad i \neq j$$

$$for\ \ t = 1, \dots, \mathrm{T}$$

$$0 \leq \omega_i \leq 1$$

其中，ω_i 為投資於第 i 種資產之權重比例

α,β 為分量迴歸中的估計係數

μ,υ 分別為分量迴歸中的正負殘差項

$\mathrm{VaR}_{\mathrm{system}}^{\tau}$ 為大盤報酬在信賴水準為 τ% 時的 VaR 值

n 為投資組合 P 中所含資產數

$\overline{r_i}$ 為資產 i 之日報酬率平均值

R_p 為投資組合 p 之期望報酬率

R_{exp} 為投資組合 p 之要求報酬率

r_t^i 則為資產 i 在 t 時間點之日報酬率

R_t 為大盤在 t 時間點之日報酬

上述模型中，目標式係為極小化投資組合中的 CoVaR 值，並在放空限制、要求投資組合報酬率至少大於大盤報酬率，以及符合分量迴歸模型等限制條件下，求解出 Mean-CoVaR 模型下之最適投資組合。

第四章 實證研究

第一節 資料描述

本研究欲延伸Adrian, Brunnermeierz (2009) CoVaR的概念，透過CoVaR模型衡量當大盤崩跌時，造成標的資產報酬率變動的程度，透過Mean-CoVaR資產配置模型建構效率前緣，以提升投資組合之績效。

臺灣50指數係由臺灣證券交易所於 2002 年 10 月 29 日正式發布，由臺灣證券交易所與富時國際有限公司（FTSE International Limited）合編，該指數編製係以臺灣證券交易所上市股票中，挑選總市值前50大之標的公司作為指數之成分股，並以其市值作為加權權數；臺灣50指數不但可代表藍籌股之績效表現，同時也是臺灣證券市場第一支交易型（tradable）指數，且其成分股的特性為規模大、流動性佳，而其成分股之替換及權重調整皆以穩定為原則，較適合機構法人進行投資組合之避險與套利操作，係為基金投資績效之評量標準。此外由於臺灣50指數的價格走勢和臺灣加權指數幾近相同，不但可用來模擬臺灣大盤股市的表現，臺灣50指數亦可直接在集中市場交易，有利於實務操作，因此本研究將以臺灣50指數為大盤標的，並自臺灣50指數中選取投資標的。

在考慮標的資產之交易量與流動性下，本研究採用臺灣50指數中權重前10檔股票為標的資產，分別為台積電(2330)、鴻海(2317)、台塑(1301)、南亞塑膠(1303)、宏達電(2498)、臺灣化學(1326)、中華電信(2412)、中國鋼鐵(2002)、聯發科(2454)、國泰金(2882)等10檔股票。下表為個別標的名稱、股票代號與此標的占臺灣50指數中之權重：

表1　標的資產之名稱與其占臺灣50之權重

	代 號	名 稱	占臺灣 50 指數權重
1	2330	臺積電	18.95%
2	2317	鴻海	10.12%
3	1301	臺灣塑膠	4.59%
4	1303	南亞塑膠	4.46%
5	2498	宏達電	4.14%
6	1326	臺灣化纖	3.16%
7	2412	中華電信	2.99%
8	2002	中國鋼鐵	2.92%
9	2454	聯發科	2.75%
10	2882	國泰金	2.21%

本研究樣本期間自2003年01月02日至2009年12月31日止，共6年，樣本數共1,741筆日報酬資料，資料來源為台灣經濟新報資料庫(TEJ)。此外為檢測Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型建構之投資組合，何者能在系統性風險下降低虧損、維持較佳的績效，本研究將樣本期間分為樣本內(in-sample)與樣本外(out-of-sample)等兩種型態，以2007年為界，將樣本內資料用以建構投資組合，並以樣本外資料檢測投資組合之績效。

圖3　臺灣50每日價格走勢圖(2003/01/02-2009/12/31)

上圖為臺灣50指數在資料期間2003年01月02日至2009年12月31日之價格走勢圖；臺灣50指數大體呈現震盪上揚的趨勢，除了2008年受到金融海嘯的影響，臺灣50指數曾一度大幅崩跌，自2007年底的高峰7,057點下跌至2008年底的歷史低點2,941點，但隨後在2009年底即回升到2008年初時水準；因此本研究將以2007年為界，將2007年前共1,241筆日報酬資料(2003/01/02-2007/12/31)以Mean-Variance與Mean-CoVaR模型建構最適投資組合，並以2007年後共500筆資料(2008/01/02-2009/12/31)進行樣本外測試，以檢測在大盤巨幅崩跌時，比較各模型下的投資組合績效評估兩模型之優劣。

下表為將各標的資產之日報酬率資料(2003/01/02-2009/12/31)求其平均值與標準差，並換算成年化數據，其年化後資料如下：

表2　標的資產與臺灣50指數之平均日報酬率與標準差(年化)

代 號	名　稱	平均日報酬 (年化, %)	日報酬標準差 (年化, %)
2330	臺積電	19.465	33.402
2317	鴻海	28.224	37.197
1301	臺灣塑膠	19.385	27.281
1303	南亞塑膠	23.133	27.797
2498	宏達電	46.619	47.473
1326	臺灣化纖	24.087	27.831
2412	中華電信	13.758	20.085
2002	中國鋼鐵	23.462	28.666
2454	聯發科	32.327	41.686
2882	國泰金	17.634	36.210
0050	臺灣 50 指數	10.829	24.400

