

國立政治大學經濟學系碩士論文

指導教授: 林馨怡博士

高所得份額趨勢探討:

分量迴歸下結構性改變之應用

Trends in Top Incomes:

Structural Changes in Regression Quantiles

研究生: 賴沂良

中華民國一百零一年六月

摘 要

本文使用 Qu(2008) 以及 Oka and Qu(2011) 分量迴歸下結構性改變檢定分析 20 世紀與二次世界大戰戰後不同區域與國家之高所得份額趨勢變化。不同以往一般結構性改變檢定, 加入分量迴歸的概念研究一國家之高所得份額趨勢改變是否來自中高分量。不同區域的實證扣除考慮多個分量下沒有偵測出結構性改變的區域外, 有一半支持高所得份額趨勢改變來自中高分量; 戰後不同國家扣除考慮多個分量下沒有偵測出結構性改變的國家外, 除了美國其餘國家都支持高所得份額趨勢改變來自中高分量。

關鍵字: 高所得份額; 分量迴歸; 結構性改變



目錄

1	緒論	1
2	文獻回顧	3
2.1	盎格魯薩克遜地區(澳洲、紐西蘭、愛爾蘭、加拿大、英國、美國)	5
2.2	斯堪地那維亞地區(挪威、瑞典、芬蘭)	7
2.3	歐洲大陸地區(法國、德國、荷蘭、西班牙、瑞士、葡萄牙)	8
2.4	亞洲地區(印度、日本、新加坡)	11
3	分量迴歸下結構性改變檢定	14
3.1	單一結構性改變檢定	14
3.1.1	給定分量下單一結構性改變檢定	14
3.1.2	多個分量下單一結構性改變檢定	19
3.2	多個結構性改變檢定	19
3.2.1	給定分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論	23
3.2.2	多個分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論	24
3.3	重複橫斷面之給定分量及多個分量下多個結構性改變檢定之係數與變動時間點的估計與推論	25
3.4	給定分量及多個分量下結構性改變檢定之變動時間點數量決定	28
4	實證	31
4.1	資料與模型	31
4.2	20世紀高所得份額之結構改變	34
4.3	二次世界大戰戰後高所得份額之結構改變	39
4.3.1	四大區域	39
4.3.2	個別國家	43
4.4	個別區域與國家各個分量支配整個結構性變動點討論	55
5	結論	58

附錄

59

參考文獻

79



表目錄

1	四大區域分類	4
2	20世紀與戰後時期個別國家之敘述統計	32
3	20世紀與戰後時期不同區域之敘述統計	33
4	20世紀全世界國家高所得份額之結構改變	34
5	20世紀不同區域高所得份額之結構改變	36
6	20世紀不同區域高所得份額之結構改變(續)	37
7	戰後時期全世界國家高所得份額之結構改變	39
8	戰後時期不同區域高所得份額之結構改變	40
9	戰後時期不同區域高所得份額之結構改變(續)	42
10	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變	44
11	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)	46
12	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)	48
13	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)	50
14	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)	52
15	戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)	54
16	不同區域各個分量支配整個結構性變動點一覽表	56
17	個別國家各個分量支配整個結構性變動點一覽表	57

圖目錄

1	20世紀不同區域個別分量高所得份額結構改變時間點	83
2	20世紀全世界個別分量高所得份額結構改變時間點	84
3	戰後時期不同區域個別分量高所得份額結構改變時間點	85
4	戰後時期全世界個別分量高所得份額結構改變時間點	86
5	戰後時期各個分量歐洲大陸國家高所得份額結構改變時間點	87
6	戰後時期各個分量北歐與亞洲國家高所得份額結構改變時間點	88
7	戰後時期各個分量盎格魯薩克遜國家高所得份額結構改變時間點	89
8	戰後時期所有個別國家不同分量下結構變動時間點總覽	90
9	戰後時期不同區域下個別國家不同分量下結構變動時間點總覽	91



1 緒論

高所得份額意旨一國家所得於前面百分位數之群體總所得(e.g., 所得前10%群體或所得前1%群體等, 視定義而定) 占全體總所得的比重。其背後所代表的經濟意義即所得不均程度的概念, 當一國家高所得份額越高, 所佔比重越大時, 代表該國家所得位於前百分位數群體所持有的所得越多, 即少數群體握有大部分的所得, 則認為所得不均情形越嚴重。高所得份額時間趨勢方面, 當時間趨勢為負向時, 隱含所得不均程度情況得到改善, 該國家的發展邁向所得不均程度更均等的方向, 相反的趨勢為正向時, 代表該國家邁向所得不均程度所得不均更惡化的方向, 因此, 高所得份額時間趨勢可以用來衡量一國家所得不均程度的發展。

高所得份額一直以來都是熱門的經濟議題, 過去有豐富的文獻探討不同國家高所得份額的演變, 諸如研究高所得份額時間序列走勢, 解釋該序列長期走勢是向上或是向下, 亦討論何種原因才是決定長期所得不均走勢的因素。不同作者分析不同國家之高所得份額序列並不會完全相同, 主要由於時間序列的處理方法不完全相同, 抑或是資料來源的差異例如同一國家但選用不同的資料庫等。造成錯估真實高所得份額的可能原因為某國家於某個年度稅務制度發生改變, 或出現資料沒有辦法提供完整訊息的情形例如越高所得之群體越可能發生逃稅或避稅的情形, 使得稅務資料並沒有辦法完整描述真實情況等。跨國分析而言, 比較不同國家高所得份額走勢的差異, 容易陷入國與國之間序列沒有同質的問題, 這導因於不同國家稅務制度的不同, 不同國家建造高所得份額序列的過程處理方法不完全相同等。本文資料使用選取 Roine and Waldenstrom(2011) 所提供之不同國家高所得份額資料, 該資料包含18個國家劃分為4大區域¹。

高所得份額走勢改變的原因文獻上常見的有累進稅, 工資所得及資本所得的改變, 分別說明如下: 累進稅所影響到的所得群體範圍主要針對所得較高的群體, 並發現當所得越高, 稅的比率也會越高, 所得級距與稅率級距並非呈現等比例增加, 而是所得越高, 稅率成長得越快, 因此所得越高的群體越容易受到高稅率的影響, 將對於高所得份額序列產生重大的影響。另外關於資本所得及工資所得部分, 在不同時期資本所得與工資所得的重要性

¹依不同區域可劃分為四, 分別為: 盎格魯薩克遜地區、北歐地區、歐洲大陸地區、亞洲地區, 18個個別國家為: 澳洲、加拿大、芬蘭、法國、德國、印度、愛爾蘭、日本、荷蘭、紐西蘭、挪威、波蘭、新加坡、西班牙、瑞典、瑞士、英國、美國。

不同，並且資本所得以及工資所得的改變主要源於所得分配中較高分位數的所得群體。就高資本所得而言，諸如兩次世界大戰以及經濟大蕭條對於高資本所得產生巨大的衝擊，被認為是高所得份額於戰後出現劇烈下降的主要原因；就高工資所得而言，1980年代後高階主管或執行長工資所得的增加，被認為是高所得份額於近期出現顯著增加的主要原因。

本文研究動機源自 Roine and Waldenstrom(2011) 為第一個使用一般結構性改變檢定探討高所得份額時間趨勢的改變，於高所得份額文獻中 Roine and Waldenstrom(2008)、Saez and Veall(2007)、Alvaredo(2010)、Piketty(2007)、Dell(2007)、Piketty and Saez(2003)、Banerjee and Piketty (2010) 提及高所得份額走勢改變主要導因於所得分配中較高分位數的所得群體，但 Roine and Waldenstrom 並未探討不同分量的高所得份額趨勢改變，因此本文將使用 Qu(2008) 以及 Oka and Qu(2011) 分量迴歸下結構性改變檢定用於時間序列模型以及重複橫斷面 (repeated cross sections) 模型當中，前者用來討論不同國家高所得份額趨勢的結構性改變，後者則用來討論不同區域高所得份額趨勢的結構性改變，分析 20 世紀與二次世界大戰戰後不同區域與 18 個國家高所得份額趨勢的結構改變，探究是否高所得份額時間趨勢的結構性改變主要來自中高分量。

本文實證研究 20 世紀不同區域 (全世界、盎格魯薩克遜、北歐、歐洲大陸、亞洲) 與戰後時期不同區域及個別國家之高所得份額趨勢變動，研究結果發現五大區域於 20 世紀及戰後時期，扣除多個分量下沒有偵測出結構性改變的 2 個區域 (亞洲戰後時期、歐洲大陸戰後時期)，其餘 8 個區域中，發現中高分量 (第 0.4-0.9 分量) 支配整個結構性改變的區域有 4 個 (全世界 20 世紀、盎格魯薩克遜 20 世紀、亞洲 20 世紀、歐洲大陸 20 世紀)；戰後時期 18 個國家中，扣除多個分量下沒有偵測出結構性改變的 5 個國家 (西班牙、法國、德國、印度、新加坡)，其餘 13 個個別國家中，發現中高分量支配整個結構性改變的國家多達 12 國，僅美國沒有特定分量支配整個結構性改變。因此，分量迴歸下結構性改變檢定方法不僅可做一般結構性改變檢定，亦能夠研究過去高所得份額文獻中認為高所得份額趨勢變動的主因來自所得分配中較高分位數的群體。

本論文內容安排如下，第一節為緒論，第二節為文獻回顧，第三節為計量方法之介紹，第四節為高所得份額趨勢之結構性改變實證分析，最後一節為本論文結論。

2 文獻回顧

高所得份額一直以來都是熱門的經濟議題，高所得份額意旨一國家所得於前面百分位數之群體所得占全體總所得的比重，當所占全體所得比重越高時，代表該百分位數群體所擁有的所得越高，亦即所得越集中在少部分人手中，則代表該國家所得不均情況越嚴重，因此高所得份額能去衡量一國家所得不均程度。Kuznets(1953) 為第一篇使用美國個人所得稅資料分析高所得份額資料的文章，他的資料年度涵蓋1913年至1948年，建造所得前1%以及前10%群體之高所得份額序列，而後有豐富的相關文獻討論不同國家高所得份額的演變，以及比較不同國家之間高所得份額演變的差異。

討論長期所得不均程度改變的因素上，常見的有累進稅、工資所得及資本所得的改變，累進稅上 Piketty(2005)、Piketty and Saez(2006) 認為1914年大部分西方國家累進所得稅制使得高資本持有者無法增加資本所得對高所得份額造成影響，Atkinson and Leigh(2007) 認為累進稅對於高所得份額於1930及1940年代的下降有很大的影響，高所得邊際稅率從1930年的35%上升至1940年的65%，於1980年代末期高稅率亦為高所得份額上升的原因，1985至1989年高所得邊際稅率從66%減至33%；工資所得上，Piketty(2005) 說明美國1970年代高所得份額的上升與高工資所得顯著的增加有關，Alvaredo(2010) 說明葡萄牙近年來高所得份額穩定的增加主要原因為高工資所得的增加，Piketty and Saez(2003) 認為美國1970年代後的增加導因於高工資所得的提升；資本所得方面，Piketty(2005) 認為1914-1945年高所得份額的下降導因於高資本所得的下降，諸如法國、德國受到二次世界大戰衝擊相對於美國較為劇烈，其高所得份額下降更為劇烈，Jantti et al.(2010) 認為芬蘭1990年代中期所得前1%群體之高所得份額上升的因素為資本所得比例增加，Banerjee and Piketty(2010) 說明印度於1950-1970年代這段期間內高所得份額的下降導因於高資本所得的下降。

討論不同因素對於不同所得群體的影響上，Roine, Jesper et al(2009) 的實證研究討論所得不均程度與經濟成長、金融發展、貿易開放性 (openness)、高所得邊際稅率、政府支出的長期關係，該因素對於不同範圍的所得群體 (所得前1%，前2%-10%群體等) 而言，其所受到的衝擊並不完全相同。Roine, Jesper et al 使用追蹤資料考慮不隨時間改變的因素 (time-invariant factors) 例如具國家特色趨勢等，為了避免誤差項有序列相關，將線性迴歸式採一階差分處理，並將資料改為五年平均值，其所建造出來的高所得份額追蹤資料庫

包含 16 個國家，年份跨足近整個 20 世紀。當一國家每人 GDP 成長率高於平均值，所得前 1% 群體之高所得份額會增加，但所得前 2%-10% 群體之高所得份額並不是增加的，隱含對於美國戰後時期於高生產力及高成長率的情況下，對於所得越高的群體是越有利的。金融發展方面，發生金融危機及銀行危機時，對於較高所得富人之高所得份額產生強烈的負向影響。政府的角色上，發現政府支出佔 GDP 比例對於所得前 1% 群體之高所得份額並無影響，但對於中高階級以及剩餘群體之所得份額分別有負向以及正向的影響。越高的邊際稅率對於所得前 1% 群體或所得前 2%-10% 群體之高所得份額都產生負向的影響。全球化上，常被用來衡量全球化程度的貿易開放性對於所得不均並沒有顯著的影響，由上述發現對於不同範圍的所得群體，其所受到的衝擊並不完全相同，因此推論不同範圍所得群體隨著時間推移其高所得份額走勢也不必然會完全相同，這樣的觀念也是本文未來所欲探討之核心問題。

本節將依序回顧不同國家之高所得份額時間序列走勢，更深切了解過去 20 世紀歷經許多政治或經濟上的衝擊諸如兩次的世界大戰及經濟大蕭條等對一國所得不均程度程度造成的影響。以下所探討的各國家及其所隸屬的區域劃分，將採 Roine and Waldenstrom(2011) 文中討論的 18 個國家：澳洲、加拿大、芬蘭、法國、德國、印度、愛爾蘭、日本、荷蘭、紐西蘭、挪威、波蘭、新加坡、西班牙、瑞典、瑞士、英國、美國。依區域可劃分為四個區域：盎格魯薩克遜國家、北歐國家、歐洲大陸國家、亞洲國家。不同區域之個別國家分類依照 Roine and Waldenstrom(2011) 分法列於表 1，接下來將依不同區域對所有國家進行回顧。

表 1: 四大區域分類

區域	個別國家
盎格魯薩克遜	澳洲、紐西蘭、愛爾蘭、加拿大、英國、美國。
斯堪地那維亞	芬蘭、挪威、瑞典。
歐洲大陸	法國、德國、荷蘭、西班牙、瑞士、葡萄牙。
亞洲	印度、日本、新加坡。

註 1: 四大區域分類參自 Roine and Waldenstrom(2011) 之分類方法。

2.1 盎格魯薩克遜地區(澳洲、紐西蘭、愛爾蘭、加拿大、英國、美國)

首先探討盎格魯薩克遜地區高所得份額的演變。自從1920年代來，澳洲的高所得份額有相當大的下降，Atkinson and Leigh(2007) 認為其時間序列走勢與其他四個盎格魯薩克遜國家例如加拿大、紐西蘭、英國、美國等相當類似，都呈現高所得份額於二次世界大戰後的30年間都是下降的，隨之而來的是1970年代中期後劇烈的上升。於2000年，澳洲所得前1%群體之高所得份額比起自1951年以來任何時點都來的高；而所得前10%群體之高所得份額亦比起自1949年以來任何時點都來的高，所得前0.1%群體之高所得份額也仍然比原有0.1百分比的比重高25倍之多，這也說明高所得份額在此時間點所反應出來的所得不均程度達到相對高點。

Atkinson and Leigh(2007) 做1921年至2002年紐西蘭高所得分配的探討。紐西蘭高所得份額在序列開始的前六十年期間，大多呈現下降的趨勢，而在1986年後出現劇烈反轉往上的情形，並且這樣的反轉是階段性的變化而非連續的趨勢。對於所得很高的群體而言，推論累進稅對於1930及1940年代的高所得份額的下降有很大的影響，高所得邊際稅率從1930年的35個百分點上升至1940年的65個百分點。同樣高稅率的下降亦是高所得份額於1980年代末期增加的主要原因，於1985至1989年，高所得邊際稅率從66個百分點減半至33個百分點，並且認為降低稅率會造成許多影響諸如富有的人更加努力工作，使得他們增加投資報酬等。

Nolan(2007) 探討愛爾蘭20世紀高所得份額的長期趨勢，研究發現所得前0.1%群體之高所得份額於1930年代有巨大的上升，相對於1922年達到將近一倍的水準，約略7%左右，直至1938年左右開始劇烈往下到達1990年約略1.3%的低水準。不同高所得群體如所得前1%與0.5%之高所得份額從1980年代有平緩的上升，1990年代不同範圍的高所得份額都是增加的。愛爾蘭在1920年代是農業為主導的國家，到1960年代開啓工業化的步伐，之後其平均所得水準於1990年代快速趨向一些更加富裕的國家。在這樣的背景下，愛爾蘭的高所得份額趨勢為1930年代早期快速的上升，於二次世界大戰前至1970年代早期有劇烈的下降，而後跟隨的是一段時間的穩定，再於1990年代高所得份額呈現劇烈的向上。

英國整個20世紀高所得演變過程的探討，Atkinson(2005) 認為一次世界大戰前，英國所得是高度集中的，所得前0.1%群體，佔總所得超過10%，高所得份額在兩次的世界大戰期間都有顯著的下滑，於戰後和平期間雖然有一些恢復，但可以看出明顯的均等化過程，

也就是所得不均程度下降。另外 Atkinson 所述均等化時期包含 1923-1933 年經濟大蕭條期間，以及 1946-1956 年及 1965-1978 年。綜觀整個 1908 至 1978 年這段期間，發現英國高所得份額有劇烈的下降，例如所得前 0.1% 群體之高所得份額從 10 下降至 1.25 個百分點，此外高所得群體內的集中度也有相同的下降。² 1979 年英國高所得份額趨勢產生反轉，而後的 20 年間，高所得份額都是趨勢往上，恢復部分自從二次世界大戰戰後時期的下降，雖然英國的所得不均程度於整個樣本期間末期並沒有恢復到二次世界大戰前的水準，但假使 1990 年代向上的趨勢繼續下去，往後幾十年有可能會接近戰前 1937 年的高水準。

Piketty and Saez(2003) 探討美國 1913 年至 1998 年高所得與高工資份額序列，所估計的高所得份額序列於整個 20 世紀展現出 U 型的型態，也就是先下降後上升的情形。Piketty and Saez 發現高資本所得在 20 世紀前半所歷經的衝擊並遭受嚴重的影響主要導因於一次世界大戰後的蕭條與經濟大蕭條以及戰爭中產生的財政衝擊，Piketty and Saez 亦討論高資本所得無法從受到衝擊後完全恢復亦導因於累進稅的關係。高工資份額方面，於 1920 年代至 1940 年是相當平坦的，而在戰爭期間則是陡峭的下降，高工資份額開始恢復始於二次世界大戰戰後衝擊的 1960 年代，並且於現在高於二次世界大戰前的水準。因此他們推論高所得份額過去 30 年的增加主要是高工資所得上升的結果。