從上述資料可看出，自2003年01月02日至2009年12月31日，臺灣50指數年化後之日報酬率平均值與標準差分別為10.829 %與24.400%，而在本研究之10檔標的資產中，報酬表現較好的前5檔資產依序為2498宏達電、2454聯發科、2317鴻海、1326臺灣化纖、2002中國鋼鐵，其報酬率表現均優於臺灣50指數，且其年化後之日報酬平均值均有20%以上水準；但若以標準差來看，波動較大的前5檔標的資產依序為2498宏達電、2454聯發科、2317鴻海、2882國泰金、2330臺積電；其中宏達電、聯發科、鴻海三檔標的雖然分別位居樣本期間內平均日報酬率最高的前三名，但其報酬率之波動度也相對較高，為一高風險、高報酬之投資標的。下表則為10檔標的資產與臺灣50指數的偏態係數與峰態係數：

表3　標的資產與臺灣50指數之偏態係數與峰態係數

代 號	名　稱	偏態係數	峰態係數
2330	臺積電	0.137	1.249
2317	鴻海	0.018	1.163
1301	臺灣塑膠	0.157	2.470
1303	南亞塑膠	0.151	2.821
2498	宏達電	0.014	0.203
1326	臺灣化纖	0.201	3.063
2412	中華電信	0.446	4.798
2002	中國鋼鐵	0.278	2.210
2454	聯發科	0.058	0.574
2882	國泰金	0.073	1.600
0050	臺灣 50 指數	-0.123	2.365

由上表可發現10檔標的資產之日報酬率均為右偏分配，僅臺灣50指數之日報酬率呈現左偏分配(其偏態係數小於0)，較有極端虧損情形發生；而就峰態係數而言，僅臺灣化纖與中華電信屬於低闊峰分配(其峰態係數大於3)，其餘標的資產與臺灣50指數則屬於高狹峰分配，具有厚尾現象。

第二節 實證結果分析

本節將依據第三章所述之研究方法，將上述標的資產帶入各模型中，先以2003/01/02至2007/12/31之樣本資料建構最適投資組合與效率前緣線；兩模型之實證結果分述如下：

一、 Mean-Variance模型

根據本研究第三章所述，Markowitz提出的Mean-Variance模型係利用各資產的平均報酬率、報酬率的變異數以及共變異數決定標的資產間的最適權重，在有放空限制下建構最適投資組合，其公式如下：

$$\text{Min} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i \, \omega_j \, \sigma_{ij} \tag{22}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \ \geq \ R_{exp}$$

$$0 \leq \omega_i \leq 1\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$i \neq j$$

其中 σ_p^2 為投資組合 p 之變異數，n為投資組合P中所含資產數，ω_i為投資於第 i 種資產之權重比例，σ_{ij}為資產 i 與資產 j 之共變異數，$\overline{r_i}$為資產 i 之日報酬率平均值，R_p為投資組合 p 之期望報酬率，R_{exp}為投資組合 p 之要求報酬率。

本研究之資產數為10檔投資標的，即$n = 10$，此外本研究係以臺灣50指數之平均日報酬率為要求報酬率，使得各投資組合之最小報酬須大於此限制，

即$R_{exp} = 0.043$ (%)。以下則為本研究中各標的資產之平均日報酬率與變異數

- 共變異數矩陣(Variance-Covariance matrix)：

表4　標的資產與臺灣50指數之平均日報酬率

標的資產	平均日報酬(%)	標的資產	平均日報酬(%)
2330　台積電	0.077	**1326　台化**	0.096
2317　鴻海	0.112	**2412　中華電**	0.055
1301　台塑	0.077	**2002　中鋼**	0.093
1303　南亞	0.092	**2454　聯發科**	0.128
2498　宏達電	0.185	**2882　國泰金**	0.070
臺灣 50 指數(要求報酬率, %)		0.043	

表5　標的資產之變異數-共變異數矩陣(Variance-Covariance matrix)

	2330 台積電	2317 鴻海	1301 台塑	1303 南亞	2498 宏達電	1326 台化	2412 中華電	2002 中鋼	2454 聯發科	2882 國泰金
台積電	4.42	2.85	1.61	1.82	2.35	1.55	0.76	1.66	2.46	2.49
鴻海	2.85	5.49	1.70	1.90	2.75	1.67	0.72	1.85	3.10	2.76
台塑	1.61	1.70	2.95	2.29	1.25	2.23	0.60	1.52	1.35	2.04
南亞	1.82	1.90	2.29	3.06	1.50	2.31	0.69	1.64	1.62	2.14
宏達電	2.35	2.75	1.25	1.50	8.94	1.18	0.65	1.53	3.53	2.29
台化	1.55	1.67	2.23	2.31	1.18	3.07	0.62	1.46	1.40	1.91
中華電	0.76	0.72	0.60	0.69	0.65	0.62	1.60	0.62	0.50	0.83
中鋼	1.66	1.85	1.52	1.64	1.53	1.46	0.62	3.26	1.45	2.13
聯發科	2.46	3.10	1.35	1.62	3.53	1.40	0.50	1.45	6.89	2.12
國泰金	2.49	2.76	2.04	2.14	2.29	1.91	0.83	2.13	2.12	5.20

依據上述Mean-Variance模型設定與標的資產日報酬、變異數-共變異數矩陣之樣本資料，將可藉GAMS軟體建構出最適投資組合；又此處為方便與下節之Mean-CoVaR模型比較，將投資組合報酬率(R_p)限制在 0.125% 與 0.25% 之間，並在此區間中等分100組投資組合報酬率與各投資組合之相對應標的資產權重。以下將此100組投資組合加以繪製Mean-Variance效率前緣圖：

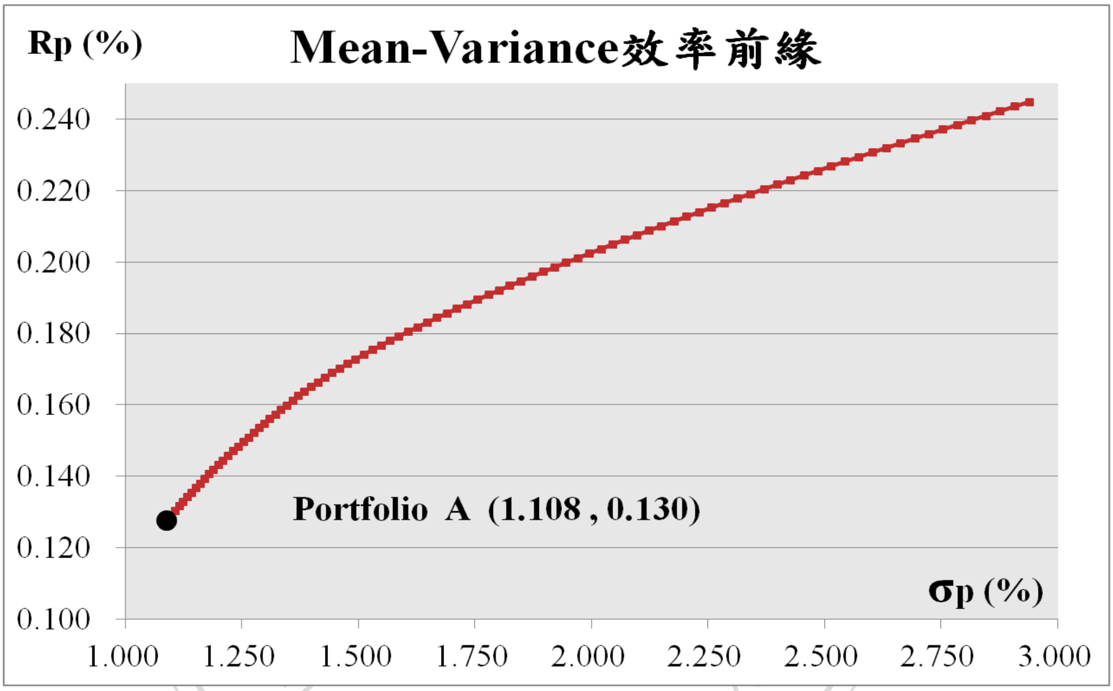

圖4　Mean-Variance模型下之效率前緣

上圖中的Portfolio A為Mean-Variance效率前緣中之最小變異投資組合(Minimum Variance Portfolio, MVP)，Portfolio A之標準差為此100組投資組合標準差(σ_p)中最小值，Portfolio A之投資組合報酬率、標準差與各標的資產權重配置如下：

表6　Mean-Variance模型下之最小變異投資組合

最小變異投資組合- Portfolio A			
投資組合報酬率(%)	0.130	投資組合標準差(%)	1.108
標的	權重	標的	權重
2330　台積電	0.000	1326　台化	0.158
2317　鴻海	0.047	2412　中華電	0.258
1301　台塑	0.000	2002　中鋼	0.189
1303　南亞	0.191	2454　聯發科	0.000
2498　宏達電	0.157	2882　國泰金	0.000

由上表可看出，在Mean-Variance模型下為求投資組合最小變異，Portfolio A之權重配置著重於日報酬率波動度較低的資產，故配置於2330台積電、2454聯發科與2882國泰金之權重為0，此外雖然1301台塑之報酬率標準差較低，但因其日報酬率之平均值也較低，且1301台塑與2330台積電、2454聯發科與2882國泰金之相關係數較高，故其權重也為0，而因2498宏達電、2317鴻海之日報酬率平均值均較高，因此即使其標準差也偏高，但在最適投資組合中仍配有權重(宏達電：0.157、鴻海：0.047)。

二、　Mean-CoVaR模型

根據本研究第三章所述之Mean-CoVaR模型如下：

$$\underset{\omega_i,\alpha,\beta,\mu,\nu}{\text{Min}} -\left[\alpha+\beta*\left(-\text{VaR}_{\text{system}}^{\tau}\right)\right] \tag{23}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i * \overline{r_i} = R_p \geq R_{exp}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_t^i * \omega_i = \alpha + \beta * R_t + \mu_t - \upsilon_t$$

$$for\ i = 1, \dots, n \quad i \neq j$$

$$for\ t = 1, \dots, T$$

$$0 \leq \omega_i \leq 1$$

上述模型中，目標式為極小化投資組合中的CoVaR值，且其CoVaR值係利用分量迴歸法加以估計，其中ω_i為投資於第 i 種資產之權重比例，α, β 為分量迴歸中的估計係數，而 μ, υ 分別為分量迴歸中的正負殘差項，且$\mathrm{VaR}_{\mathrm{system}}^{\tau}$為大盤報酬在信賴水準為$\tau$% 時的VaR值；此外 n 為投資組合P中所含資產數，$\overline{r_i}$ 為資產 i 之日報酬率平均值，R_p 為投資組合 p 之期望報酬率，R_{exp} 為投資組合 p 之要求報酬率，r_t^i 則為資產 i 在 t 時間點之日報酬率，R_t 為大盤在 t 時間點之日報酬。

本研究之資產數為10檔投資標的，即$n = 10$，且樣本期間自2003/01/02至2007/12/31，共1,241筆資料，$T = 1{,}241$；此外本研究係以臺灣50指數走勢當作大盤表現，且信賴區間為5% ($\tau\% = 5\%$)，又臺灣50指數在樣本期間內 5% 之VaR值為 -3.315%，即 $\mathrm{VaR}_{\mathrm{system}}^{\tau} = -3.315\ (\%)$；本模型之要求報酬率係為臺

灣50指數平均日報酬率，即 $R_{exp} = 0.043$ (%)，其餘各資產之日報酬率平均值 ($\bar{r_i}$)則與上表相同。

在上述Mean-CoVaR模型下，此處同樣為求比較方便，本研究將投資組合報酬率(R_p)限制在 0.125% 與 0.25% 之間，並在此區間中等分100組投資組合報酬率與各投資組合之相對應標的資產權重，且同樣使用GAMS軟體依據上述資料建構出Mean-CoVaR模型下之100組最適投資組合；以下將此100組投資組合加以繪製Mean-CoVaR效率前緣圖：