Saez and Veall(2007) 檢視加拿大 1920 至 2000 年高所得的演變。研究發現加拿大高所得份額在二次世界大戰期間有劇烈的下降，並且於之後的 30 年間並沒有恢復，而在最近的 20 年間，也就是 1980 年代後，加拿大的高所得份額出現巨大的增加，幾乎與美國增加的一樣多。然而這樣的變動經常被忽略，主要由於它集中在加拿大所得分配中前 10% 的群體內，因此僅僅於非常高之所得群體中才有辦法發現高所得份額的增加。這樣的增加被認為是導因於高工資所得與高薪水的湧起，自從二次世界大戰後，加拿大高所得群體的所得構成亦發生改變，認為許多高所得個體主要所得來源來自就業而非資本報酬。

盎格魯薩克遜國家的高所得份額趨勢，總體來看相當類似，都呈現二次大戰戰後高所得份額趨勢向下情形，於 1970 年代諸如美國、澳洲、英國等國趨勢由負向反轉為正向，而愛爾蘭、紐西蘭、加拿大等國則於相對較晚的 1980 年代後才有反轉往上的情形。

²例如所得前 0.1% 群體總所得佔所得前 1% 之群體總所得的比例是下降的，文獻上常寫為比例中的比例 (shares in share)，也代表著所得集中度的大小。

2.2 斯堪地那維亞地區(挪威、瑞典、芬蘭)

接著探討斯堪地那維亞地區之高所得份額演變。挪威高所得序列討論可見於Aaberge and Atkinson(2010), 其研究樣本範圍橫跨100年之長, 因此此序列能夠追溯至挪威工業化直至變為由於石油生產而致富的這段期間內, 高所得分配的演變。此文研究高所得份額比例多達六種,³ 研究結果發現高所得份額先下降而後急遽上升, 1948年所得前0.1%的高所得占全體總所得高達2.8%, 而1980年代占總所得的比重少於1%; 所得前1%的高所得份額亦從1948年的9%下降至1980年代連9%一半都不到的水準, 並且推斷高所得份額的下降可能始於戰爭時期並且持續將近50年之久。而於1992年開始有反轉向上的情形, 推斷與1992年的稅務改革及1980年代資本市場自由化有關。綜觀整個時期來看, 發現高所得份額於1992年後的上升相對於前面時期呈現的趨勢向下是更為劇烈且陡峭的。另外亦分析比例中的比例,⁴ 發現19世紀的所得分配是極度不均的, 於1885年左右比例中的比例超過40%, 隨著時間逐漸下降至1960年代的20%左右, 於1980年代開始出現上升的跡象, 而1991年後則是急遽的上升, 所得集中度呈現U型形狀, 也就是先下降而後上升的情形。最後結論二次世界大戰戰後時期, 累進所得稅、社會福利的興起與高所得份額穩定的下降有關係, 高所得份額由下降轉為上升, 始於1990年代初, 反轉點的出現稍晚於美國與英國。

另一個北歐國家瑞典, 一個所得極為均等化的社會, 其高所得演變的探討則見Roine and Waldenstrom(2008), 研究高所得分配中較小分位數的群體, 不僅僅討論所得前10%群體, 討論範圍亦可縮小到所得前0.01%群體。研究結果認為瑞典的高所得份額, 如同其他西方國家, 於20世紀前80年有顯著的下降, 而大部分的下降發生在1950年以前, 也就是瑞典福利狀態擴張之前, 並推論大部分高所得份額的下降導因於所得分配內非常高所得群體之高所得份額的下降, 也就是所得前10%群體之所得分配下半部(前5%至前10%)異於所得前1%群體, 其高所得份額呈現相當穩定的情形。Roine and Waldenstrom(2008)亦發現一次世界大戰後高所得份額下降的主因為非常高所得(所得前10%)群體工資所得的增加, 另外二次世界大戰並沒有對瑞典高所得份額造成顯著的影響, 取而代之的是戰後

³給出挪威1975-2006年總共高達6種不同比例之高所得份額, 分別為: 所得前10%、前5%、前1%、前0.5%、前0.1%、前0.05%群體之高所得份額。

⁴主要是為了控制總所得的不確定性, 來分析特定所得比例群體所占較大範圍所得比例群體的比例, Aaberge and Atkinson(2010)有研究所得前1%群體所得占所得前10%群體所得之比例及所得前0.5%群體所得占所得前5%群體所得之比例及所得前0.1%群體所得占所得前1%群體所得之比例。

時期高所得群體邊際稅率急劇上升，造成高所得份額相當顯著的下降。研究結果諸如1950年前所得不均程度大幅下降以及非常高所得之群體為造成所得不均程度變化的主要原因，亦推論1970年代高所得份額進一步的下降導因於邊際稅率的增加以及工資團結公會的興起。這些新發現與先前研究所強調1960年代及1970年代福利狀態的提升相互補。

Jantti et al.(2010) 提供芬蘭高所得份額演變的證據，使用所得稅資料年份為1920年至2003年以及個體資料年份為1966年至2004年。說明對於非常有錢之所得群體諸如所得前1%群體之高所得份額，如何隨著時間產生變化。研究結果顯示不同百分比之高所得群體其高所得份額於1960年代初期至1990年代中期都是一致的，均產生下降的情形，而後便開始上升，也說明大部分時間是處於均等化的時期，也就是高所得份額1960年至1990年代持續的下降，而後對於高所得份額如何由下降轉為上升，逐漸邁向不均等甚至比四十年前的水準更高這樣的情形亦有說明。Jantti et al.(2010) 推論主要造成1990年代中期所得前1%群體之高所得份額上升的主要因素為前所未見資本所得比例的增加，資料顯示於2004年，對於所得前1%群體之資本所得比例高達63%，並說明高所得的構成，於樣本期間末期相對於較早時期是相異的。另外亦討論1993年稅務革新，認為對於高所得份額趨勢向上造成相當重大的影響，換言之，說明1990年代中期累進所得稅的下降，作為解釋芬蘭高所得份額增加的主要原因。

北歐未參戰國家雖然於二次世界大戰戰後都出現高所得份額下降，但下降的幅度相對於參戰國家來的平緩，於1990年代前後三個國家都發生趨勢由負向反轉為正向且正向的幅度相當劇烈。

2.3 歐洲大陸地區(法國、德國、荷蘭、西班牙、瑞士、葡萄牙)

探討歐洲大陸地區高所得份額的演變，法國20世紀所得不均的趨勢探討可見Piketty(2007)，其研究法國所得分配於1901-1998年間是否更為平等、所得不均在哪個時期是增加什麼時期是減少的以及所得分配中什麼樣分位數的所得群體更容易受到趨勢的影響等。研究結果顯示法國所得前10%群體之高所得份額趨勢確實於20世紀時期經歷顯著的下降，高所得份額從20世紀初期的45%下降至1990年代的32%左右，更細部的看，所得前10%群體之高所得份額於第一次世界大戰期間是下降的，而後於1920年代以及1930年代前半段有恢

復的趨勢，至1935年高所得份額達到約略47%的高點，⁵ 而後高所得份額於1936年後開始出現劇烈的下降，於二次世界大戰期間更為劇烈。就戰後時期而言，高所得份額從1945年的29%左右增加至1967年的36%，而後開始呈現下降的趨勢直至1982年的31%附近，1980年代初期後則呈現緩慢增加的趨勢。Piketty(2007) 發現絕大多數的下降都出現在1945年之前，1945年之後都維持在32%左右的平均值，正好1914-1945年的下降正好歷經兩次世界大戰以及1930年代的經濟大蕭條。對於高所得份額下降主要原因的推論，認為主要導因於非常高所得群體的影響，所得前10%至所得前5%群體之高所得份額於1900-1998年間展現出長期且相當穩定的趨勢，都在平均值11%-11.5%附近波動；而所得前5%至1%群體之高所得份額則出現平緩的下降，從20世紀初的15%下降至1990年代的13%左右；不同的是，所得前1%群體之高所得份額下降超過一半的水準，從20世紀初的20%下降至1990年代的7%。因此可藉由不同高所得份額序列推論越高所得群體之所得份額，下降趨勢越明顯。

Dell(2007) 認為德國相對於其他工業化國家，在20世紀經歷更多的外生衝擊。研究結果發現德國的高所得份額於1914-1945年是下降的，這樣的下降主要導因於高所得（所得前1%群體）分配的下降，特別是高所得群體內分配前端（所得前0.01%群體）的下降。雖然第一次世界大戰以及德國納粹政府對於高所得份額有正面的影響，但一次世界大戰前的水準在二次世界大戰戰後時期便從未再被到達過，高所得份額於1950年代1960年代再次有正向的趨勢。Dell(2007) 推論高所得份額下降很大的部分導因於1914年至1945年時期的衝擊，第一次世界大戰以及隨後的通貨膨脹時期，造成高所得結構的改變，第三德意志時期 (Third Reich)，納粹政權 (Nazi power) 導致高所得份額急遽上升，二次世界大戰後，第二次通貨膨脹時期以及1948貨幣改革將高財富分配負擔移轉至較低所得的群體，重新統一時期，則見到兩個完全不同所得分配群體合併、轉變的過渡時期。

Salverda and Atkinson(2007) 描寫荷蘭20世紀高所得分配的發展，認為如同其他歐洲國家，高所得份額考慮兩種不同的計算方法來比較，分別考慮總所得 (gross incomes) 與可支配所得 (disposable incomes)，探究高所得的組成則分成兩種形式，分別為資本所得與勞動所得。研究結果顯示使用總所得資料之高所得份額有巨大的下降，導因於受到兩次世界大戰的影響，一路下降至1970年代中期的低點。1970年代後便呈現相對穩定的情

⁵Piketty(2007) 所建造出來的序列中，至此之後就再也沒有回到此高點

形，荷蘭並不像英國、美國及其他盎格魯薩克遜國家發現高所得份額呈現 U 型的形式，而是發現荷蘭高所得份額將近 25 年來的穩定。可支配所得之高所得份額發展與總所得相似，自 1970 年代便呈現平坦的情形，對於可支配所得與總所得而言，所得前 10% 群體之高所得份額是相當穩定的，但對於所得分位數更高群體之高所得份額則呈現增加的情形。

Alvaredo and Saez(2009) 研究結果顯示西班牙所得集中度於 1930 年代比今日所得集中度還要高，所得前 0.01% 群體之高所得份額於 1930 年代是近幾十年來的兩倍之多，所得前 0.01% 群體之高所得份額在 Franco 獨裁政權時期 (1939 年) 的前十年下降的很劇烈，⁶ 自從 1970 年代後開始有緩慢的增加。雖然西班牙直至 1975-1977 年才變為民主國家，而後開始實施現行社會福利以及重分配之稅務政策，結果說明異於過去文獻觀點，西班牙的所得集中度從 1950 年代後就相當的低，主要導因於穩定且壽命長的獨裁政體，自 1981 年後，高所得份額顯著的增加主要導因於高所得群體薪資的增加以及資本增加 (capital gains)，這些增加主要集中在所得前 1% 群體，尤其是此群體內更高分位數的所得群體，而低於所得前 1% 之所得群體並沒有太大的改變。

Alvaredo(2010) 分析葡萄牙於 1936-2005 年所得與工資集中度的發展，結果顯示所得集中度於 1930 年代及 1940 年代比今日還要高，高所得份額在二次世界大戰後期至 1960 年代末都是相當穩定的，但仍然是下降的趨勢，亦發現由於葡萄牙並未參加二次世界大戰，因此看出其高所得份額下降強度比起其他歐洲國家小得多，1950-1970 年間發現所得集中度的水準與西班牙、法國、英國、美國相比較仍維持在相對高的位置，而後於 1980 年代開始產生反轉往上情形。在過去十幾年，研究發現高於所得前 10% 群體之高所得份額都呈現穩定的趨勢，更細部的看，考慮高所得群體內越高分位數的群體，其所代表之高所得份額增加的越多。

Dell, Piketty, and Saez(2007) 探討瑞士 20 世紀所得與財富集中度的發展，目標在於檢驗瑞士這個沒有受到兩次世界大戰衝擊並且從未建立累進稅制的國家，利用瑞士所得及財富稅收統計來建構所得與財富份額長期且同質的所得集中度序列。研究結果發現並無參戰的瑞士其高所得與財富份額經過兩次的世界大戰以及經濟大蕭條的衝擊下都是下降

⁶西班牙自從 1930 年代後歷經巨大的政治改變，西班牙於 1931-1939 年為一個共和政體，1936 年 Franco 將軍的軍隊政變開啓為時三年的內戰，也開啓西班牙從 1939 年至 Franco 將軍死時 1975 年的獨裁政權，自此之後西班牙轉變為民主國家並實施重分配政策諸如累進所得稅與財富稅的發展以及全體醫療保險福利。研究西班牙的高所得份額以及財富份額能夠了解政權時期 (political regime) 以及經濟政策對於所得不均以及所得集中度的影響。

的,但不是非常明顯。自從二次世界大戰後,高所得與財富份額完全恢復,研究結果亦顯示1969年,高財富份額達到一次世界大戰前的高水準,高所得份額於1970年代早期高於二次世界大戰前時期,這些結果與法國、英國、美國、加拿大相異,因此,瑞士比起其他國家於20世紀初期有較低的所得與財富集中度,但於1960年代,瑞士展現出比其他國家還要高的財富與所得集中度,而於1970年代,推論非稅因素諸如人口年齡、退休金發展,為影響財富集中度的主要原因。瑞士的經濟發展相似於法國、美國,也隱含瑞士在二次世界大戰戰後時期的高財富集中度以及低的稅率水準相對於法國、美國等國家,並沒有提供經濟表現上的提升。

歐洲大陸國家國與國間高所得份額的演變並不是很一致,例如法國、德國、荷蘭在二次世界大戰後高所得份額受到很大的影響,都有劇烈往下的趨勢,反觀葡萄牙以及瑞士並未參戰的國家高所得份額並沒有受到太大的影響,而德國、西班牙分別於1960年代及1970年代開始有上升的趨勢,法國、葡萄牙、瑞士於1980年代開始有顯著反轉往上的趨勢,荷蘭則呈現長期穩定的情形。

2.4 亞洲地區(印度、日本、新加坡)

最後則探討亞洲地區高所得的演變。印度高所得與高工資序列資料年分為1922-2000年由Banerjee and Piketty(2010)建造,使用個人稅務報告書資料算出高百分位數所得群體之高所得份額,包含所得前1%、前0.5%、前0.1%、前0.01%所得群體。研究結果顯示所得不均程度,也就是高所得份額於1922年至2000年間出現U型的形式,此外亦於所得前1%群體之高所得份額發現較為不顯著的U型形式。所得前0.01%群體之高所得份額於1920年代至1950年代大約在2-2.5%波動,發現經濟大蕭條時期以及二次世界大戰衝擊對於印度的影響比起其他西方國家來的小。對於所得前0.01%群體,其於1950年代至1980年代早期呈現逐漸下降的趨勢,對於所得前1%群體之高所得份額亦是如此,從1950年代的12-13%下降至1980年代早期的4-5%,這段期間內印度的累進稅於1950-1970年代是非常高的,也因此對於資本集中度產生很大的影響,也隱含這段期間內,高所得份額的下降主要導因於高資本所得的下降,而後兩種不同分位數所得群體之高所得份額都於1980年代至1990年代開始上升,所得前1%群體甚至還上升至相較於1980年代初期兩倍水準,這段期間內印度高所得份額的提升,Banerjee and Piketty(2010)認為並非導因於高資本所得的

復甦，而是導因於高工資所得的提升。

新加坡高所得的演變則見 Atkinson(2010) 的研究，其資料期間涵蓋短暫屬於馬來西亞的殖民時期，以及 1965 年後完全的獨立的時期。1950 年代殖民時期，高所得份額提升至 1951 年的高點，而後 1950 年代期間都呈現下降的趨勢，隨後的獨立時期，高所得群體伴隨的是 25 年相當穩定的情形，於 1990 年代發現高所得份額有下降的趨勢，但於 1996 年後上升約略 90 年代所下降一半的水準，縱使隨後仍有下降的情形，但依舊保持高於早期時的水準，高百分位數所得群體直至 1987 年都相對穩定，而後開始下降直至 1995 年開始有上升的趨勢。Atkinson(2010) 認為所建造出來的高所得份額序列對於諸如結束殖民時期自我政府的出現，與馬來西亞聯盟，離開聯盟這些政治變動，並沒有顯示出高所得份額因此受到很大的變化，自從 1990 年代末期的亞洲金融風暴其高所得份額上升將近原先一半的水準，於 2002 年後，高所得份額開始往下，但於 2005 年依舊維持在高於 1997 年的水準，所得前 0.5% 群體之高所得份額仍有 9.5% 的水準。最後結論新加坡現今的所得分配受到全球的議題或受到貿易、技術改變的影響或間接受到減少累進所得稅的影響。

Moriguchi and Saez(2008) 探討日本所得集中度的演變，主要研究結果發現日本是一個離平等主義很遠的國家，從第一次工業化時期所得不均程度就非常高，1920 年代末，當大部分國家都歷經經濟大蕭條期間實質所得集中度的下降，經濟大蕭條對於日本的衝擊相對溫和。日本所得前 1% 群體之所得集中度於二次世界大戰時期是非常高的，並且有短暫的波動。高所得份額於二次世界大戰期間下降的非常劇烈且陡峭，相較於其他國家，日本於此時間的下降更為顯著，並且於剩餘的 20 世紀維持在相當低的水準（雖然在最後十年有增加的跡象），最後推論日本所得集中度的演變是歷史事故，也就是二次世界大戰，伴隨著大規模的政府干預以及通貨膨脹以及戰爭的破壞所導致。另外利用所得構成資料，顯示高所得集中度劇烈的下降主要導因於二次世界大戰資本所得的崩塌，財產稅統計資料有證據顯示高財富持有於二次世界大戰期間是下降的，Moriguchi and Saez(2008) 推論在職業革新下，資產重分配以及制度結構的轉變使得後續幾十年所得集中度沒有辦法提升，這樣的重新分配政策，確實影響資本累積過程。最後結論二次世界大戰後，經濟的結構改變將暫時性影響轉變為半恆常性影響。也認為 1960 年代稅務政策的改變，公司治理，人力資源管理，都可能是在日本於高經濟成長時期使得所得沒有辦法更加集中的主要原因。