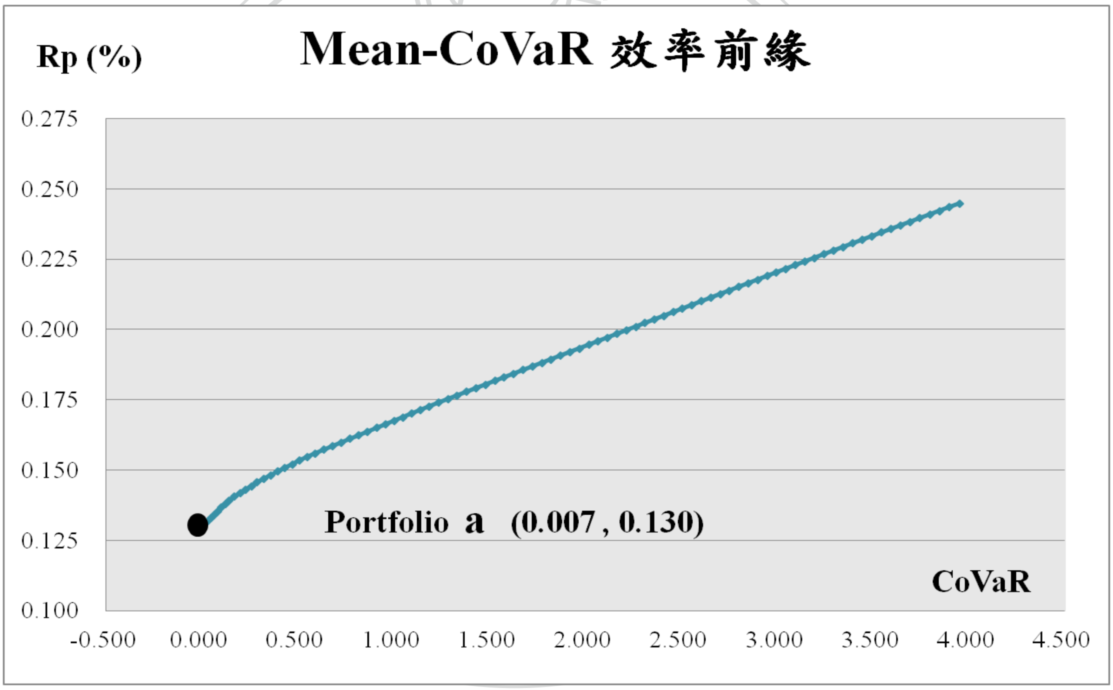

圖5 Mean-CoVaR模型下之效率前緣

其中上圖Portfolio a的CoVaR值為Mean-CoVaR效率前緣中最小者，即該投資組合報酬率受到系統性風險擴散影響的程度較低，Portfolio a之投資組合報酬率、CoVaR值與各標的資產權重配置如下：

表7　Mean-Variance模型下之最小變異投資組合

CoVaR 值最小的投資組合- Portfolio a			
投資組合報酬率(%)	0.130	投資組合CoVaR	0.007
標的	權重	標的	權重
2330　台積電	0.099	1326　台化	0.000
2317　鴻海	0.202	2412　中華電	0.045
1301　台塑	0.000	2002　中鋼	0.167
1303　南亞	0.165	2454　聯發科	0.112
2498　宏達電	0.097	2882　國泰金	0.112

在Mean-CoVaR模型下，效率投資組合的權重配置係根據在大盤(本研究以臺灣50指數為大盤)面臨極端風險下，極小化投資組合總和CoVaR值；但因CoVaR和VaR同樣不具加成性，投資組合的CoVaR值不一定會較兩個別資產的總合CoVaR值小，是故本研究試推論Portfolio a之權重配置原因如下：就以下各標的資產之CoVaR-Return分布圖而言，1326台化可能因其報酬較1303南亞低，且1303南亞的CoVaR值又較1326台化低，又1301台塑相較1303南亞、2002中鋼而言，其不但報酬率較低，CoVaR值也較高，故1326台化與1301台塑可能係因此原因被其他標的資產所取代，是故此兩項標的資產之權重為0。