亞洲國家方面各國差異很大，日本高所得份額從二次世界大戰戰後急遽下降，於 1950

年後呈現出相對穩定的情形，印度則是高所得份額急遽下降直至1980年後開始有增加的趨勢，新加坡則於1950年代下降而後1965年後則伴隨著25年的穩定，直到1997年的亞洲金融風暴以後才又快速增加。

本文研究動機主要導因於過去文獻中，探討不同國家之高所得份額僅僅探討其時間序列走勢，而 Roine and Waldenstrom(2011) 為第一個使用一般結構性改變檢定探討時間趨勢的改變，在結構性變動時間點的探討上，研究區域間是否相一致或區域內個別國家間是否相一致。本文將使用 Qu(2008) 所提出的分量迴歸下結構性改變檢定之檢定統計量的建構以及極限分配的推論，而後 Oka and Qu(2011) 進一步說明結構變動時間點及係數的估計及其極限分配的推論，應用此計量方法於實證研究當中，亦即使用分量迴歸下結構性改變檢定於高所得份額時間趨勢的探討，討論不同高所得份額的高低分量，其時間趨勢的結構改變。



3 分量迴歸下結構性改變檢定

3.1 單一結構性改變檢定

3.1.1 給定分量下單一結構性改變檢定

將分量迴歸模型寫入結構性改變如下，並且假設接下來的模型設定都為下述形式：令 y_t 為一隨機變數， x_t 為 $p \times 1$ 的隨機向量， $Q_{y_t}(\tau|x_t)$ 為給定 x_t 下 y_t 的條件分量， t 代表時間並且令 T 為樣本大小，令 y_t 的第 τ 個條件分量 $Q_{y_t}(\tau|x_t)$ 是線性的。假設條件分量是線性的並且假定有 m 個結構性改變，模型寫為：

$$Q_{y_t}(\tau|x_t) = \begin{cases} x_t' \beta_1^0(\tau), & t = 1, \dots, T_1^0, \\ x_t' \beta_2^0(\tau), & t = T_1^0 + 1, \dots, T_2^0, \\ \vdots & \vdots \\ x_t' \beta_{m+1}^0(\tau), & t = T_m^0 + 1, \dots, T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 τ 代表感興趣的分量， $\beta_j^0(\tau)$ 表在某特定分量 (pre-specified quantile) 下的未知參數， T_j^0 表未知的結構性變動時間點，不同期數下的參數 $\beta_t(\tau)$ 代表於各個時間點下，解釋變數對於被解釋變數在特定分量 $\tau \in [0, 1]$ 的影響。假使兩個不同期數下的參數 $\beta_t(\tau)$ 與 $\beta_j(\tau)$ 在統計檢定上沒辦法拒絕兩者是相同的話，也就等同於 $\beta_t(\tau) \neq \beta_j(\tau)$ 代表係數已經發生改變，因此符合結構性改變的定義。

假設模型為式 (1)，若想檢驗在特定分量以及橫跨多個分量 (across multiple quantiles) 下單一結構性改變的檢定，則虛無假設與對立假設分別說明如下。假設變動點數量只有 1 個，也就是 $m = 1$ ，則給定特定分量 $\tau \in (0, 1)$ 下虛無假設及對立假設為：

$$H_0 : \beta_t(\tau) = \beta_0(\tau) \quad \forall t,$$

$$H_1 : \beta_t(\tau) = \begin{cases} \beta_1(\tau) & \text{for } t = 1, 2, \dots, T_1 \\ \beta_2(\tau) & \text{for } t = T_1 + 1, \dots, T \end{cases}$$

橫跨多個分量下虛無假設及對立假設為：

$$H_0^* : \beta_t(\tau) = \beta_0(\tau) \quad \forall t \text{ and } \forall \tau \in T_\omega$$

$$H_1^* : \beta_t(\tau) = \begin{cases} \beta_1(\tau) & \text{for } t = 1, 2, \dots, T_1 \\ \beta_2(\tau) & \text{for } t = T_1 + 1, \dots, T \quad \text{for some } \tau \in T_\omega. \end{cases}$$

其中 $T_\omega \in (0, 1)$ 為一個 $(0, 1)$ 區間的子集合。前者將焦點放在某特別感興趣的分量去找尋結構性變動點；後者則是考慮所有分量去找尋結構性變動點。

Qu(2008) 提出兩種不同形式的檢定統計量均可用於給定分量 $\tau \in (0, 1)$ 下結構性變動的檢定，分別為 Subgradient based 檢定以及 Wald 檢定。為求得極限分配，在虛無假設之下給出假設 (assumption)，並且為了簡化符號，將 $f_t(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $f_t(\cdot)$ ， $F_t(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $F_t(\cdot)$ ， $F_t^{-1}(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $F_t^{-1}(\cdot)$ ，假設詳見附錄當中。

假設 A.1. 為分量迴歸的基本假設。假設 A.2. 隱含條件密度函數在 $F_t^{-1}(\tau)$ 的鄰域 (neighborhood) 是平滑 (smooth) 的對於所有的 $t = 1, 2, \dots, T$ 。對於解釋變數的假設則放在假設 3，假設 A.3.(a) 說明解釋變數含有截距項；假設 A.3.(b)(e) 描述在樣本子期從 1 一直到 $[\lambda T]$ 的極限收斂情形；假設 A.3.(c) 則被用來得到 weighted empirical process $T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t(1_{\{F_t(y_t) \leq \tau\}} - \tau)$ 的收斂性；假設 A.3.(d) 是被用來建構文中所提出的兩個檢定統計量的弱收斂性，它也隱含 $\max_{1 \leq t \leq T} \|x_t\| = o_p(T^{\frac{1}{2}})$ ，因為：

$$\begin{aligned} p\left(\max_{1 \leq t \leq T} \|x_t\| > T^{\frac{1}{2}}\right) &\leq \sum_{t=1}^T p(\|x_t\| > T^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_{t=1}^T p(\|x_t\|^{3(1+\delta)} > T^{\frac{3(1+\delta)}{2}}). \end{aligned}$$

根據馬可夫不等式 $p(X > C) \leq \frac{E(X)}{C}$ ，得到：

$$\sum_{t=1}^T p(\|x_t\|^{3(1+\delta)} > T^{\frac{3(1+\delta)}{2}}) \leq \sum_{t=1}^T E(\|x_t\|^{3(1+\delta)} / T^{\frac{3(1+\delta)}{2}})$$

則原式可寫為：

$$p\left(\max_{1 \leq t \leq T} \|x_t\| > T^{\frac{1}{2}}\right) \leq \sum_{t=1}^T E(\|x_t\|^{3(1+\delta)} / T^{\frac{3(1+\delta)}{2}}) \rightarrow 0.$$

假設 A.1.-A.3. 使用線性 location-scale 模型做個簡單的例子說明，首先假設模型為：

$$y_t = x_t' \delta + (x_t' \gamma) \epsilon_t,$$

並且令 $f_\epsilon(\cdot)$ ， $F_\epsilon^{-1}(\tau)$ 為 ϵ 的密度函數以及 ϵ 的第 τ 個分量。則假設 A.1. 說明 $f_\epsilon(F_\epsilon^{-1}(\tau))$ 是均勻有界 (uniformly bounded) 的連續函數。假設 A.2. 給出當對於所有的 $t = 1, 2, \dots, T$,

$\|x'_t\gamma\|$ 其值在 0 到 ∞ 間機率為 1, 並且 $f_t(F_t^{-1}(\tau)) = f_\epsilon(F_u^{-1}(\tau))/(x'_t\gamma)$ 。假設 A.3.(b) 則等同於 $p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} f_\epsilon(F^{-1}(\tau)) x_t x'_t / (x'_t \gamma) \xrightarrow{p} \lambda H_0$ uniformly in $\lambda \in [0, 1]$ 。

接下來分別說明如何建造 subgradient based 檢定以及 Wald 檢定的檢定統計量及其極限分配。

建構 subgradient based 檢定先令 $[x]$ 為高斯符號, 表示小於或等於 x 的最大整數, 並且假設一個 $\lambda \in [0, 1]$, 表示子樣本期數由 1 一直到 λT , 則使用子樣本計算 subgradient 得到:

$$S_T(\lambda, \tau, b) = T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x'_t b)$$

其中 b 為 $\beta(\tau)$ 的某些估計值, 並且

$$\psi_\tau(u) = 1(u \leq 0) - \tau.$$

在虛無假設 (無結構性改變) 之下, $\psi_\tau(y_t - x'_t \beta_0(\tau))$ 是個二元 (binary) 隨機變數, 平均數為 0, 變異數為 $\tau(1 - \tau)$, 再令 $X = (x'_1, \dots, x'_T)'$, 且令

$$H_{\lambda, T}(\beta_0(\tau)) = (T^{-1} X' X)^{-\frac{1}{2}} S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)).$$

根據先前的假設推出 $H_{\lambda, T}(\beta_0(\tau))$ 的極限分配, 且為一 nuisance parameter free, 如下式所示:

$$H_{\lambda, T}(\beta_0(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda \tau (1 - \tau)).$$

虛無假設下對全樣本做分量迴歸所得到的分量迴歸參數向量 $\hat{\beta}(\tau)$ 取代未知參數向量 $\beta_0(\tau)$ 可得:

$$H_{\lambda, T}(\hat{\beta}(\tau)) = (X' X)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \hat{\beta}(\tau)).$$

假設真正的變動點是未知的, 必須找尋所有可能的變動時間點, 並且將 $H_{\lambda, T}(\hat{\beta}(\tau))$ re-centering 成 $\lambda H_{1, T}(\hat{\beta}(\tau))$, 在有限樣本會有較佳的表現。考慮以上所述, 則檢定統計量如下:

$$SQ_\tau = \sup_{\lambda \in [0, 1]} \left\| (\tau(1 - \tau))^{-\frac{1}{2}} [H_{\lambda, T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1, T}(\hat{\beta}(\tau))] \right\|_\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 為 supremum norm⁷, 此檢定統計量可理解成在假使有變動點 ($\lambda \in (0, 1)$) 發生的情況下統計量 $H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau))$ 與沒有發生變動點 ($\lambda = 1$) 的情況下統計量 $H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau))$ 乘上變動比例的差距, 也就是觀察使用樣本期數從 1 到 $[\lambda T]$ 與使用全部樣本期數兩者統計量差距大小, 如果兩者的差異越接近, 就表示在不同的兩個子期下估計係數並沒有發生改變; 反之如果兩者差異越大, 則認為在不同的兩個子期下估計係數係數有發生改變。上述 subgradient based 統計量的形式與 CUSUM 檢定統計量形式相當類似, 其中 CUSUM 檢定統計量形式如下:

$$CUSUM = \sup_{\lambda \in [0,1]} \frac{1}{\hat{\sigma}} \left| T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} \hat{\epsilon}_t \right|,$$

其中 $\hat{\epsilon}_t$ 為在虛無假設之下, 使用最小平方估計法估計出的殘差, 而 $\hat{\sigma}^2$ 由 $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t)$ 估計而來。

Wald形式檢定統計量的建構於對立假設下, 令 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 為使用子樣本的子期 1 到 $[\lambda T]$ 求解目標函數所得到的估計值用來估計未知參數 $\beta_0(\tau)$, 而 $\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)$ 為子樣本剩餘子期求解目標函數所得到的估計值用來估計未知參數 $\beta_0(\tau)$, 並令 $f_t(\cdot|x_t)$ 以及 $F_t(\cdot|x_t)$ 為 y_t 的條件密度函數以及分配函數。

Wald檢定精神在於在對立假設之下, 利用兩個不同樣本子期所估計出的參數 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$, $\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)$, 檢定參數是否發生改變亦即檢定 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 是否等於 $\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)$, 故虛無假設為 $H_0: \hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_2(\lambda, \tau) = 0$, 對立假設則為 $H_1: \hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_2(\lambda, \tau) \neq 0$, 使用此觀念來建構整個 Wald 檢定統計量。定義符號 $\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) = \hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$, 則變動點在 $[\lambda T]$ 之下的結構性改變 Wald 檢定統計量為:

$$T\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau),$$

⁷其定義為 $\|f(x)\|_{\infty} = \|f(x)\|_{\infty, S} = \sup\{|f(x)| : x \in S\}$, 其中 S 為 x 定義域所在的集合。

其中 $\hat{V}(\lambda, \tau)$ 為 $\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 的變異數一致性估計式,

$$\begin{aligned} p \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{V}(\lambda, \tau) &= (\tau(1-\tau)) \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} \right\} \Omega_0, \\ \Omega_0 &= H_0^{-1} J_0 H_0^{-1}, \\ H_0 &= p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T f_t(y_t|x_t) x_t x_t', \\ J_0 &= p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^n x_t x_t', \end{aligned} \quad (2)$$

其中上式證明請見附錄。

一般變動點是未知的, 故透過樣本修整找出變動點可能發生的期間, 定義一個集合如下:

$$\Lambda_\epsilon = [\epsilon, 1 - \epsilon].$$

並且 Λ_ϵ 為 $[0, 1]$ 之間子集, Λ_ϵ 亦即經過樣本修整後所欲找出變動點的期間, 並且變動點 $\lambda \in \Lambda_\epsilon$, 所以 Wald 檢定統計量可改寫為:

$$SW_\tau = \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} T \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau).$$

接下來給出一些引理 (lemma) 於附錄當中, 主要是藉由先前假設推導而來, 並且再由先前假設及應用引理, 可推導出兩種檢定統計量 SQ_τ 以及 SW_τ 的極限分配分別標示如下 (證明請見附錄命題 1):

$$\begin{aligned} SQ_\tau &\Rightarrow \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B_p(\lambda)\|_\infty, \\ SW_\tau &\Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B_p(\lambda)\|^2}{\lambda(1-\lambda)}, \end{aligned}$$

其中 B_p 為一個維度為 p 定義在 $[0, 1]$ 上彼此相互獨立的布朗橋過程。

SQ_τ 檢定的臨界值 (critical value) 的獲得則經由模擬 (simulation) 的方式, $\|B_p(\lambda)\|_\infty$ 則由 $\|T^{-\frac{1}{2}}(\sum_{t=1}^{\lfloor \lambda T \rfloor} \epsilon_t - \lambda \sum_{t=1}^T \epsilon_t)\|_\infty$ 近似, 其中 $\epsilon_t \stackrel{t.t.d.}{\sim} N(0, I_p)$ 。而 supremum 的近似值則是在 λ 的定義域下去尋找, 其臨界值表則參照 Qu(2008) 頁 174。 SW_τ 檢定的臨界值表則可參照 Bai and Perron(2003) 來做檢定。

3.1.2 多個分量下單一結構性改變檢定

考慮多個分量下單一結構性改變檢定，前小節所述之兩種檢定統計量 SQ_τ 及 SW_τ 延伸為 DQ , DW 如下：

$$DQ = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau))\|_\infty,$$

$$DW = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} T \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau),$$

此檢定又稱作 double supremum 檢定，並且 T_ω 為一個閉集合，表示所感興趣分量的範圍，其中： $T_\omega = [\omega, 1 - \omega]$, $0 < \omega < \frac{1}{2}$ 。接下來為推導其檢定統計量之極限分配所需，給出假設及引理於附錄當中，另外令 $B(u, v) = (B_1(u, v), \dots, B_p(u, v))'$ 為維度(dimension)為 p 的獨立高斯 (Gaussian) 過程，其中每個組成都定義在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上，並且為平均數為0，共變異方程式為：

$$E(B_t(r, u)B_t(s, v)) = (r \wedge s - rs)(u \wedge v - uv),$$

而 $B_t(r, u)$ 又稱作 Brownian Pillow。則 DQ 及 DW 兩種檢定統計量的極限分配為：

$$DQ = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B(\lambda, \tau)\|_\infty,$$

$$DW = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B(\lambda, \tau)\|^2}{\lambda(1-\lambda)\tau(1-\tau)}.$$

詳細證明請見附錄命題2。

DQ 與 DW 臨界值的獲得則是經由模擬的方式，令 $\epsilon_t = (e_{1t}, e_{2t}, \dots, e_{pt})'$ ，其各自元素相互獨立並且在 $[0, 1]$ 上均勻分布， $B_j(\lambda, \tau)$ 則是由 $T^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor \lambda T \rfloor} 1(e_{ij} \leq \tau) - \lambda \sum_{t=1}^T 1(e_{ij} \leq \tau) \right)$ ，而 supremum 的近似值則是在 λ 與 τ 各自的定義域下去尋找， DQ 與 DW 的臨界值表可參閱 Qu(2008) 頁175來做檢定。

3.2 多個結構性改變檢定

檢定統計量 SQ_τ 及 DQ 根基於 subgradient 的波動上，並且於多個結構性變動點的情況下仍然具有一定的檢定力。而檢定統計量 SW_τ 及 DW 則是根基於將樣本分成兩個子

期所建構出來，在發生多個結構性變動點的情況下，其檢定力並不高。下面對於 SW_τ 及 DW 做進一步的延伸，允許多個結構性變動點的情形。

假設對立假設為：有 m 個結構性變動點。則檢定結構性變動的 $SW_\tau(m)$ 及 $DW(m)$ 檢定統計量，在單一分量下以及多個分量下，檢定統計量分別如下所示：

$$SW_\tau(m) = \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} T \hat{\beta}(\lambda, \tau)' R' (R \hat{S}(\lambda, \tau) R')^{-1} R \hat{\beta}(\lambda, \tau),$$

$$DW(m) = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} T \hat{\beta}(\lambda, \tau)' R' (R \hat{S}(\lambda, \tau) R')^{-1} R \hat{\beta}(\lambda, \tau),$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 表樣本分割 (partition), $\Lambda_\epsilon(m)$ 代表所有可能的樣本分割的集合，對於某些 $\epsilon > 0$,

$$\Lambda_\epsilon(m) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m); |\lambda_1| \geq \epsilon, \lambda_m \leq 1 - \epsilon, |\lambda_j - \lambda_{j-1}| \geq \epsilon\},$$

$\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 為使用各個子樣本所用來估計 $\beta_0(\tau)$ 的分量迴歸估計值，也就是

$$\hat{\beta}(\lambda, \tau)' = (\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)', \dots, \hat{\beta}_m(\lambda, \tau)', \hat{\beta}_{m+1}(\lambda, \tau)')_{1 \times (m+1)p},$$

矩陣 R 的決定則是滿足下列的式子

$$\hat{\beta}(\lambda, \tau)' R' = (\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)' - \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)', \dots, \hat{\beta}_{m+1}(\lambda, \tau)' - \hat{\beta}_m(\lambda, \tau)')_{1 \times mp},$$

其中 $R_{mp \times (m+1)p} = R_{m \times (m+1)}^* \otimes I_p$ ，而 R^* 矩陣，其形式如下所示：

$$R^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{m \times (m+1)},$$

而 $\hat{S}(\lambda, \tau)$ 為 $\sqrt{T} \hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 在虛無假設下，變異數的一致性估計式，也就是：

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}(\lambda, \tau) = \tau(1 - \tau) \text{Diag} \left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_0)}, \dots, \frac{1}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)} \right) \otimes \Omega_0, \quad (3)$$

其中 $\Omega_0 = H_0^{-1} J_0 H_0^{-1}$ ，並且 $\lambda_0 = 0$ 及 $\lambda_{m+1} = 1$ 。

這邊矩陣 R 的使用主要是將原本的參數 $(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau), \dots, \hat{\beta}_{m+1}(\lambda, \tau))$ 轉換成兩兩相減的模式 $(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)' - \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)', \dots, \hat{\beta}_{m+1}(\lambda, \tau)' - \hat{\beta}_m(\lambda, \tau)')$, 也就是在各個不同子期下所估計出來的參數, 對於所有彼此相鄰的估計參數的差異做比較, 假若差異很大的話, 則認為存在結構性變動, 反之則認為不存在結構性變動, 因此最多可檢定 m 個變動點, 這也是在多個結構變動點下結構性變動 Wald 檢定的精神。

假設結構性變動點介於1跟某個上界 (upper bound) M 之間, 則根據 Bai and Perron (1998) 所提及的處理方法, 認為當變動點增加時, 檢定統計量的臨界值會下降, 隱含邊際 p-value 亦會下降, 當變動點數量增加, 會導致低檢定力的問題, 為了解決這個問題, 加入權數 (weights) 使得在不同變動點間的邊際 p-value 是相同的。令 a_m 及 b_m 為權數, 再令 $c(p, \alpha, m)$ 為 $SW_\tau(m)$ 在顯著水準 α 及允許 p 個參數變動的臨界值, 定義權數 a_m , 對於 $m = 1$ 時, $a_1 = 1$, 對於 $m > 1$ 時, $a_m = c(p, \alpha, 1)/c(p, \alpha, m)$; 同樣的 b_m 則是採取 $DW(m)$ 在顯著水準 α 及允許 p 個參數變動的臨界值下所定義的權數。因此檢定統計量則變為下列的形式:

$$\begin{aligned} SSW_\tau(M) &= \max_{1 \leq m \leq M} a_m SW_\tau(m), \\ SDW(M) &= \max_{1 \leq m \leq M} b_m DW(m), \end{aligned}$$

其中 $SSW_\tau(M)$ 為給定單一分量下結構性變動檢定, 而 $SDW(M)$ 為多個分量下, 結構性變動的檢定。

下面給出虛無假設下 $SW_\tau(m)$ 、 $SSW_\tau(M)$ 及 $DW(m)$ 、 $SDW(M)$ 檢定統計量的極限分配如下所示 (詳細證明請見附錄命題3):

$$\begin{aligned} SW_\tau(m) &\Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j)\|^2}{\lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \\ SSW_\tau(M) &\Rightarrow \max_{1 \leq m \leq M} a_m \left\{ \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j)\|^2}{\lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \right\}, \\ DW(m) &\Rightarrow \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}, \tau) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j, \tau)\|^2}{\tau(1-\tau) \lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \\ SDW(M) &\Rightarrow \max_{1 \leq m \leq M} b_m \left\{ \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}, \tau) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j, \tau)\|^2}{\tau(1-\tau) \lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \right\}. \end{aligned}$$

$SW_\tau(m)$, $SSW_\tau(M)$, $DW(m)$ 及 $SDW(M)$ 的臨界值表可參照 Qu(2008) 頁177。對於其他的檢定統計量之臨界值則可透過使用反映曲面 (response surface) 迴歸⁸ 簡便的取得, 此迴歸藉由不同的參數 p, ω, ϵ, m 的選擇提供臨界值快速的計算。經過實驗, 在許多不同的模型設定之下, 選擇下面非線性迴歸式:

$$CV_t(\alpha) = (x'_{1t}\beta_1)exp(x'_{2t}\beta_2) + \epsilon_t,$$

其中 $CV_t(\alpha)$ 為模擬的臨界值, α 為 nominal size。這邊也要求 R^2 的值不能小於0.999 的條件, 對於各個檢定統計量所包含的解釋變數如下所示:

1. $SW_\tau(m): x_1 = \{1, p, m, \frac{1}{p}, mp, m\epsilon\}, x_2 = \{\frac{1}{m}, \frac{1}{m\epsilon}, \epsilon, p\}$;
2. $SSW_\tau(M): x_1 = \{1, p\}, x_2 = \{\epsilon, p\}, M = 3$;
3. $DW(m): x_1 = \{1, p, m, \frac{1}{p}, mp, m\epsilon\}, x_2 = \{\frac{1}{m}, \frac{1}{m\epsilon}, \epsilon, p, \frac{1}{m\omega}, \omega\}$;
4. $SDW(M): x_1 = \{1, p\}, x_2 = \{\epsilon, p, \omega\}, M = 3$.

估計出來的迴歸係數可參閱 Qu(2008) 頁177, 其中它所包含的各個參數範圍如下: $1 \leq p \leq 10, m \leq 3, 0.1 \leq \epsilon \leq 0.2, 0.1 \leq \omega \leq 0.2$ 。

討論 local power analysis 時考慮對立假設為:

$$\beta_t(\tau) = \beta_0(\tau) + \frac{\Delta(\tau)}{\sqrt{T}}g\left(\frac{t}{T}\right), \quad (4)$$

其中 $\Delta(\tau)$ 為受到分量變動的常數, $g\left(\frac{t}{T}\right)$ 是 vector-valued, Riemann-Stieltjes integrable function, 其元素可為 step function 或是 slowly varying continuous function。定義 $c(s)$ 為:

$$c(s) = \int_0^s g(v)dv - s \int_0^1 g(v)dv.$$

則所提及的檢定統計量整理如下: 假設參數型式如 (4) 式, 則: 當假設 A.1.-A.3. 成立時, $SQ_\tau, SW_\tau, SW_\tau(m), SSW_\tau(M)$ 的極限分配分別如命題1及3所示, 其中 $B_p(\lambda)$ 則改為 $B_p(\lambda) + J_0^{-\frac{1}{2}}H_0\Delta(\tau)c(\lambda)$, 當假設 A.4.-A.6. 成立時, $DQ, DW, DW(m), SDW(M)$ 的極限分配分別如命題2及3所示, 其中 $B_p(\lambda, \tau)$ 則改為 $B_p(\lambda, \tau) + J_0^{-\frac{1}{2}}H_0\Delta(\tau)c(\lambda)$ 。

⁸對於反映曲面模型做最適配適(fitting), 主要源自統計上的實驗設計 (experimental design)、迴歸模型選擇以及最適理論 (optimization methods), 涵蓋以上三種主題統稱作 Response Surface Methodology(RSM), 也就是在反映變數受到數個因子 (factor) 的影響 (上述結果必須為實驗設計所證實), 其最終目的主要是在如何設定因子的水準 (區間) 使得反映變數達到最佳值 (最大值, 最小值以及目標值)。

3.2.1 給定分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論

模型(1) 的估計可藉由求解下列式子而成:

$$\min_{\beta \in R^p} \sum_{t=1}^T \rho_{\tau}(y_t - x_t' \beta),$$

其中 ρ_{τ} 為 check function 滿足 $\rho_{\tau}(u) = u(\tau - 1_{(u < 0)})$ 。假設 $T^b = (T_1, \dots, T_m)$ 為所有可能的結構變動時間點的集合, 定義下面的目標函數:

$$S_T(\tau, \beta(\tau), T^b) = \sum_{j=0}^m \sum_{t=T_j+1}^{T_{j+1}} \rho_{\tau}(y_t - x_t' \beta_{j+1}(\tau)), \quad (5)$$

其中 $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau)', \dots, \beta_{m+1}(\tau)')$, $T_0 = 0, T_{m+1} = T$ 。參數 $\beta(\tau)$ 以及結構性變動時間點的估計則是藉由求解下面的方程式:

$$(\hat{\beta}(\tau), \hat{T}^b) = \arg \min_{\beta(\tau), T^b \in \Lambda_{\epsilon}} S_T(\tau, \beta(\tau), T^b),$$

其中 $\hat{\beta}(\tau) = (\hat{\beta}_1(\tau)', \dots, \hat{\beta}_{m+1}(\tau)')$, $\hat{T}^b = (\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m)$, $\Lambda_{\epsilon} = \{(T_1, \dots, T_m) : T_j - T_{j-1} \geq \epsilon T (j = 2, \dots, m), T_1 \geq \epsilon T, T_m \leq (1 - \epsilon)T\}$, ϵ 為很小的正數。亦即於所有可能的變動時間點的集合裡面, 對所有的樣本分割做搜尋, 尋找能夠使得目標函數 $S_T(\tau, \beta(\tau), T^b)$ 達到全面性的極小化 (global minimum), 而此組變動時間點以及其所對應的分量迴歸參數 $\beta(\tau)$ 即為最後所想要的估計值。

接下來說明估計值的收斂速度以及極限分配如下: 在假設 A.7. 到 A.12.(見附錄) 成立之下, 對於 $j = 1, \dots, m$, $v_T^2(\hat{T}_j - T_j^0) = O_p(1)$; 對於 $j = 1, \dots, m + 1$, $\sqrt{T}(\hat{\beta}_j(\tau) - \beta_j^0(\tau)) = O_p(1)$ 。

令假設 A.7.-A.12. 成立, 則對於 $j = 1, \dots, m$,

$$\left(\frac{\pi_j}{\sigma_j}\right)^2 v_T^2(\hat{T}_j - T_j^0) \xrightarrow{d} \arg \max_s \begin{cases} W(s) - \frac{|s|}{2} & s \leq 0, \\ (\sigma_{j+1}/\sigma_j)W(s) - (\pi_{j+1}/\pi_j)|s|/2 & s > 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\pi_j &= \Delta_j(\tau)' H_j^0(\tau) \Delta_j(\tau), \\ \pi_{j+1} &= \Delta_j(\tau)' H_{j+1}^0(\tau) \Delta_j(\tau), \\ \sigma_j^2 &= \tau(1-\tau) \Delta_j(\tau)' J_j^0 \Delta_j(\tau), \\ \sigma_{j+1}^2 &= \tau(1-\tau) \Delta_j(\tau)' J_{j+1}^0 \Delta_j(\tau),\end{aligned}$$

$W(s)$ 為一個標準雙邊 (two-sided) 布朗運動。此外,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_j(\tau) - \beta_j^0(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, V_j)$$

其中對於 $j = 1, \dots, m+1$, $V_j = \tau(1-\tau)\Omega_j^0(\tau)/(\lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0)^2$, $\Omega_j^0(\tau) = (H_j^0(\tau))^{-1} J_j^0 (H_j^0(\tau))^{-1}$ 。

變動時間點 \hat{T}_j 的極限分配為雙邊布朗運動的形式, 此種變動時間點極限分配的形式, 於 Bai(1997) 便已有相關的研究, 而 Oka and Qu(2011) 所寫對於變動時間點極限分配的長相類似 Bai(1997) 的形式, 有極限分配便可對於變動時間點做區間估計。

3.2.2 多個分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論

假設所感興趣分量的範圍在一個區間 $T_\omega = [\omega_1, \omega_2]$, 其中 $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$, 對於此區間做分割得到一群分量 τ_h , $h = 1, \dots, q$ 。令所有可能結構性變動時間點的分割 $T^b(T_1, \dots, T_m)$ 及參數 $\beta(T_\omega) = (\beta(\tau_1)', \dots, \beta(\tau_q)')$, 定義下面的目標函數:

$$S_T(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b) = \sum_{h=1}^q \sum_{j=0}^m \sum_{t=T_{j+1}}^{T_{j+1}} \rho_{\tau_h}(y_t - x_t' \beta_{j+1}(\tau_h)), \quad (6)$$

藉由上述目標函數求解來得到所要的估計值:

$$(\hat{\beta}(T_\omega), \hat{T}^b) = \arg \min_{\beta(T_\omega), T^b \in \Lambda_\epsilon} S_T(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b),$$

極小化上述目標函數的過程中包含三個步驟, 首先, 在給定的樣本分割以及給定的特定分量下極小化目標函數 $S_T(\tau_h, \beta(\tau_h), T^b)$, 再來於相同的樣本分割作為條件之下, 對於所有感興趣的分量 $\{\tau_h : h = 1, \dots, q\}$ 重複極小化的步驟得到 $S_T(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b)$, 最後搜尋所有可能的樣本分割 $T^b \in \Lambda_\epsilon$ 來達到 $S_T(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b)$ 全面性的極小化, 而此組變動時間點以及其所對應的分量迴歸參數 $\beta(T_\omega)$ 即為最後所想要的估計值。

由於推論上的需要，加上考慮多個分量 (τ_1, \dots, τ_q) 下所需要多一個假設 A.13.(見附錄)，因此假設 A.13. 成立之下，對於 $j = 1, \dots, m$ ，結構性變動時間點的極限分配：

$$\left(\frac{\pi_j^*}{\sigma_j^*}\right)^2 v_T^2 (\hat{T}_j - T_j^0) \xrightarrow{d} \arg \max_s \begin{cases} W(s) - \frac{|s|}{2} & s \leq 0, \\ (\sigma_{j+1}^*/\sigma_j^*)W(s) - (\pi_{j+1}^*/\pi_j^*)|s|/2 & s > 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \pi_j^* &= \frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \Delta_j(\tau_h)' H_j^0(\tau_h) \Delta_j(\tau_h), \\ \pi_{j+1}^* &= \frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \Delta_j(\tau_h)' H_{j+1}^0(\tau_h) \Delta_j(\tau_h), \\ \sigma_j^{*2} &= \frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q (\tau_h \wedge \tau_g - \tau_h \tau_g) \Delta_j(\tau_h)' J_j^0 \Delta_j(\tau_g), \\ \sigma_{j+1}^{*2} &= \frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q (\tau_h \wedge \tau_g - \tau_h \tau_g) \Delta_j(\tau_h)' J_{j+1}^0 \Delta_j(\tau_g), \end{aligned}$$

$W(s)$ 為一個標準雙邊布朗橋運動。

結構性變動時間點的極限分配的長相並不難想像，直觀的來看其形式完全與在特定分量下變動時間點的極限分配相一致，差異僅在於多個分量 $\tau_j (1 \leq j \leq q)$ 下變數 π_j^*, π_{j+1}^* 多一項平均加總 $\frac{1}{q} \sum_{h=1}^q$ 而 $\sigma_j^{*2}, \sigma_{j+1}^{*2}$ 多了項目 $\frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q$ 。

另外 $\hat{\beta}(\tau_h) (h = 1, \dots, q)$ 的極限分配同附錄定理 1，形式如下所示：

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_j(\tau_h) - \beta_j^0(\tau_h)) \xrightarrow{d} N(0, V_j)$$

其中對於所有的 $\tau_h (h = 1, \dots, q), j = 1, \dots, m+1, V_j = \tau_h(1-\tau_h)\Omega_j^0(\tau_h)/(\lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0)^2$, $\Omega_j^0(\tau_h) = (H_j^0(\tau_h))^{-1} J_j^0 (H_j^0(\tau_h))^{-1}$ 。

3.3 重複橫斷面之給定分量及多個分量下多個結構性改變檢定之係數與變動時間點的估計與推論

假設資料形式為 (x'_{it}, y_{it}) ，其中 i 為個人， t 為時間並且假設 $i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$ 。考慮單一條件分量函數並假設模型為線性：

$$Q_{y_{it}}(\tau|x_{it}) = x'_{it}\beta_j^0(\tau) \quad t = T_{j-1}^0, \dots, T_j^0, \quad (7)$$

其中對於每個人，結構性變動點 $T_j^0 (j = 1, \dots, m)$ 都是相同的，令所有可能結構性變動時間點的分割 $T^b(T_1, \dots, T_m)$ 並定義目標函數：

$$S_{NT}(\tau, \beta(\tau), T^b) = \sum_{j=0}^m \sum_{t=T_j+1}^{T_{j+1}} \sum_{i=1}^N \rho_\tau(y_{it} - x'_{it}\beta_{j+1}(\tau)),$$

藉由上述目標函數求解來得到所要的估計值：

$$(\hat{\beta}(\tau), \hat{T}^b) = \arg \min_{\beta(\tau), T^b \in \Lambda_\epsilon} S_{NT}(\tau, \beta(\tau), T^b).$$

加入個人 i 下的假設 B.1.-B.7.(見附錄)，接下來說明估計值的收斂速度以及極限分配：在假設 B.1.-B.7. 成立之下，則對於 $j = 1, \dots, m$, $v_T^2(\hat{T}_j - T_j^0) = O_p(1)$ ；對於 $j = 1, \dots, m+1$, $\sqrt{NT}(\hat{\beta}_j(\tau) - \beta_j^0(\tau)) = O_p(1)$ 。

在假設 B.1.-B.7. 成立之下，對於 $j = 1, \dots, m$,

$$\left(\frac{\bar{\pi}_j}{\bar{\sigma}_j}\right)^2 v_T^2(\hat{T}_j - T_j^0) \xrightarrow{d} \arg \max_s \begin{cases} W(s) - \frac{|s|}{2} & s \leq 0, \\ (\bar{\sigma}_{j+1}/\bar{\sigma}_j)W(s) - (\bar{\pi}_{j+1}/\bar{\pi}_j)|s|/2 & s > 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_j &= \Delta_j(\tau)' \bar{H}_j^0(\tau) \Delta_j(\tau), \\ \bar{\pi}_{j+1} &= \Delta_j(\tau)' \bar{H}_{j+1}^0(\tau) \Delta_j(\tau), \\ \bar{\sigma}_j^2 &= \tau(1-\tau) \Delta_j(\tau)' \bar{J}_j^0 \Delta_j(\tau), \\ \bar{\sigma}_{j+1}^2 &= \tau(1-\tau) \Delta_j(\tau)' \bar{J}_{j+1}^0 \Delta_j(\tau), \end{aligned}$$

$W(s)$ 為一個標準雙邊布朗運動。此外，

$$\sqrt{NT}(\hat{\beta}_j(\tau) - \beta_j^0(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, \bar{V}_j)$$

其中對於 $j = 1, \dots, m+1$, $\bar{V}_j = \tau(1-\tau)\bar{\Omega}_j^0(\tau)/(\lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0)^2$, $\bar{\Omega}_j^0(\tau) = (\bar{H}_j^0(\tau))^{-1} \bar{J}_j^0 (\bar{H}_j^0(\tau))^{-1}$ 。