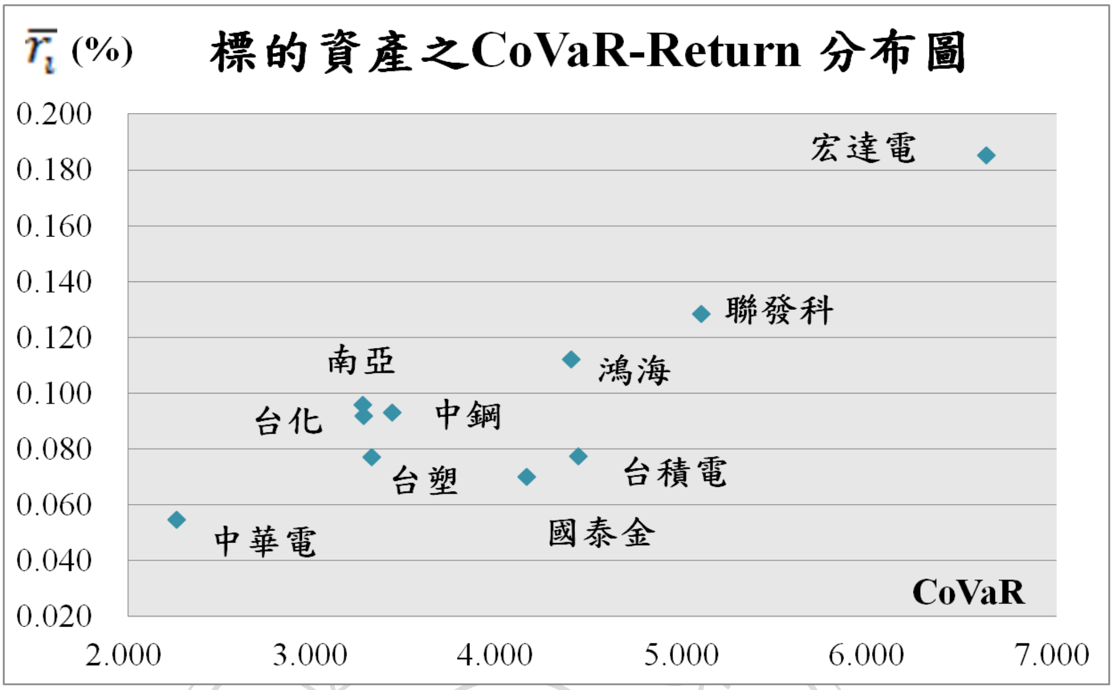

圖6　各標的資產之CoVaR-Return分布圖

三、　實證結果比較

透過上述Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型可求得各100組之效率投資組合，以下將依據兩模型之實證結果進行比較。

首先本研究將依據Mean-CoVaR模型中各最適投資組合的權重配置結果，加權計算其各投資組合之標準差(σ_p)；以下將Mean-CoVaR效率前緣自原本的報酬率(R_p) – CoVaR值座標空間，轉為報酬率(R_p) - 標準差(σ_p)的座標空間，並與Mean-Variance效率前緣進行比較：

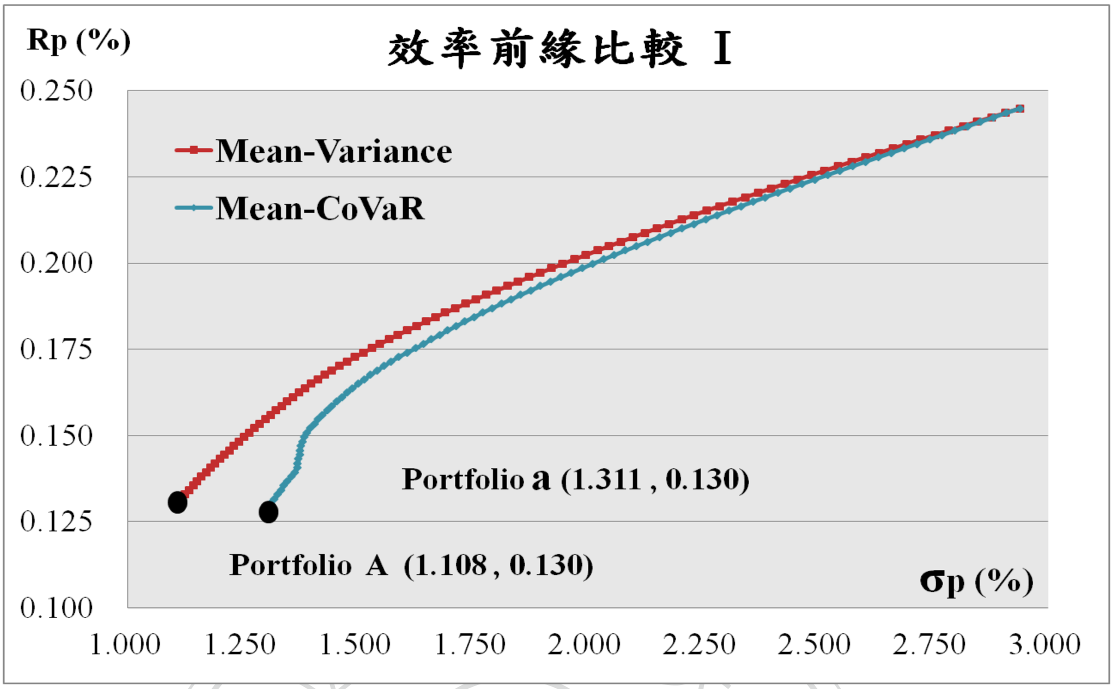

圖7　Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型下之效率前緣比較 I

由上圖可看出，在相同的投資組合報酬下($R_p = 0.130$)，Portfolio A的標準差較Portfolio a的標準差小($\sigma_A = 1.108 < \sigma_a = 1.311$)，即Portfolio A之績效較Portfolio a來得好；除此之外，因在建構模型時為方便比較績效，本研究將投資組合報酬率(R_p)限制在 0.125% 與 0.25% 間，並在此區間中加以等分，使得Mean-Variance效率前緣上Portfolio A、Portfolio B…與Mean-CoVaR效率前緣上Portfolio a、Portfolio b…之投資組合報酬率相同($R_A = R_a$ ，$R_B = R_b$ ...)，因此在同一投資組合報酬率下，Mean-Variance效率前緣上各組投資組合的標準差(σ_p)均小於Mean-CoVaR效率前緣上各組投資組合標準差(σ_p)，即報酬率(R_p) - 標準差(σ_p)的座標空間下，Mean-Variance模型較Mean-CoVaR模型來得好。

在報酬率(R_p) - 標準差(σ_p)的座標空間中，Mean-Variance模型較Mean-CoVaR模型好，但以下將就Mean-Variance模型中各最適投資組合的權重

配置結果，代回CoVaR公式中，回推其投資組合的CoVaR值，並將Mean-Variance效率前緣自原本的報酬率(R_p) –標準差(σ_p)座標空間，轉為報酬率(R_p) - CoVaR值的座標空間進行比較：

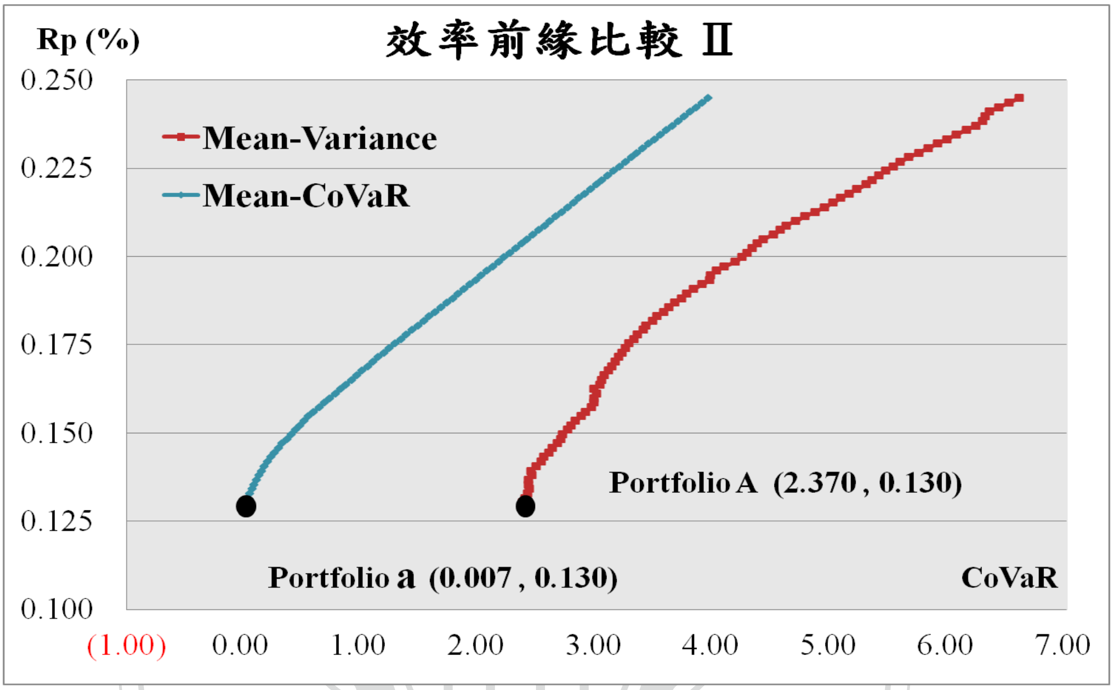

圖8　Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型下之效率前緣比較Ⅱ

由上圖效率前緣比較Ⅱ可看出，在相同的投資組合報酬下($R_p = 0.130\%$)，Portfolio a 的 CoVaR 值較 Portfolio A 的 CoVaR 值小($CoVaR_a = 0.007 < CoVaR_A = 2.370$)，即依投資組合B的權重配置下，遭受系統性風險擴散的可能影響將較依投資組合A來得小；此外在同一投資組合報酬率下，Mean-CoVaR效率前緣上的其他各點投資組合CoVaR值均遠小於Mean-Variance效率前緣上的投資組合CoVaR值，是故在考量系統性感染效果下， Mean-CoVaR模型的配置將較Mean-Variance模型來得更有效率。

第三節 樣本外測試

依據上節建構出兩模型的投資組合後，本研究將以2008年01月02日至2009年12月31日，共500筆標的資產之日報酬資料進行樣本外測試。首先將兩模型下各100組投資組合，依其最適權重配置於各標的資產，並計算其每日加權平均報酬率；其次依據各投資組合下，共500筆每日投資組合報酬率計算該投資組合之日平均報酬率(R_p)與標準差(σ_p)。下圖為樣本外期間下，Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型中各投資組合之報酬率(R_p) –標準差(σ_p)圖：

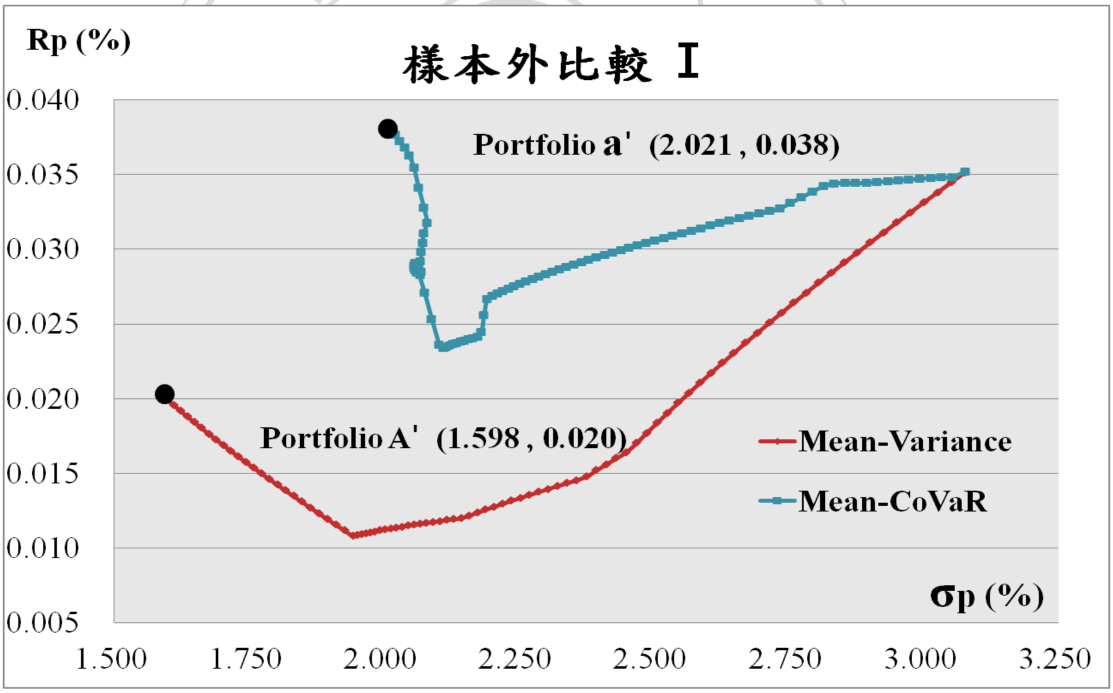

圖9 Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型之樣本外期間比較 I

上述比較圖為Portfolio A與Portfolio a依其權重配置下，在2008年01月02日至2009年12月31日所得到之平均日報酬率(R_p)與標準差(σ_p)，即上圖中的Portfolio A'與Portfolio a'。以前一節提到兩模型之最小變異投資組合(MVP)為例，Portfolio a在原始的資料期間中與Portfolio A具有相同的平均日報酬