加入個人 i 後結構性變動檢定，其估計參數的極限分配長相與附錄定理 1 做比對，其形式完全相同，僅在符號 $\bar{\pi}_j, \bar{\pi}_{j+1}, \bar{\sigma}_j^2, \bar{\sigma}_{j+1}^2$ 裡面的項目稍有改變，其改變的地方可從假設 B.1.-B.7. 的內容發現。

考慮多個分量 $\tau_h (h = 1, \dots, q)$ 及給定 $T_\omega, T^b = (T_1, \dots, T_m)$ 之下, 定義目標函數為:

$$S_{NT}(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b) = \sum_{h=1}^q \sum_{j=0}^m \sum_{t=T_j+1}^{T_{j+1}} \sum_{i=1}^N \rho_\tau(y_{it} - x'_{it}\beta_{j+1}(\tau_h)),$$

同樣的藉由上述目標函數求解極小化的過程, 來得到所要的估計值:

$$(\hat{\beta}(T_\omega), \hat{T}^b) = \arg \min_{\beta(T_\omega), T^b \in \Lambda_\epsilon} S_{NT}(T_\omega, \beta(T_\omega), T^b).$$

下面給出加入個人 i 以及在多個分量下一些所需要的假設 B.8.(見附錄), 結構性變動時間點的極限分配描述如下: 在假設 B.8. 成立之下, 對於 $j = 1, \dots, m$,

$$\left(\frac{\bar{\pi}_j^*}{\bar{\sigma}_j^*}\right)^2 v_T^2 (\hat{T}_j - T_j^0) \xrightarrow{d} \arg \max_s \begin{cases} W(s) - \frac{|s|}{2} & s \leq 0, \\ (\bar{\sigma}_{j+1}^*/\bar{\sigma}_j^*)W(s) - (\bar{\pi}_{j+1}^*/\bar{\pi}_j^*)|s|/2 & s > 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_j^* &= \frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \Delta_j(\tau_h)' \bar{H}_j^0(\tau_h) \Delta_j(\tau_h), \\ \bar{\pi}_{j+1}^* &= \frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \Delta_j(\tau_h)' \bar{H}_{j+1}^0(\tau_h) \Delta_j(\tau_h), \\ \bar{\sigma}_j^{*2} &= \frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q (\tau_h \wedge \tau_g - \tau_h \tau_g) \Delta_j(\tau_h)' \bar{J}_j^0 \Delta_j(\tau_g), \\ \bar{\sigma}_{j+1}^{*2} &= \frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q (\tau_h \wedge \tau_g - \tau_h \tau_g) \Delta_j(\tau_h)' \bar{J}_{j+1}^0 \Delta_j(\tau_g), \end{aligned}$$

$W(s)$ 為一個標準雙邊布朗運動。

加入個人 i 的結構性變動時間點的極限分配的長相不難猜想其形式完全與在特定分量下變動時間點的極限分配完全一樣, 差異僅在於多個分量 $\tau_j (1 \leq j \leq q)$ 下變數 $\bar{\pi}_j^*, \bar{\pi}_{j+1}^*$ 多一項平均加總 ($\frac{1}{q} \sum_{h=1}^q$) 而 $\bar{\sigma}_j^{*2}, \bar{\sigma}_{j+1}^{*2}$ 多了項目 $\frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^q \sum_{g=1}^q$ 。

此外 $\hat{\beta}(\tau_h) (h = 1, \dots, q)$ 的極限分配同附錄定理 2 的形式如下所示:

$$\sqrt{NT}(\hat{\beta}_j(\tau_h) - \beta_j^0(\tau_h)) \xrightarrow{d} N(0, \bar{V}_j)$$

其中對於所有的 $\tau_h (h = 1, \dots, q), j = 1, \dots, m+1, \bar{V}_j = \tau_h(1-\tau_h)\bar{\Omega}_j^0(\tau_h)/(\lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0)^2, \bar{\Omega}_j^0(\tau_h) = (\bar{H}_j^0(\tau_h))^{-1} \bar{J}_j^0 (\bar{H}_j^0(\tau_h))^{-1}$ 。

3.4 給定分量及多個分量下結構性改變檢定之變動時間點數量決定

在決定結構性改變之變動時間點的數量，根據Qu(2008)所提出的兩個檢定統計量 SQ_τ 及 DQ 用來偵測是否有結構性改變。在單一時間序列模型之下， SQ_τ 檢定統計量如下所示：

$$SQ_\tau = \sup_{\lambda \in [0,1]} \left\| (\tau(1-\tau))^{-\frac{1}{2}} [H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau))] \right\|_\infty,$$

其中

$$H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) = \left(\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}(\tau)),$$

$$\psi_\tau(u) = \tau - 1_{(u < 0)},$$

而在重複橫斷面模型之下， SQ_τ 檢定統計量如下所示：

$$H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T x_{it} x_{it}' \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_{it} \psi_\tau(y_{it} - x_{it}' \hat{\beta}(\tau))$$

其中 $\hat{\beta}(\tau)$ 為在假設無結構性改變之下使用全部樣本的估計值， $\|\cdot\|_\infty$ 表 sup norm。在多個分量下， DQ 檢定統計量如下所示：

$$DQ = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \left\| H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau)) \right\|_\infty.$$

以上都是對於單一結構性變動點的檢定，在多個結構性變動點的檢定上，需要使用下列的檢定方式，分別為 $SQ_\tau(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ ，透過 sequential 檢定方式，即可檢定結構性變動點的個數，而此種方式的建構則是根據 Bai and Perron(1998, 2003) 所提出的，接下來便來說明此種檢定方法。

假設模型裡面有 l 個變動時間點並且由 $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_l$ 來估計，而這些變動時間點將整個樣本分割成 $(l+1)$ 個切塊 (segment)，將第 j 個切塊的時間區間表示成 $[\hat{T}_{j-1} + 1, \hat{T}_j]$ ，定義好時間切塊後，接下來解釋 $(l+1|l)$ 的意思，其代表在已有 l 個結構性變動點之下，要來檢定是否有 $l+1$ 個結構性變動點。因此 $SQ_\tau(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ 即分別代表在特定分量下以及多個分量下，檢定在給定有 l 個結構性變動點的條件下，是否存在 $l+1$ 個結構性變動點。

在檢定統計量的建構, 先令 $SQ_{\tau,j}$, DQ_j 分別代表在第 j 個切塊下, SQ_{τ} 及 DQ 的應用, 其數學式定義如下所示:

$$SQ_{\tau,j} = \sup_{\lambda \in [0,1]} \left\| (\tau(1-\tau))^{-\frac{1}{2}} [H_{\lambda, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau)) - \lambda H_{1, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau))] \right\|_{\infty},$$

$$DQ_j = \sup_{\tau \in T_{\omega}} \sup_{\lambda \in [0,1]} \left\| H_{\lambda, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau)) - \lambda H_{1, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau)) \right\|_{\infty},$$

其中在單一時間序列模型下,

$$H_{\lambda, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau)) = \left(\sum_{t=\hat{T}_{j-1}+1}^{\hat{T}_j} x_t x_t' \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=\hat{T}_{j-1}+1}^{\lfloor \lambda(\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1}) \rfloor} x_t \psi_{\tau}(y_t - x_t' \hat{\beta}_j(\tau))$$

而在重複橫斷面模型下,

$$H_{\lambda, \hat{T}_{j-1}, \hat{T}_j}(\hat{\beta}_j(\tau)) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=\hat{T}_{j-1}+1}^{\hat{T}_j} x_{it} x_{it}' \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=\hat{T}_{j-1}+1}^{\lfloor \lambda(\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1}) \rfloor} x_{it} \psi_{\tau}(y_{it} - x_{it}' \hat{\beta}_j(\tau)),$$

$\hat{\beta}_j(\tau)$ 則是使用第 j 個切塊下的估計值, 則 $SQ_{\tau}(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ 等同於在所有 $l+1$ 個切塊內計算出來的 $SQ_{\tau,j}$, DQ_j 的極大值, 也就是:

$$SQ_{\tau}(l+1|l) = \max_{1 \leq j \leq l+1} SQ_{\tau,j},$$

$$DQ(l+1|l) = \max_{1 \leq j \leq l+1} DQ_j.$$

當值很大的時候, 表示檢定結果傾向於模型有 $l+1$ 的結構性變動點, 反之則認為檢定結果傾向於模型具有 l 個結構性變動點。

有上述的檢定統計量, 便可說明如何來決定結構性變動點的個數, 其檢定流程如下: 首先說明 DQ 檢定, 一開始先對全部樣本作 DQ 檢定, 假如檢定結果是不拒絕, 則結論為無結構性變動, 則檢定結束; 假若檢定結果是拒絕, 則表示至少有一個結構性變動。再來使用 $DQ(l+1|l)$ 檢定, 先令 $l=1$, 也就是檢定 $DQ(2|1)$, 意思代表在已知有一個結構性變動點的條件下, 檢定是否在第二個結構性變動點, 假如檢定結果是不拒絕, 則結論為僅有一個結構性變動, 則檢定結束; 假若檢定結果是拒絕, 則表示存在至少兩個結構性變動, 以此類推, 重複以上動作再令 $l=2, l=3, \dots$, 直到沒有辦法拒絕虛無假設為止, 而第一個沒有辦法拒絕的情況下的 l 令為 \hat{l} , 也代表著所估計出來的結構性變動點的個數, 知道結

構性變動點的個數，便可將模型設定為允許 \hat{l} 個結構性變動點，來估計結構性變動時間點及迴歸係數，有個別的極限分配，也可以估計信賴區間。另外 SQ_τ 及 $SQ_\tau(l+1|l)$ 的檢定流程同 DQ 及 $DQ(l+1|l)$ 檢定不再贅述。

爲了寫出 $SQ_\tau(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ 的極限分配，先給出一些符號，令 $B_p(s)$ 是一個維度爲 p 的向量且獨立的布朗橋過程並且定義在 $[0, 1]$ 上，也令 $B_p(u, v) = (B_{(1)}(u, v), \dots, B_{(p)}(u, v))'$ 是一個維度爲 p 的向量且獨立的布朗橋過程並且每個元素都定義在在 $[0, 1]^2$ 上其期望值爲0共變異方程式爲 $E(B_{(i)}(r, u)B_{(i)}(s, v)) = (r \wedge s - rs)(u \wedge v - uv)$ ，而 $B_{(i)}(r, u)$ 也稱作 Brownian Pillow。

下面給出 $SQ_\tau(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ 的極限分配如下：假設 $m = l$ 並且假設模型爲 (1) 或 (7) 式以及假設 A.7. 到 A.12. 或者假設 B.1. 到 B.7. 成立，則

$$\begin{aligned} P(SQ_\tau(l+1|l) \leq x) &\rightarrow G_p(x)^{l+1}, \\ P(DQ(l+1|l) \leq x) &\rightarrow \bar{G}_p(x)^{l+1}, \end{aligned}$$

其中 $G_p(x)$ 及 $\bar{G}_p(x)$ 分別爲 $\sup_{s \in [0,1]} \|B_p(s)\|_\infty$ 及 $\sup_{\tau \in T_{\omega, s} \in [0,1]} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B_p(\lambda, \tau)\|_\infty$ 的分配函數。發現上述的極限分配則是取決於模型參數個數 p 以及結構性變動點個數 l 以及修整比例 (ω) 的大小。有檢定統計量的極限分配，便可透過模擬的方式取得漸進臨界值，有臨界值便能夠作檢定，然而在 $SQ_\tau(l+1|l)$ 及 $DQ(l+1|l)$ 臨界值的計算上，透過建構一個反映曲面迴歸取得，藉由不同參數 p, ω, l 數值的選擇，提供臨界值快速的計算。經過實驗，在許多不同模型設定之下，選擇下面所呈現的非線性迴歸式：

$$CV_i(\alpha) = (z'_{1i}\beta_1)exp(z'_{2i}\beta_2) + e_i,$$

其中 $CV_i(\alpha)$ 爲模擬的臨界值， α 爲 nominal size。這邊也要求 R^2 的值不能小於 0.999 的條件，對於各個檢定統計量所包含的解釋變數如下所示：

1. $SQ_\tau(l+1|l)$: $z_{1i} = \{1, p, l+1, \frac{1}{p}, (l+1)p\}$, $z_{2i} = \{\frac{1}{l+1}\}$;
2. $DQ(l+1|l)$: $z_{1i} = \{1, p, l+1, \frac{1}{p}, (l+1)p, (l+1)\omega\}$, $z_{2i} = \{\frac{1}{(l+1)}, \frac{1}{(l+1)\omega}, \omega\}$.

迴歸係數則可參閱 Oka and Qu(2011) 表1，其中解釋變數內各個參數數值的範圍如下：
 $1 \leq p \leq 20$, $0 \leq l \leq 4$, $0.05 \leq \omega \leq 0.3$ 其中各個分量的間距爲 0.01。

4 實證

4.1 資料與模型

本文研究的國家共有18國，分別為澳洲、加拿大、芬蘭、法國、德國、印度、愛爾蘭、日本、荷蘭、紐西蘭、挪威、波蘭、新加坡、西班牙、瑞典、瑞士、英國、美國。資料期間各個國家稍有不同，表2依照不同時期分別列出各國資料期間，資料來源來自 Roine and Waldenstrom(2011) 作者所提供各個國家之高所得份額。⁹

表2列出所有個別國家20世紀與二次世界大戰戰後時期的敘述統計，就20世紀而言各個國家高所得份額的平均數與中位數落於6-12之間，其中北歐地區國家所得現出來的平均數與中位數明顯小於其他地區國家，顯示北歐地區社會較為均等。標準誤方面荷蘭的5.565最高，其次是日本的4.667，代表其波動相對較大，其他國家標準誤落於2-4之間。最大最小值差異各個國家約10-14個百分比左右，僅荷蘭的差異高達22.68個百分比，看第一第三分位數的差異相對於其他國家來的大。就戰後時期而言情形與20世紀其間相差不大，但前後比較發現各個國家高所得份額的平均數與中位數明顯比20世紀來的小，也隱含戰前時期較高的高所得份額，平均數與中位數較高的國家有美國、德國、新加坡高達雙位數水準，同樣的北歐地區國家展現較為均等的社會。標準誤方面任何國家都出現下降的情形，意味著戰後時期波動相對於20世紀較小。從最大最小值得差異來看同樣比起20世紀小的多，都意味著戰後時期相對於戰前時期較為穩定。

表3列出不同區域20世紀與戰後時期的敘述統計，就20世紀而言，北歐國家高所得份額之平均數是全部區域最小的，顯示其他區域所得不均程度比北歐國家還要惡化。就標準誤方面北歐國家是所有區域最小的3.254，顯示其波動相對較小，相反的歐洲大陸則高達4.817為所有區域之冠，其波動最大。最大最小值差異來看，雖然歐洲大陸地區最大最小值的差異很大，但以第一第三分位數的差異來看與其他國家無太大差異，顯示具有極端值的情形。就戰後時期而言情形與20世紀相差不大，但前後比較發現不同區域高所得份額的平均數與中位數明顯比20世紀來的小，標準誤也有相同的情形，波動方面盎格魯薩克遜最大，另外，值得注意的是歐洲大陸的標準誤從20世紀的最高的4.817轉變為戰後時期最小的1.843，代表歐洲大陸歷經很大的轉變。

⁹資料取自Daniel Waldenstrom 個人網頁 <http://www.anst.uu.se/danwa175/Data.htm>。

表 2: 20 世紀與戰後時期個別國家之敘述統計

20 世紀	平均數	第一分位數	中位數	第三分位數	標準誤	最小值	最大值	資料期間
澳洲	8.140	6.413	7.822	10.358	2.290	4.615	14.130	1921-2002
加拿大	11.236	9.003	9.964	13.430	3.103	7.602	18.405	1921-2000
紐西蘭	9.426	7.080	8.910	10.680	3.113	4.880	15.620	1921-2005
美國	12.088	8.390	11.422	15.393	3.582	7.742	19.599	1921-2005
印度	10.886	8.240	11.180	13.070	3.325	4.390	17.820	1922-1999
日本	10.389	7.290	7.898	14.368	4.667	6.427	19.922	1922-2005
法國	10.851	7.825	9.010	14.460	3.970	6.994	20.650	1915-2005
荷蘭	11.811	5.775	11.210	15.716	5.565	5.200	27.880	1915-1999
芬蘭	8.482	5.660	8.512	10.693	3.455	3.310	15.266	1920-2004
挪威	8.469	5.920	7.760	11.996	3.065	4.240	16.780	1920-2006
瑞典	7.802	5.518	6.640	10.438	3.225	3.968	13.742	1920-2006
戰後時期	平均數	第一分位數	中位數	第三分位數	標準誤	最小值	最大值	資料期間
澳洲	6.825	5.672	6.694	7.542	1.665	4.615	14.130	1950-2002
加拿大	9.403	8.741	9.335	9.889	1.205	7.602	13.562	1950-2000
紐西蘭	7.615	6.559	7.452	8.771	1.625	4.881	13.768	1950-2005
美國	10.594	8.164	9.081	12.982	3.061	7.742	17.980	1950-2006
印度	9.229	7.240	8.695	11.580	2.609	4.390	14.410	1950-1999
日本	7.672	7.179	7.617	8.078	0.599	6.769	9.202	1950-2005
法國	8.339	7.702	8.218	9.074	0.817	6.994	9.876	1950-2005
荷蘭	7.865	5.810	6.315	10.390	2.474	5.240	12.610	1950-1999
芬蘭	6.736	4.130	7.010	9.197	2.420	3.310	10.164	1950-2004
挪威	6.733	5.390	6.280	7.540	2.194	4.240	16.780	1950-2006
瑞士	9.575	8.490	9.770	10.670	0.991	8.030	11.000	1950-1996
瑞典	5.695	4.954	5.724	6.611	1.023	3.968	7.586	1950-2006
新加坡	11.456	10.452	10.924	12.410	1.389	9.836	15.067	1950-2005
英國	8.990	7.105	8.640	10.480	2.195	5.720	14.250	1950-2005
德國	10.857	10.233	10.900	11.343	0.798	9.200	12.200	1950-1998
西班牙	1.780	1.431	1.851	2.104	0.447	0.972	2.622	1954-2005
愛爾蘭	2.033	1.470	1.871	2.476	0.665	1.240	4.210	1950-2000
葡萄牙	2.276	1.450	2.165	3.250	0.973	0.730	3.690	1950-2003

註 1: 資料來源取自 Roine and Waldenstrom(2011) 請見網頁 <http://www.anst.uu.se/danwa175/Data.htm>。

註 2: 西班牙、愛爾蘭、葡萄牙均為所得前 0.1% 群體之高所得份額 (由於資料取得的限制), 其餘國家均為所得前 1% 群體之高所得份額。

註 3: 資料期間單位為年。

表 3: 20 世紀與戰後時期不同區域之敘述統計

20 世紀	平均數	第一分位數	中位數	第三分位數	標準誤	最小值	最大值
盎格魯薩克遜	10.232	7.899	9.371	11.880	3.419	4.615	19.599
亞洲	10.628	7.420	8.659	13.320	4.072	4.390	19.922
北歐	8.249	5.590	7.480	11.272	3.254	3.310	16.780
歐洲大陸	11.315	7.737	9.511	14.815	4.817	5.200	27.880
戰後時期	平均數	第一分位數	中位數	第三分位數	標準誤	最小值	最大值
盎格魯薩克遜	8.699	7.130	8.397	9.592	2.454	4.615	17.980
亞洲	9.461	7.558	8.950	10.935	2.317	4.390	15.067
北歐	6.384	4.740	6.012	7.480	2.020	3.310	16.780
歐洲大陸	9.120	7.891	9.343	10.580	1.843	5.240	12.610

註 1: 資料來源取自 Roine and Waldenstrom(2011) 文章作者個人網頁 <http://www.anst.uu.se/danwa175/Data.htm>。

註 2: 二十世紀期間, 盎格魯薩克遜國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、美國。亞洲國家包含: 印度、日本。北歐國家包含: 芬蘭、挪威、瑞典。歐洲大陸國家包含: 荷蘭、法國。

註 3: 戰後時期, 盎格魯薩克遜國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、美國、英國。亞洲國家包含: 印度、日本、新加坡。北歐國家包含: 芬蘭、挪威、瑞典。歐洲大陸國家包含: 荷蘭、法國、德國、瑞士。西班牙、愛爾蘭、葡萄牙均不考慮, 主要原因是三者均為所得前 0.1% 群體之高所得份額, 與其他所有國家的所得前 1% 群體之高所得份額定義不相同。

本篇實證模型設定分成一般時間序列分量迴歸下結構性改變模型以及重複橫斷面分量迴歸下結構性改變模型, 前者用於個別國家高所得份額時間趨勢的探討, 而後者用於不同區域高所得份額時間趨勢的探討。以下分別依序介紹 2 個不同模型如下, 時間序列模型設定為:

$$Q_{y_t}(\tau|x_t) = \mu_j(\tau) + t_j\gamma_j(\tau) \quad (t = T_{j-1}^0 + 1, \dots, T_j^0),$$

其中被解釋變數 y_t 於本實證模型代表個別國家之高所得份額, μ 代表常數項, 解釋變數 t_j 代表時間趨勢, t 代表時間, τ 代表分量, 下標 j 代表不同的子區塊, γ 為參數。而重複橫斷面模型設定為:

$$Q_{y_{it}}(\tau|x_{it}) = \mu_j(\tau) + t_{ij}\gamma_j(\tau) \quad (t = T_{j-1}^0 + 1, \dots, T_j^0),$$

其中被解釋變數 y_{it} 於本實證模型代表不同國家之高所得份額, μ 代表常數項, 解釋變數 t_{ij} 代表時間趨勢, t 代表時間, τ 代表分量, 下標 j 代表不同的子區塊, 下標 i 代表不同國家, γ 為參數。估計及檢定則依照 Qu(2008) 及 Oka and Qu(2011) 為基礎。¹⁰ 本文實證

¹⁰模型的估計使用根基於 Oka and Qu(2011) 所提供的 R 軟體編碼 (code) 取自作者 Qu 的個人網頁 <http://people.bu.edu/qu/code.htm>。

表 4: 20 世紀全世界國家高所得份額之結構改變

全世界		變動時間點		高所得份額年變化率				
分量	變動點個數	[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3		
0.1	0							
0.2	1	1980	[1979,1988]	-0.015650***	0.024266***			
0.3	1	1980	[1979,1983]	-0.016878***	0.033669***			
0.4	1	1986	[1985,1988]	-0.017420***	0.025155**			
0.5	1	1986	[1985,1988]	-0.015922***	0.016061*			
0.6	2	1941	[1937,1943]	1986	[1985,1991]	-0.006932	-0.009323***	0.0080449
0.7	2	1941	[1938,1942]	1981	[1980,1989]	-0.006492	-0.008638***	0.018917***
0.8	2	1941	[1939,1942]	1984	[1983,1990]	-0.007081***	-0.009143***	0.029204**
0.9	2	1942	[1941,1943]	1980	[1979,1982]	-0.006460***	-0.008968***	0.036898***
Multi	2	1942	[1940,1943]	1980	[1979,1982]			

註 1: 20 世紀全世界國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、美國、日本、芬蘭、挪威、瑞典、法國, 樣本期間為 1921-2000 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

研究所使用的被解釋變數均經過自然對數的轉換, 主要原因是經過此轉換, 估計係數的意義將會變為年變化率的概念。

接下來將依序介紹不同區域以及個別國家之高所得份額結構改變的情形, 依序由 20 世紀不同區域、戰後時期不同區域、戰後時期個別國家三個小節來討論。

4.2 20 世紀高所得份額之結構改變

表 4 列出 20 世紀全世界國家高所得份額結構改變情形, 考慮多個分量下偵測出來結構變動點有兩個分別位於 1942 年及 1980 年, 細看個別分量下, 僅第 0.1 個分量沒有偵測到結構性改變, 其餘分量都有發現結構變動點, 位於中低分量都只發現一個結構性變動點, 落於 1980 年代, 然而較高分量 (第 0.6-0.9 分量) 都發現兩個結構變動點, 變動時間點分別位於 1941-42 年以及 1980 年代初。另外, 發現第 0.9 分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同, 說明於高所得群體內, 位於高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變, 也就是相對於中低分量而言, 高分量的影響力相對較大。¹¹ 時間趨勢方面, 於高分

¹¹ 此解釋動機源自考慮多個分量下, 結構性變動點如何決定? 考慮多個分量的情形代表對於所感興趣的分量範圍內, 去尋找斷裂程度最大的結構變動點。假使某單一分量與考慮多個分量下所偵測出來的變動時間點相同, 則代表在該分量下的結構變動點其斷裂程度最大並且支配其他分量所偵測出來的結構變動點, 可以

量(第0.6-0.9分量) 下才偵測出來的變動時間點為 1941-42年, 早於此變動時間點呈現趨勢向下的情形, 而於 1941-42年後依舊呈現趨勢向下, 但趨勢向下的幅度更大,¹² 而後約略於1980年代, 發現趨勢由負向顯著關係轉為正向顯著關係, 並且其正向趨勢幅度強過負向趨勢幅度。中低分量趨勢都呈現由負項顯著關係轉為正向顯著關係。

20世紀不同區域高所得份額結構改變的情形可見表5以及表6。表5列出盎格魯薩克遜地區與亞洲地區高所得份額結構改變的情形, 表格上半部盎格魯薩克遜地區考慮多個分量下偵測出來結構變動點個數為一個, 位於1978年。細看個別分量下, 除了第0.1個分量外其餘分量都至少出現一個結構改變, 變動時間點位於1970年代末及1980年代初中間 (亦有出現差距相對較遠的年份諸如第0.3,0.4分量的1986年及第0.6分量的1971年)。僅第0.8分量偵測出兩個結構變動點分別為戰前時期的1941年以及1981年。另外, 發現第0.9分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同, 說明高所得群體內, 位於高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面大多數都呈現由負向顯著關係轉變成正向顯著關係, 並且正向趨勢的強度大於負向趨勢。由於第0.8分量多出1941年的變動時間點, 該變動時間點前後由不顯著的正向趨勢轉變成顯著的負向趨勢而後於1981年後再轉為正向顯著趨勢。

表5下半部亞洲地區考慮考慮多個分量下偵測出來結構變動點個數為兩個, 分別位於1941年及1972年。細看個別分量, 都至少偵測出一個結構性變動點。結構變動點分別位於1940-41年以及1972-73年或是更接近近代的1984年。另外, 發現第0.2,0.7分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同, 說明高所得群體內, 較高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。假使個別分量只偵測到一個結構變動點, 則時間趨勢呈現由負向顯著關係轉為正向顯著關係, 假使偵測出兩個結構變動點, 則時間趨勢的改變情況十分多樣,¹³ 沒有特定的結果。

表6列出歐洲大陸地區與北歐地區高所得份額結構改變的情形, 表格上半部歐洲大陸地區考慮多個分量下偵測出來結構變動點個數為一個, 位於1953年。細看個別分量下, 不同分量所偵測出來的結構變動時間點相當不一致, 其中一個結構變動點跨足1930年代至

解釋為該分量相對於其他分量而言影響力較大。

¹²趨勢幅度的大小取決於估計係數值絕對值得大小, 若係數值絕對值越大, 代表斜率越大, 則顯示出時間趨勢向上或向下的幅度越大。

¹³所偵測出來的變動時間點前後之時間趨勢並沒有特定的形式, 有出現由顯著正向趨勢轉變為不顯著正向趨勢或由顯著負向趨勢轉變為不顯著正向趨勢或由不顯著正向趨勢轉變為顯著正向趨勢等

表 5: 20 世紀不同區域高所得份額之結構改變

盎格魯薩克遜						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1979	[1978,1982]	-0.016525***	0.036237***	
0.3	1	1986	[1984,1988]	-0.016436***	0.022773*	
0.4	1	1986	[1984,1988]	-0.016157***	0.021614	
0.5	1	1983	[1982,1986]	-0.016245***	0.023791*	
0.6	1	1971	[1969,1973]	-0.017975***	0.014229***	
0.7	1	1976	[1974,1978]	-0.016017***	0.024125***	
0.8	2	1941	[1938,1942] 1981[1979,1983]	0.000632	-0.010073***	0.038512**
0.9	1	1978	[1977,1979]	-0.017426***	0.034912***	
Multi	1	1978	[1977,1979]			
亞洲						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	1	1940	[1939,1942]			
0.2	2	1941	[1940,1942] 1972[1970,1982]	0.015848***	0.003410*	0.010033
0.3	2	1942	[1940,1943] 1972[1966,1977]	0.011558	-0.001626	0.004456*
0.4	2	1941	[1939,1942] 1984[1965,1986]	0.003617	-0.013032***	0.000812
0.5	1	1984	[1981,1986]	-0.018515***	0.001048	
0.6	1	1973	[1972,1976]	-0.017826***	0.010692***	
0.7	2	1941	[1936,1945] 1972[1970,1977]	-0.003332	-0.012043***	0.009748***
0.8	1	1972	[1971,1976]	-0.015395***	0.009269***	
0.9	1	1973	[1972,1975]	-0.017344***	-0.009218***	
Multi	2	1941	[1939,1942] 1972[1970,1975]			

註 1: 盎格魯薩克遜國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、美國, 樣本期間為 1921-2000 年。亞洲國家包含: 印度、日本, 樣本期間為 1922-1999 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

註 3: 亞洲地區第 0.1 分量無法利用 Oka and Qu(2011) 的 code 跑出估計係數的結果。

1950 年代, 均有發現結構性改變, 不同分量所發現的結構變動時間點年份差異相當大, 另一個結構變動點位於 1985 年。另外, 發現第 0.4 分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同, 說明高所得群體內, 位於中間分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面相當一致, 都是由顯著的負向關係轉變為同樣為負向關係, 但時間趨勢的陡峭程度後者相對於前者較小。

表 6: 20 世紀不同區域高所得份額之結構改變 (續)

歐洲大陸						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	1	1941[1940,1942]		-0.225790***	-0.091875***	
0.2	1	1942[1940,1944]		-0.229091***	-0.089000***	
0.3	1	1942[1940,1944]		-0.262632***	-0.103333*	
0.4	1	1953[1950,1954]		-0.308636***	-0.124400***	
0.5	1	1947[1943,1949]		-0.281579***	-0.127813***	
0.6	1	1944[1930,1946]		-0.295833***	-0.131944***	
0.7	2	1933[1924,1934]	1985[1983,1991]	-0.489231***	-0.166667***	-0.005000
0.8	1	1957[1944,1959]		-0.269032***	-0.081923***	
0.9	1	1985[1984,1986]				
Multi	1	1953[1949,1954]				
北歐						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1980[1979,1983]		-0.017932***	0.038546***	
0.3	2	1942[1940,1943]	1979[1978,1983]	-0.008636***	-0.014085***	0.032509***
0.4	2	1940[1936,1941]	1991[1990,1992]	-0.005834***	-0.019718***	0.021004*
0.5	2	1939[1935,1940]	1991[1990,1993]	-0.005195***	-0.020280***	0.023221
0.6	2	1939[1935,1940]	1990[1989,1992]	-0.005116***	-0.020319***	0.033170**
0.7	2	1940[1937,1941]	1990[1989,1992]	-0.006366***	-0.020009***	0.038560***
0.8	2	1974[1962,1975]	1990[1989,1992]	-0.011791***	-0.018460***	0.052681***
0.9	1	1979[1978,1983]		-0.010805***	0.039149***	
Multi	2	1940[1938,1941]	1980[1979,1982]			

註 1: 歐洲大陸國家包含: 法國、荷蘭, 樣本期間為 1915-1999 年。北歐國家包含: 芬蘭、挪威、瑞典, 樣本期間為 1920-2004 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

註 3: 歐洲大陸地區第 0.9 分量無法利用 Oka and Qu(2011) 的 code 跑出估計係數的結果。

表 6 下半部北歐國家考慮多個分量下, 偵測出來的結構變動時間點為 1940 年與 1980 年。細看個別分量下, 分為三個不同的變動時間點, 一個為 1939-40 年的結構變動點, 一個為 1970 年代的結構變動點, 最後則是 1990 年代初期的結構變動點。另外發現並沒有任何個別分量所偵測出來的變動時間點與考慮多個分量下所偵測出來的變動時間點相符合, 但值得注意的是, 頭尾分量 (第 0.2, 0.3, 0.9 分量) 所偵測出來 1970 年代末的結構變動點與多個分量下所發現的變動點相同, 代表其影響力大於其他分量所偵測出來的 1990 年代的結構

變動點，因此可推斷 1980 年代的結構斷裂支配 1990 年代的結構斷裂。時間趨勢方面，都是由顯著負向關係轉變為更為陡峭的負向關係而後產生反轉改為正向顯著關係。

20 世紀不同區域下個別分量之高所得份額結構改變時間點的時間序列圖可見圖 1 以及圖 2，藉由圖形清楚的看出每個分量斷裂時間點的位置，¹⁴ 大致來看，全世界結構變動點落於 1941、1942 年以及 1980 至 1986 年，盎格魯薩克遜地區結構變動點落於 1941 年以及 1978 至 83 年，北歐地區結構變動點落於 1939 至 42 年以及 1979、1980 年以及 1990、1991 年，歐洲大陸地區結構變動點落於 1941 至 1953 年以及 1985 年，亞洲地區結構變動點落於 1940 至 42 年以及 1972、1973 年以及 1984 年。變動時間點的偵測與過去文獻相似，於二次世界大戰期間高所得份額產生趨勢向下以及於 1980 年代附近，除了歐洲大陸之外，都出現高所得份額反轉向上的情形。由圖形亦可以看出是否高所得分配中，中高分位數的群體支配整個結構性改變，以圖 1、圖 2 來看，20 世紀不同區域能夠看出所有地區都有偵測出多個分量下結構變動時間點，對盎格魯薩克遜地區而言，第 0.9 分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論高分位數群體支配整個結構性改變；北歐地區來看，考慮多個分量下發現結構改變點分別是 1940 年及 1980 年，但沒有任何個別分量所發現之結構變動時間點與其完全相符合，故無法辨別什麼分位數的群體支配整個結構性改變；歐洲大陸地區來看，第 0.4 分量與多個分量下所發現的結構變動點相符合，故中分位數群體支配整個結構性改變；亞洲地區來看，第 0.2、0.7 分量與多個分量下所發現的結構變動點相符合，故中高分位數群體支配整個結構性改變；以全世界國家來看，第 0.9 分量與多個分量下所發現的結構變動點相符合，故高分位數群體支配整個結構性改變。

¹⁴ 不同分量結構變動點的位置沒有一定的規律，舉例來說並不會出現當時間序列圖形當中，左半部之高所得份額較右半部大，則越高分量的結構變動點會更靠近左邊，原因從圖形及數學式兩種來解釋：以圖形來說，考慮單一分量下，假使某特定分量偵測出結構變動點數量為 1 個，則從圖形中所有的樣本時間點去尋找結構變動程度最大的變動時間點，即為所求。考慮多個分量下，假使所偵測出來的變動點數量為 1 個，則找出某個變動時間點使得考慮多個分量下結構變動程度最大，即為所求。以數學式來看，考慮單一分量下，假使某特定分量偵測出結構變動點數量為 1 個，則搜尋所有可能單一結構變動點的組合，找一個能夠全面極小化目標函數式 (5) 的變動時間點，該變動時間點及所對應的估計參數即為所求。考慮多個分量下，假使所偵測出來的變動點數量為 1 個，對於每個不同的變動時間點的組合去算出目標函數 (累加所有感興趣的分量)，目標函數長相如式 (6) 找出能夠使得目標函數達到全面性極小的變動時間點組合及所對應的估計係數即為所求。因此不管是高分量或低分量，變動時間點都可能出現在任意樣本區間內，只要能夠滿足目標函數達到全面極小，本說明舉一個結構變動點為例，多個結構變動點則同理類推。

表 7: 戰後時期全世界國家高所得份額之結構改變

全世界						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	2	1972[1971,1985]	1983[1982,1984]	-0.011008***	-0.048814***	0.030038***
0.2	1	1980[1979,1985]		-0.017800***	0.022956***	
0.3	1	1980[1979,1984]		-0.016063***	0.032283***	
0.4	1	1977[1976,1984]		-0.012959***	0.017027***	
0.5	1	1977[1976,1982]		-0.012375***	0.016284***	
0.6	1	1977[1976,1981]		-0.011614***	0.017950***	
0.7	1	1985[1983,1987]		-0.012130***	0.007930	
0.8	1	1977[1976,1980]		-0.011267***	0.014386***	
0.9	1	1977[1976,1982]		-0.012629***	0.018286***	
Multi	1	1978[1977,1981]				

註 1: 全世界國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、英國、美國、法國、荷蘭、新加坡、挪威、印度、芬蘭、日本、瑞典, 樣本期間為 1950-1997 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