($R_a = R_A = 0.130\%$)，但Portfolio A的標準差較小($\sigma_A = 1.108 < \sigma_a = 1.311$)，而在樣本外測試期間，Portfolio A'之平均報酬率為0.020%、標準差為1.598%，Portfolio a'之平均報酬率為0.038%、標準差為2.021%，換而言之Portfolio a'不但報酬率較高，其報酬率的波動度也較小。

除此之外，若將兩模型下各組投資組合進行比較，可發現Mean-CoVaR模型的投資組合績效較優於Mean-Variance模型；以夏普指數(Sharpe Ratio)來說，Portfolio a'的Sharpe值為0.019大於Portfolio A的Sharpe值0.012，是故Portfolio a'績效較Portfolio A來的好，此外Mean-CoVaR模型有97%的投資組合在樣本外期間之Sharpe值均大於Mean-Variance模型，是故Mean-CoVaR模型顯著優於Mean-Variance模型。下圖則為樣本外期間下，Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型中各投資組合之報酬率(R_p) –CoVaR圖：

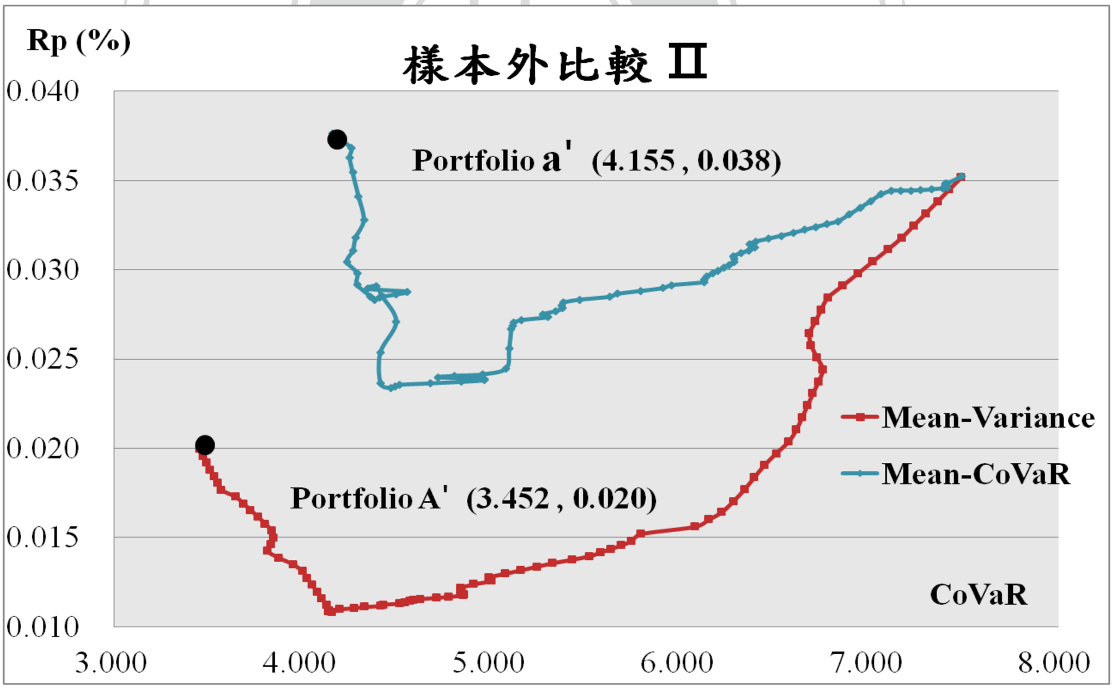

圖10 Mean-Variance模型與Mean-CoVaR模型之樣本外期間比較 II

若以報酬率(R_p) –CoVaR圖來說，Portfolio A'之平均報酬率為0.020%、CoVaR值為3.452，Portfolio a'之平均報酬率為0.038%、CoVaR值為4.155，若

以類似Sharpe值的概念，將平均報酬率除以CoVaR值後，在每單位CoVaR下Portfolio a'的平均日報酬為0.009，Portfolio A'的平均日報酬則為0.006($R_{a'}$ / $CoVaR_{a'} = 0.009 \; > \; R_{A'} \,/\, CoVaR_{A'} = 0.006$)，即在承受一單位的系統性風險感染的影響下，Portfolio a'可較Portfolio A'提供更好的報酬表現。又Mean-CoVaR模型的投資組合在樣本外期間之平均日報酬/CoVaR均大於Mean-Variance模型，是故Mean-CoVaR模型顯著優於Mean-Variance模型。

綜合上述實證結果，Mean-Variance模型雖然能使投資組合報酬率的波動度最小，但其在面臨極端系統性風險下，其績效表現卻不如Mena-CoVaR模型所建構出的投資組合；是故在傳統的Mean-Variance模型下，若能以CoVaR取代Variance所構出新的Mean-CoVaR投資組合模型，納入大盤風險可能的擴散效果下，將可有效降低投資組合在大盤崩跌時的虧損程度，維持較佳的投資績效。

第五章 結論

近年來資產之間風險感染的效果越趨嚴重，使得傳統資產配置理論下的投資組合面臨極大的虧損，因此本研究延用Adrian, Brunnermeierz (2008) CoVaR的概念，在投資組合模型納入風險擴散效果的考量，加以建構Mean-CoVaR資產配置模型以提升投資組合之績效。