4.3 二次世界大戰戰後高所得份額之結構改變

4.3.1 四大區域

表 7 列出全世界戰後時期高所得份額結構改變的情形, 考慮多個分量下所偵測之結構變動時間點為 1978 年, 其信賴區間的上下界分別為 1977 年及 1981 年。細看個別分量下, 僅第 0.1 分量出現兩個結構性改變, 分別為 1972 年與 1983 年, 其他分量所偵測到的結構變動點除了第 0.7 分量是差距較遠的 1985 年外, 其餘都集中在 1970 年代末以及 1980 年代初這段期間。雖然並沒有於特定分量下, 發現結構變動點與考慮多個分量下所發現的結構變動點相符合, 但發現絕大部分個別分量下所發現之結構變動點, 也都離不開考慮多個分量下所偵測出來的結構變動點的信賴區間範圍內, 僅第 0.7 分量例外。時間趨勢上都呈現由顯著負向關係轉變為顯著的正向關係, 僅第 0.7 個分量是例外, 雖然同樣是由負向趨勢轉為正向趨勢, 但其正向趨勢並不顯著。

欲分析戰後時期不同區域之高所得份額結構改變的情形可見表 8 表 9, 首先表 8 列出盎格魯薩克遜地區與亞洲地區高所得份額結構改變的情形, 表格上半部盎格魯薩克遜地區考慮多個分量下偵測出來結構變動點個數為一個, 位於 1980 年。細看個別分量下, 僅第 0.9 個

表 8: 戰後時期不同區域高所得份額之結構改變

盎格魯薩克遜						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	1	1982[1981,1983]		-0.020690***	0.036518***	
0.2	1	1986[1985,1988]		-0.016345***	0.028652**	
0.3	1	1986[1985,1988]		-0.016569***	0.022018	
0.4	1	1977[1976,1979]		-0.017850***	0.032673***	
0.5	1	1977[1976,1979]		-0.015827***	0.035522***	
0.6	1	1978[1977,1980]		-0.012657***	0.034430***	
0.7	1	1978[1977,1980]		-0.011737***	0.027492***	
0.8	1	1979[1978,1981]		-0.011232***	0.029618***	
0.9	2	1976[1975,1978]	1986[1984,1988]	-0.010313***	0.018287***	0.032082***
Multi	1	1980[1979,1981]				
亞洲						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	1	1973[1971,1989]		0.002756	0.010009	
0.2	1	1973[1967,1977]		0.002373	0.004456	
0.3	0					
0.4	0					
0.5	0					
0.6	0					
0.7	1	1966[1963,1980]		-0.012965***	-0.000618	
0.8	0					
0.9	0					
Multi	0					

註 1: 盎格魯薩克遜國家包含: 澳洲、加拿大、紐西蘭、英國、美國, 樣本期間為 1950-2000 年, 亞洲國家包含: 印度、日本、新加坡, 樣本期間為 1950-2000 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

分量發現兩個結構改變, 其餘都是發現一個結構變動點時間約略坐落於 1970 年代末 1980 年代初, 僅第 0.9 分量偵測出兩個結構變動點分別為戰前時期的 1976 年以及 1986 年。另外發現並沒有特定分量所偵測出來的結構改變點與考慮多個分量下所偵測出來的結構改變點完全相同, 因此推論並沒有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面, 發現趨勢都是從顯著負向關係反轉成顯著正向關係。而第 0.9 個分量, 發現變動時間點 1986 年前後時間趨勢都是正向顯著關係, 但 1970 年代中期至 1980 年代中期的上升幅

度是小於1980年代中期以後的。

表8下半部亞洲地區考慮多個分量下並無檢測出任何結構性改變。細看個別分量下，僅第0.1,0.2,0.7分量有偵測出一個結構變動時間點，分別是第0.7分量的1966年與第0.1,0.2分量的1973。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，第0.1,0.2分量的1973年前後之時間趨勢變化都是由正向關係轉為更加陡峭的正向關係，但都不顯著。而第0.7分量的1966年前後則與第0.1,0.2分量結果完全不同，時間趨勢由顯著負向趨勢轉變為不顯著的負向關係。

表9列出歐洲大陸地區與北歐地區高所得份額結構改變的情形，表格上半部歐洲大陸地區考慮多個分量下並無結構改變。細看個別分量下，僅第0.2分量有存在2個結構性改變，分別為1964年與1973年。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，1964年前後發現趨勢是由顯著正向關係轉為顯著負向關係，另外於1973年後序列呈現不顯著且較不陡峭的負向關係。

表9下半部北歐國家考慮多個分量下，偵測出來的結構性改變點為1974年與1985年。細看個別分量下，所偵測出來的結構性變動時間點大致分為三種，分別為1970年代中期,1980年代中期，以及1990年代初期這三種不同的斷裂時間點。另外，發現第0.2,0.3分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中低分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面發現1970年代中期的結構斷裂，伴隨著趨勢從顯著但較為平坦負向趨勢轉變為顯著且更加陡峭的負向趨勢。而1980年代中期以及1990年代中期之結構斷裂點前後伴隨的是時間趨勢從顯著負向關係轉變為顯著正向關係。

戰後時期不同區域下個別分量之高所得份額結構改變時間點的時間序列圖可見圖3以及圖4，能從圖形當中清楚的看出每個分量斷裂時間點的於整個時間序列中相對位置，大致來看，全世界結構變動點落於1972年以及1977-85年，盎格魯薩克遜地區結構變動點落於1976-82年以及1986年，北歐地區結構變動點落於1974年以及1980-85年以及1991年，歐洲大陸地區結構變動點落於1964年以及1973年，亞洲地區結構變動點落於1966年以及1973年。戰後時期不同區域所發生的結構變動點發生於1970年代中期至1980年代不等，

表 9: 戰後時期不同區域高所得份額之結構改變(續)

歐洲大陸						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	2	1964[1963,1966]	1973[1972,1978]	0.007787**	-0.031982***	-0.008337
0.3	0					
0.4	0					
0.5	0					
0.6	0					
0.7	0					
0.8	0					
0.9	0					
Multi	0					
北歐						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	1	1980[1979,1982]		-0.013818***	0.027666***	
0.2	2	1974[1973,1975]	1985[1984,1986]	-0.011447***	-0.050005***	0.034938***
0.3	2	1974[1973,1977]	1985[1984,1986]	-0.011843***	-0.048347***	0.036056***
0.4	1	1980[1979,1983]		-0.014718***	0.026523***	
0.5	1	1981[1980,1987]		-0.015953***	0.027243***	
0.6	1	1981[1980,1985]		-0.018370***	0.026398***	
0.7	1	1991[1990,1994]		-0.019299***	0.039875**	
0.8	1	1991[1989,1993]		-0.021314***	0.052681***	
0.9	0					
Multi	2	1974[1973,1975]	1985[1984,1986]			

註 1: 歐洲大陸國家包含: 法國、荷蘭、瑞士、德國, 樣本期間為 1950-1996 年, 北歐國家包含: 芬蘭、瑞典、挪威, 樣本期間為 1950-2005 年。

註 2: *, **, *** 分別表示該係數在顯著水準 0.1, 0.05, 0.01 下顯著異於零。

除了亞洲地區及歐洲大陸地區之外, 其高所得份額趨勢出現反轉向上的情形。由圖形也能夠看出是否高所得分配中, 中高分位數的群體支配整個結構性改變, 以圖3、圖4來看, 戰後時期不同區域看出歐洲大陸地區以及亞洲地區並沒有發現於考慮多個分量下的結構性改變, 而盎格魯薩克遜地區以及全世界國家雖然有發現於考慮多個分量下的結構性改變, 但並沒有任何個別分量所偵測出來的結構改變點與其相符合, 北歐地區則清楚的看出第 0.2, 0.3 分量與考慮多個分量下的結構性改變時間點相符合, 也說明高所得分配中, 低分位

數群體支配整個結構性改變，與本文所欲探究之議題相異。

4.3.2 個別國家

戰後時期個別國家之高所得份額結構改變的情形可見表10-表15，以下將由歐洲大陸地區、北歐地區、盎格魯薩克遜地區、亞洲地區依序說明。

表10表11 列出歐洲大陸個別國家戰後時期高所得份額結構改變的情形，每個表都分上中下三個部分分別代表不同的國家，表10上半部分西班牙考慮多個分量下並沒有發現結構性改變。細看個別分量下，僅第0.4個分量偵測出結構性改變並且有兩個結構變動點，分別為1961年以及1973年。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，於1961年前後展現由顯著負向關係轉變為顯著正向關係，但於1973年以後，正向趨勢的強度小於1961-1972年這段期間的正向強度。

表10中間葡萄牙考慮多個分量下，偵測出來的結構性改變點為1975年。細看個別分量下，除了在第0.1,0.2,0.9頭尾較為極端的分量並沒有偵測出結構變動點，其餘分量都至少偵測出一個變動點，變動時間點的年份大約落於1974-78年（除了第0.3分量的1968、1983年相距較遠）。另外，發現第0.6,0.7分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變，呼應Alvaredo(2010)所提出的1980年代後考慮高所得群體內越高的分位數之群體，其高所得份額增加的越多，也就是高分位數群體是高所得份額上升的主要原因。還有值得注意的是，考慮多個分量下偵測出的變動時間點為1975年，其信賴區間為1974-1978年，這個範圍幾乎涵蓋所有中高分量（第0.4-0.8）所偵測到的變動時間點，相反的中低分量（第0.1-0.3）不是沒有偵測到變動時間點，就是所偵測到的年份相距甚遠，不屬於信賴區間內的範圍。時間趨勢方面其正負向關係大約於1970年代中期前後由顯著負向關係轉為顯著正向關係。

表10下半部瑞士考慮多個分量下，偵測出來的結構性改變點為1972年。細看個別分量下，除了接近頭尾的分量並沒有辦法偵測出結構變動點，其餘中高分量（第0.4-0.8）所偵測到的結構變動時間點都相距不遠，落於1972年及1974年。另外，發現第0.4,0.5分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面發現於1972年、1974年前後，趨勢

表 10: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變

西班牙						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	0					
0.4	2	1961[1960,1962]	1973[1972,1975]	(-0.076318***)	(0.041436***)	(0.012544***)
0.5	0					
0.6	0					
0.7	0					
0.8	0					
0.9	0					
Multi	0					
葡萄牙						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	2	1968[1967,1970]	1983[1982,1984]	(-0.009412***)	(-0.122595***)	(0.042292***)
0.4	1	1974[1973,1978]		-0.014821***	0.046124***	
0.5	1	1974[1973,1978]		-0.012307***	0.038150***	
0.6	1	1975[1974,1980]		-0.012732***	0.034977***	
0.7	1	1975[1974,1980]		-0.009856***	0.028788***	
0.8	1	1978[1977,1979]		-0.010188***	0.044603***	
0.9	0					
Multi	1	1975[1974,1978]				
瑞士						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	0					
0.4	1	1972[1971,1973]		0.006490***	-0.000079	
0.5	1	1972[1970,1974]		0.005629***	-0.001890	
0.6	1	1974[1973,1975]		0.005333***	-0.001285	
0.7	1	1974[1973,1975]		0.004912***	0.002613	
0.8	0					
0.9	0					
Multi	1	1972[1971,1973]				

註 1: 西班牙樣本期間為:1954-2005 年, 葡萄牙樣本期間為 1950-2003 年。瑞士樣本期間為 1950-1996 年。

註 2: *、**、*** 分別表示該係數在顯著水準 0.1、0.05、0.01 下顯著異於零。

註 3: 表內小括弧代表由於無法由 Oka and Qu(2011) 跑出估計係數的結果, 故採其他統計軟體將估計係數值跑出。

由顯著正向關係轉為負向關係，但值得注意的是，所有的負向趨勢都並不顯著，並且估計係數值也很小。

表11上半部分法國考慮多個分量下並沒有發現結構性改變。細看個別分量下，除了第0.6,0.7之中高分量以外，其餘分量都沒有辦法偵測出結構變動點，第0.6,0.7分量均偵測出1967年為變動時間點。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面則是以1967年為分水嶺，該變動時間點前後之估計係數值由顯著正向關係轉為顯著負向關係。

表11中間德國考慮多個分量下亦沒有發現結構性改變。細看個別分量下，除了第0.6分量以外其餘分量都沒有偵測出結構變動點，第0.6個分量的結構變動時間點為1972年。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面於變動時間點1972年前後從很小不顯著正向關係轉為估計係數值較大且顯著的正向關係。

表11下半部荷蘭考慮多個分量下，偵測出來的結構性改變點為1972年。細看個別分量下，除了頭尾分量外，其餘分量都偵測出一個結構變動點，結構變動時間點的位置約位於1972年附近。另外，發現第0.4,0.5,0.6分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。若從多個分量下變動時間點之信賴區間來看，上下界1971年以及1973年完全涵蓋所有個別分量下所偵測出來的結構變動時間點。時間趨勢方面發現變動時間點前後同樣都是由顯著負向關係轉為強度沒有這麼大的顯著負向關係。

若從圖形來看，圖5標示出戰後時期歐洲大陸國家下個別分量之高所得份額結構改變時間序列圖，能夠更清楚的看出每個分量斷裂時間點的於整個時間序列中相對位置，大致來看，法國結構變動點落於1967年，德國結構變動點落於1972年，荷蘭結構變動點落於1971-73年，西班牙結構變動點落於1961年以及1973年，葡萄牙結構變動點落於1968年以及1974-78年以及1983年，瑞士結構變動點落於1972-74年。由圖形亦能夠看出是否高所得分配中，中高分位數的群體支配整個結構性改變，圖5來看，戰後時期歐洲大陸地區除了法國、德國、西班牙外都有偵測出考慮多個分量下結構變動時間點，對荷蘭而言，第0.5,0.6分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對葡萄牙而言，第0.6,0.7分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中

表 11: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)

法國				
分量	變動點個數	變動時間點 [95% 信賴區間]	高所得份額年變化率	
			t_1	t_2
0.1	0			
0.2	0			
0.3	0			
0.4	0			
0.5	0			
0.6	1	1967[1959,1969]	0.003555**	-0.003928***
0.7	1	1967[1962,1969]	0.002810**	-0.003120***
0.8	0			
0.9	0			
Multi	0			
德國				
分量	變動點個數	變動時間點 [95% 信賴區間]	高所得份額年變化率	
			t_1	t_2
0.1	0			
0.2	0			
0.3	0			
0.4	0			
0.5	0			
0.6	1	1972[1970,1976]	0.000103	0.003190**
0.7	0			
0.8	0			
0.9	0			
Multi	0			
荷蘭				
分量	變動點個數	變動時間點 [95% 信賴區間]	高所得份額年變化率	
			t_1	t_2
0.1	0			
0.2	0			
0.3	1	1971[1970,1972]	-0.016757***	-0.006077***
0.4	1	1972[1971,1973]	-0.017982***	-0.006163***
0.5	1	1972[1971,1974]	-0.018192***	-0.006223***
0.6	1	1972[1971,1974]	-0.018455***	-0.006824***
0.7	1	1973[1972,1975]	-0.020530***	-0.005778***
0.8	0			
0.9	0			
Multi	1	1972[1971,1973]		

註 1: 法國樣本期間為:1950-2005年, 德國樣本期間為 1950-1998年。荷蘭樣本期間為 1950-1999年。

註 2: *、**、***分別表示該係數在顯著水準0.1、0.05、0.01下顯著異於零。

高分位數群體支配整個結構性改變；對瑞士而言，第0.4,0.5分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變。

表12列出北歐個別國家戰後時期高所得份額結構改變的情形，每個表都分上中下三個部分分別代表不同的國家，表12上半部分芬蘭考慮多個分量下發現兩個結構性變動點分別為1970年及1983年。細看個別分量下，除了較為極端分量以外其餘分量都有偵測出結構變動點，在第0.3-0.7分量當中，每個分量所偵測出的結構變動時間點非常豐富，少則1個多則3個，變動時間點大約出現在1970年代初以及1980年代中還有1990年代中期。另外，發現第0.4,0.5分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面首先看第0.4分量，結構變動點高達三個，趨勢由顯著正向關係轉為顯著負向關係，直至1983年以後又轉為顯著正向關係，但1996年以後，正向趨勢將變得不再顯著。第0.5,0.7分量偵測到兩個結構變動點其時間趨勢上都是由顯著正向關係轉為顯著負向關係而後又反轉為顯著正向關係。僅觀察到一個結構變動點的第0.3,0.6分量其所偵測出來的變動時間點前後趨勢呈現由不顯著的正負向關係轉變為顯著的正向關係。

表12中間挪威考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1991年。細看個別分量下，除了頭尾極端分量之外都有偵測到一個結構變動點，並且不同分量下結構變動時間點都相當相近，甚至完全相同，年份為1991或1992年。另外，發現第0.5-0.8分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面所有分量都呈現由顯著負向關係轉為顯著正向關係，僅第0.3分量於1992年後其時間趨勢為正向不顯著的情形。

表12下半部瑞典考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1978年。細看個別分量下，頭尾極端分量值都沒有偵測出結構變動點，在單一分量下，除了第0.7與0.8分量僅偵測出一個結構性變動點1978年，其餘中低分量(0.2-0.6)都偵測出兩個結構性變動點，變動時間點都呈現相當一致的情形，為1968-69年與1981年。另外，發現第0.7,0.8分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。此結論與 Roine and Waldenstrom(2008)所認為高所得份額主要的下降，導因於所得分配中分位數較高群體之高所得份額下降的影響相呼應。時間趨勢方面先看偵測到兩個結構變動點的情形，所區分的三的子樣本可看出

表 12: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)