本研究係以臺灣50指數內前10檔股票為標的資產，並臺灣50指數作為大盤風險之考量，樣本期間為2003年01月02日至2009年12月31日止，共6年的日報酬資料進行實證分析；本研究以2007年為界，2007年以前共1,241筆日報酬資料(2003/01/02-2007/12/31)用以建構最適投資組合，再以2007年後共500筆資料(2008/01/02-2009/12/31)進行本研究之樣本外測試。

根據本研究之實證結果發現，雖然在以投資組合報酬率的標準差為投資風險考量時，固定每單位投資組合報酬率下，Mean-Variance模型下之投資組合將較Mean-CoVaR模型下之投資組合具有較低的報酬率波動風險；但Mean-CoVaR投資組合遭受系統性風險擴散的可能影響卻明顯低於Mean-Variance投資組合，亦即在考量系統性感染效果下， Mean-CoVaR模型的配置將較Mean-Variance模型來得更有效率。

此外本研究係以2008年至2009年進行樣本外測試，該期間中臺灣50指數經歷巨幅震盪；而根據此測試結果，納入CoVaR概念所建構之Mean-CoVaR投資組合大幅降低可能虧損，其受到該系統性風險擴散之影響顯著低於Mean-Variance投資組合，且在該期間內，Mean-CoVaR模型有97%的投資組合之Sharpe值大於Mean-Variance模型，持較佳的投資績效。

參考文獻

Adrian, Tobias and Markus K. Brunnermeier (2009), "CoVaR," *Federal Reserve Bank of New York Staff Report* 348.

Alexander, G. J. and A. M. Baptista (2004), "A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model," *Management Science* Vol. 50, No.90, pp1261-1273.

Artzner, P., F. Delbaen and J. Eber, D. Heath (1999), "Coherent measure of Risk," *Mathematical Finance*, Vol.9, No.3, pp203-228.

Brook, A., D. Kendrick and A. Meeraus (1988), "GAMS-A User's Guide," *The Scientific Press*, Redwood City, CA.

Campbell, R., R.Huisman and K. Koedijk(2001), "Optimal portfolio selection in a value at risk framework," *Journal of Banking and Finance* 25, 1789–1804.

Chernozhukov,V. and L. Umantsev (2001), "Conditional Value-at-Rissk：Aspects of Modeling and Estimation," *Empirical Economics*, Vol. 26, Issue 1, pp. 271-292.

Chopra, V.K. and W.T. Ziemba (2001),"The Effect of Errors in Means,Variances,and Covariances on Optimal Portfolio," *Choice Journal of Portfolio Management*,19,6-11.

Duarte, Jr., A. M. and S. D. R. Alcantara (1999), "Mean-Value-at-Risk Optimal Portfolios with Derivatives," *Derivatives Quarterly*, Vol. 6, pp. 56-64.

Duffie, D. and J. Pan (1997), "An overview of value at risk," *Journal of Derivatives*, Spring 1997, Vol. 4, No.3, pp. 7-49.

Engle, R.F. and S. Manganelli (2004), "CAViaR：Conditional Value at Risk by Quantile Regression," *Journal of Business & Economic Statistics*, Oct 2004, Vol.22, Issue 4, pp. 367-381.

Hendricks, D. (1996), “Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data,” *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, Vol. 2, pp. 39-69.

Jorion, P. (1996), “Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk,” *McGraw-Hill*.

J. P. Morgan/Reuters (1996), *RiskMetrics* ^{TM} *-Technical Document*. Fourth Edition.

Kataoka, S., (1963), “A stochastic programming model,” *Econometrica*, 181-196.

Koenker, R., and G. W. Bassett (1978), “Regression Quantiles,” *Econometrica*, Jan19878, Vol. 46, Issue 1, pp.33-50.

Longin, F.M. (1996),“The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns,” *Journal of Business*, vol.69.

Markowitz, H. (1952), “Portfolio selection,” *Journal of Finance*, Vol. 7, pp.77-91.

Mausser, H. and D. Rosen (1998), “Beyond VaR: From Measuring Risk to Managing Risk,” *ALGO Research Quarterly*, Vol. 1, pp. 5-20.

Pflug, G. Ch. (2000), “Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk,” In. Uryasev S. (Ed.) *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers.

Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000), “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, Vol. 2, pp. 21-41.

Roy, A.D. (1952), “Safety First and the Holding of Assets,”*Econometric*, 431-449.

Uryasev, S. (2000), “Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications,” *Financial Engineering News*.

William T. Ziemba (Winter 1993), “The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice,” *J. Portfolio Management*, , 6-11.

李吉元，民國九十二年六月，「風險值限制下最適資產配置」，成功大學財務金融研究所碩士班論文。

洪幸資，民國九十三年六月，「控制風險值下的最適投資組合」，政治大學金融研究所碩士班論文。

許倫維，民國九十五年六月，「探討在Mean-Variance 模型下，VaR或CVaR的條件限制對投資組合選擇的影響」，清華大學科技管理研究所碩士班論文。

黃惠萱，民國九十五年六月，「最適資產配置模型績效之研究- M-V與M-CVaR模型之比較」，銘傳大學財務金融學系研究所碩士班論文。

陳怡君，民國一零零年七月，「CoVaR風險值對金融機構風險值管理之重要性-以臺灣控股公司為例」，政治大學金融研究所碩士班論文。

張吟綺，民國九十四年六月，「考慮景氣循環與風險值下的最適資產配置之實證研究」，交通大學經營管理研究所碩士班論文。

蔡依婷，民國九十九年六月，「追蹤指數與控管CVaR之投資組合規畫模型」，政治大學應用數學系研究所碩士班論文。

鄭互維，民國九十六年六月，「應用Mean-VaR模型於最適化油品煉製組合」，交通大學經營管理研究所碩士班論文。