芬蘭		變動時間點		高所得份額年變化率				
分量	變動點個數	[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3	t_4	
0.1	0							
0.2	0							
0.3	1	1974[1973,1976]		0.001176	0.021628***			
0.4	3	1970[1969,1971]	1983[1982,1984]	1996[1994,1998]	(0.008262**)	(-0.084932***)	(0.020656***)	(0.036720)
0.5	2	1970[1969,1971]	1983[1982,1984]		0.006274*	-0.087497***	0.039755***	
0.6	1	1979[1978,1982]			-0.002536	0.035753***		
0.7	2	1969[1968,1970]	1984[1983,1985]		(0.014568***)	(-0.083107***)	(0.041539***)	
0.8	0							
0.9	0							
Multi	2	1970[1969,1971]	1983[1982,1984]					
挪威		變動時間點		高所得份額年變化率				
分量	變動點個數	[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3	t_4	
0.1	0							
0.2	0							
0.3	1	1992[1991,1993]			(-0.015508***)	(0.027375)		
0.4	1	1992[1991,1993]			-0.015347***	0.035626***		
0.5	1	1991[1990,1994]			-0.016131***	0.040028**		
0.6	1	1991[1990,1992]			-0.016345***	0.043569***		
0.7	1	1991[1990,1992]			(-0.016509***)	(0.046464*)		
0.8	1	1991[1990,1992]			(-0.017558***)	(0.055280**)		
0.9	0							
Multi	1	1991[1990,1992]						
瑞典		變動時間點		高所得份額年變化率				
分量	變動點個數	[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3	t_4	
0.1	0							
0.2	2	1968[1967,1969]	1981[1980,1982]		(-0.004659***)	(-0.041036***)	(0.017253***)	
0.3	2	1968[1967,1969]	1981[1980,1982]		(-0.005412***)	(-0.041060***)	(0.020819***)	
0.4	2	1968[1967,1969]	1981[1980,1982]		-0.004231**	-0.040107***	0.022538***	
0.5	2	1968[1967,1969]	1981[1980,1982]		-0.00435**	-0.039961***	0.021153***	
0.6	2	1969[1968,1970]	1981[1980,1982]		-0.005174***	-0.042028***	0.022480***	
0.7	1	1978[1977,1979]			-0.010600***	0.019509***		
0.8	1	1978[1977,1979]			-0.010330***	0.020313***		
0.9	0							
Multi	1	1978[1977,1979]						

註 1: 芬蘭樣本期間為:1950-2004 年, 挪威樣本期間為 1950-2006 年。瑞典樣本期間為 1950-2006 年。

註 2: *、**、*** 分別表示該係數在顯著水準 0.1、0.05、0.01 下顯著異於零。

註 3: 表內小括弧代表由於無法由 Oka and Qu(2011) 跑出估計係數的結果, 故採其他統計軟體將估計係數值跑出。

趨勢的變化從原本很小的顯著負向關係轉變為較為劇烈的顯著負向關係，而1981年以後趨勢反轉往上，轉變為顯著正向關係，至於第0.7與0.8分量所偵測出來的結構變動時間點與其他分量差異較大，年份為1978年，時間趨勢同樣的由顯著負向關係轉為顯著正向關係。

若從圖形來看，圖6(a)、(b)、(c)標示出戰後時期北歐國家下個別分量之高所得份額結構改變時間序列圖，能夠更清楚的看出每個分量斷裂時間點的於整個時間序列中相對位置，大致來看，芬蘭結構變動點落於1969-74年以及1979-84年以及1996年，挪威結構變動點落於1991-92年，瑞典結構變動點落於1968-69年以及1978-81年。由圖形亦能夠看出是否高所得分配中，中高分位數的群體支配整個結構性改變，圖6(a)、(b)、(c)來看，戰後時期北歐地區都有偵測出考慮多個分量下結構變動時間點，對芬蘭而言，第0.4,0.5分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中分位數群體支配整個結構性改變；對挪威而言，第0.5-0.8分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對瑞典而言，第0.7,0.8分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論高分位數群體支配整個結構性改變。

表13表14列出盎格魯薩克遜個別國家戰後時期高所得份額結構改變的情形，每個表都分上中下三個部分分別代表不同的國家，表13上半部分澳洲考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1984年。細看個別分量下，除了極端分量0.1,0.9以外，其餘分量都有辦法偵測出結構變動點，所偵測到的結構變動時間點為1981年及1984年。另外，發現第0.3,0.4,0.6,0.8分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面都是在1980年代初期中期前後趨勢由顯著負向關係轉變為顯著正向關係。

表13中間愛爾蘭考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1971年。細看個別分量下，除了第0.1分量沒有偵測結構變動點外，其餘分量均偵測出一個結構變動點，唯獨第0.7分量有兩個結構變動點，結構變動時間點落於1970-72及1984年。另外，發現第0.3-0.7分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢除了極高分量（第0.8, 0.9分量）由顯著負向關係轉為不顯著正向關係，其餘中低分量之趨勢都呈現由顯著負向關係轉為顯著正向關係。單看第0.7分量則發現趨勢從顯著的負向轉為不顯著的正向，而

表 13: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)

澳洲						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1981	[1980,1982]	(-0.021473***)	(0.032939***)	
0.3	1	1984	[1983,1985]	-0.021430***	0.029413***	
0.4	1	1984	[1983,1985]	-0.021460***	0.028649***	
0.5	1	1981	[1980,1982]	-0.022577***	0.033631***	
0.6	1	1984	[1983,1985]	-0.021471***	0.026086***	
0.7	1	1971	[1970,2000]	-0.021429***	0.024258***	
0.8	1	1984	[1983,1985]	(-0.020707***)	(0.023308)	
0.9	0					
Multi	1	1984	[1983,1985]			
愛爾蘭						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1970	[1969,1974]	(-0.032620***)	(0.018151***)	
0.3	1	1971	[1970,1974]	-0.033105***	0.020294***	
0.4	1	1971	[1970,1973]	-0.033048***	0.021959***	
0.5	1	1971	[1970,1973]	-0.033160***	0.020583***	
0.6	1	1971	[1970,1973]	-0.033270***	0.021551***	
0.7	2	1971	[1970,2000] 1984[1982,1988]	(-0.036046***)	(0.016948)	(0.047156***)
0.8	1	1972	[1971,1974]	(-0.039295***)	(0.025182)	
0.9	1	1972	[1971,1974]	(-0.043198***)	(0.026071)	
Multi	1	1971	[1970,1973]			
加拿大						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	1	1975	[1974,1977]	-0.005994***	0.015846***	
0.4	1	1976	[1975,1980]	-0.006178***	0.016412***	
0.5	1	1985	[1984,1987]	-0.006351***	0.031656***	
0.6	1	1985	[1984,1987]	-0.006846***	0.033048***	
0.7	1	1985	[1984,1987]	(-0.007423***)	(0.032735***)	
0.8	1	1983	[1982,1984]	(-0.007695***)	(0.028040***)	
0.9	1					
Multi	1	1976	[1975,1978]			

註 1: 澳洲樣本期間為:1950-2002年, 愛爾蘭樣本期間為 1950-2000年。加拿大樣本期間為 1950-2000年。

註 2: *、**、***分別表示該係數在顯著水準0.1、0.05、0.01下顯著異於零。

註 3: 表內小括弧代表由於無法由 Oka and Qu(2011) 跑出估計係數的結果, 故採其他統計軟體將估計係數值跑出。加拿大第 0.9 分量僅得到有兩個結構變動點但無法跑出確切的時間。 50

1984年後則轉變為較為劇烈且顯著的正向關係。

表13下半部加拿大考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1976年。細看個別分量下，在極端分量並沒有辦法偵測出結構性變動點，第0.3-0.8分量都偵測到一個結構性變動點但年份並不相同，從較低分量(0.3-0.4)的1975-76年一直到中高分量(0.5-0.8)的1983及1985年。另外，可發現第0.4分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。此結論與 Saez and Veall(2007) 認為加拿大高所得份額的上升主要導因於加拿大非常高之所得群體相呼應。時間趨勢方面所有分量都呈現由較小強度的顯著負向趨勢轉變為較強烈顯著正向趨勢。

表14上半部分紐西蘭考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1988年。細看個別分量下，除了頭尾極端分量沒有結構變動點之外，第0.3-0.8分量都偵測出一個結構性變動點，其年分為1988年與1989年。另外，可發現第0.6-0.8分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面都是從顯著負向關係轉為不顯著的正向關係，僅0.3分量轉變為正向顯著關係。

表14中間英國考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1975年。細看個別分量下，除了第0.1分量外其餘分量都能夠偵測出結構性變動點，從1974年到1979年都有。另外，發現第0.4-0.6,0.9分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面各個分量都呈現從顯著負向關係轉為顯著正向關係。

表14下半部美國考慮多個分量下發現一個結構性變動點，變動時間點為1976年。細看個別分量下，除了第0.1分量外其餘分量都偵測出一到兩個結構變動點，結構變動時間點出現在1971年至1978年不等，而第0.4,0.8分量則再多發現1986年有結構改變。另外發現並沒有個別分量所偵測出來的結構變動點與考慮多個分量下所偵測出來的結構變動點相符合，所以沒有特定分量支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，除了第0.4,0.8以外所有分量，發現趨勢都是從顯著負向關係轉為顯著正向關係，並且正向趨勢都比負向趨勢來的強。另外第0.4,0.8分量則是於1970年代初期前後由顯著負向關係轉為顯著正向關係，但進一步於1986年後再由原先顯著正向趨勢轉變為更強烈的顯著正向趨勢關係。

表 14: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)

紐西蘭						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	1	1989	[1987,1990]	(-0.013192***)	(0.005976***)	
0.4	1	1989	[1987,1990]	-0.011999***	0.005094	
0.5	1	1989	[1987,1990]	-0.012230***	0.008169	
0.6	1	1988	[1986,1990]	-0.014104***	0.011926	
0.7	1	1988	[1983,1990]	-0.015415***	0.011686	
0.8	1	1988	[1985,1990]	(-0.015961***)	(0.011527)	
0.9	0					
Multi	1	1988	[1986,1990]			
英國						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1974	[1973,1975]	-0.018097***	0.030386***	
0.3	2					
0.4	1	1975	[1974,1976]	-0.018429***	0.033418***	
0.5	1	1975	[1974,1976]	-0.019059***	0.034166***	
0.6	1	1975	[1974,1976]	-0.019606***	0.034939***	
0.7	1	1979	[1978,1980]	-0.021625***	0.035633***	
0.8	1	1977	[1976,1978]	-0.021016***	0.037275***	
0.9	1	1975	[1974,1976]	(-0.020419***)	(0.035164***)	
Multi	1	1975	[1974,1976]			
美國						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	1	1977	[1976,1978]	-0.007352***	0.029837***	
0.3	1	1978	[1977,1980]	-0.008314***	0.032034***	
0.4	2	1974	[1973,1976] 1986[1985,1988]	-0.009709***	0.015487***	0.021287***
0.5	1	1975	[1974,1976]	-0.009914***	0.030001***	
0.6	1	1975	[1974,1976]	-0.009468***	0.030522***	
0.7	1	1977	[1976,1978]	-0.007305***	0.032698***	
0.8	2	1971	[1969,1972] 1986[1985,1987]	(-0.015039***)	(0.011662***)	(0.020225***)
0.9	1	1973	[1972,1974]	(-0.015166***)	(0.025227***)	
Multi	1	1976	[1975,1977]			

註 1: 紐西蘭樣本期間為:1950-2005年, 英國樣本期間為 1950-2005年。美國樣本期間為 1950-2006年。

註 2: *、**、***分別表示該係數在顯著水準0.1、0.05、0.01下顯著異於零。

註 3: 表內小括弧代表由於無法由 Oka and Qu(2011) 跑出估計係數的結果, 故採其他統計軟體將估計係數值跑出。英國第 0.3 分量僅得到有兩個結構變動點但無法跑出確切的時間。

若從圖形來看，圖7標示出戰後時期盎格魯薩克遜國家下個別分量之高所得份額結構改變時間序列圖，能夠更清楚的看出每個分量斷裂時間點的於整個時間序列中相對位置，大致來看，澳洲結構變動點落於1981-84年，加拿大結構變動點落於1975-85年，愛爾蘭結構變動點落於1970-72年以及1984年，紐西蘭結構變動點落於1988-89年，英國結構變動點落於1974-79年，美國結構變動點落於1971-78年以及1986年。由圖形亦能夠看出是否高所得分配中，中高分位數的群體支配整個結構性改變，圖7來看，戰後時期盎格魯薩克遜地區都有偵測出考慮多個分量下結構變動時間點，對澳洲而言，第0.3,0.4,0.6,0.8分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對加拿大而言，第0.4分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中分位數群體支配整個結構性改變；對愛爾蘭而言，第0.3-0.7分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變對紐西蘭而言，第0.6-0.8分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對英國而言，第0.4-0.6,0.9分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對美國而言，沒有發現個別分量所偵測出來的結構變動時間點與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論沒有特定分位數群體支配整個結構性改變。

表15列出亞洲個別國家戰後時期高所得份額結構改變的情形，每個表都分上中下三個部分分別代表不同的國家，表15上半部分印度考慮多個分量下並沒有發現任何結構性改變。細看個別分量下，綜觀第0.3-0.8分量所偵測到的結構變動時間點有兩個，一個是僅於第0.3,0.4分量才偵測出來的1970年以及所有分量都有偵測出來的1982年及1984年。弔詭的是雖然幾乎大部分的分量都有偵測出結構性變動點，但考慮多個分量下卻無法發現任何結構改變。由於在考慮多個分量下並沒有發現結構改變，因此無法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，發現於1982或是1984年以前趨勢都為顯著負向關係，而後則是展現出正向關係，但僅第0.3,0.4分量有顯著的正向趨勢。而考慮第0.3,0.4分量的第一個結構變動點1970年前後，時間趨勢則是由較為不陡峭的顯著負向關係轉為顯著負向關係，而1982年後則又轉為顯著正向關係。

表15中間日本考慮多個分量下發現一個結構性改變位於1973年。細看個別分量下，僅於中高分量（第0.5-0.7分量）有辦法偵測到結構性改變，並且變動時間點相當的一致，均為1973年。另外，發現第0.5-0.7分量與考慮多個分量下偵測出來的結構變動時間點完全

表 15: 戰後時期個別國家高所得份額之結構改變(續)

印度						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	2	1970[1968,1972]	1982[1980,1983]	(-0.015950***)	(-0.060326***)	(0.020377**)
0.4	2	1970[1968,1972]	1982[1980,1983]	-0.016621***	-0.054075***	0.021735**
0.5	1	1982[1980,1983]		-0.037481***	0.009492	
0.6	1	1982[1981,1984]		-0.033953***	0.008192	
0.7	1	1984[1983,1985]		(-0.028298***)	(0.005904)	
0.8	1	1984[1983,1986]		(-0.027320***)	(0.004924)	
0.9	0					
Multi	0					
日本						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	0					
0.4	0					
0.5	1	1973[1971,1976]		0.003499	0.007845***	
0.6	1	1973[1971,1976]		0.003150	0.008619***	
0.7	1	1973[1971,1976]		0.004325*	0.008595***	
0.8	0					
0.9	0					
Multi	1	1973[1972,1975]				
新加坡						
分量	變動點個數	變動時間點		高所得份額年變化率		
		[95% 信賴區間]		t_1	t_2	t_3
0.1	0					
0.2	0					
0.3	0					
0.4	2	1967[1961,1968]	1997[1992,2000]	(-0.014950***)	(-0.000955)	(0.012429)
0.5	2	1967[1957,1969]	1997[1996,1999]	-0.016094***	-0.000808	0.027080
0.6	1	1997[1995,1999]		(-0.005049***)	(0.023785)	
0.7						
0.8						
0.9						
Multi						

註 1: 印度樣本期間為:1950-1999年, 日本樣本期間為 1950-2005年。新加坡樣本期間為 1950-2005年。

註 2: *、**、***分別表示該係數在顯著水準0.1、0.05、0.01下顯著異於零。

註 3: 表內小括弧代表由於無法由 Oka and Qu(2011) 跑出估計係數的結果, 故採其他統計軟體將估計係數值跑出。

相同，說明高所得群體內，位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面，發現1973年前後由不顯著且相對不陡峭的正向關係轉變為較強烈的顯著正向關係。

表15下半部分新加坡考慮多個分量下並沒有發現任何結構性改變。細看個別分量下，僅於第0.4-0.6分量有結構性改變，變動時間點分別為1967年與1997年。由於無法偵測出考慮多個分量下的結構性改變點，因此沒辦法推斷是否有特定分位數的群體支配整個高所得份額的結構改變。時間趨勢方面若單看1967年這個結構性變動點，發現時間趨勢從顯著負向趨勢轉變為不顯著的負向趨勢，而後於1997年後轉變為正向不顯著的趨勢，注意的是於1997年前後，此正向趨勢比負向趨勢要強的多。

若從圖形來看，圖6(d)、(e)、(f)標示出戰後時期亞洲國家下個別分量之高所得份額結構改變時間序列圖，能夠更清楚的看出每個分量斷裂時間點的於整個時間序列中相對位置，大致來看，印度結構變動點落於1970年以及1982-84年，日本結構變動點落於1973年，新加坡結構變動點落於1967年以及1997年。由圖形亦能夠看出是否高所得分配中，中高分位數的群體支配整個結構性改變，圖6(d)、(e)、(f)來看，戰後時期亞洲地區僅僅日本有偵測出考慮多個分量下結構變動時間點，對印度而言，並沒有偵測出考慮多個分量下之結構改變點；推論並沒有特定分位數群體支配整個結構性改變；對日本而言，第0.5-0.7分量與考慮多個分量下發現之結構改變點相同；推論中高分位數群體支配整個結構性改變；對新加坡而言，並沒有偵測出考慮多個分量下之結構改變點；推論並沒有特定分位數群體支配整個結構性改變。

綜觀戰後時期個別國家所發生的結構變動點，不同國家我偵測出來的結構變動時間點不完全相同，大致來看，不是落於1970年代初期中期就是落於1980年代初期中期，除了法國、德國、荷蘭之外，大部分國家都是由負向趨勢轉為正向趨勢。

4.4 個別區域與國家各個分量支配整個結構性變動點討論

本小節將總結20世紀以及戰後時期，不同區域以及個別國家各個分量之高所得份額的斷裂點是否支配整個結構性改變。

表16列出20世紀以及戰後時期不同區域各個分量是否支配整個結構性變動點，由表內看出總共有10個區域，扣除考慮多的分量下沒有偵測出結構變動點的2個區域（亞洲戰後

表 16: 不同區域各個分量支配整個結構性變動點一覽表

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
全世界 20 世紀	0	0	0	0	0	0	0	0	1
全世界戰後時期	0	0	0	0	0	0	0	0	0
盎格魯薩克遜 20 世紀	0	0	0	0	0	0	0	0	1
盎格魯薩克遜戰後時期	0	0	0	0	0	0	0	0	0
亞洲 20 世紀	0	1	1	0	0	0	1	0	0
亞洲戰後時期	0	0	0	0	0	0	0	0	0
歐洲大陸 20 世紀	0	0	0	1	0	0	0	0	0
歐洲大陸戰後時期	0	0	0	0	0	0	0	0	0
北歐 20 世紀	0	0	0	0	0	0	0	0	0
北歐戰後時期	0	1	1	0	0	0	0	0	0

註 1: 表內數字 1 代表該分量下所偵測出來的變動時間點與考慮多個分量下所偵測出來的變動時間點相符合, 數字 0 則代表不符合。

時期、歐洲大陸戰後時期) 外, 其餘 8 個區域中, 發現中高分量 (第 0.4-0.9 分量) 支配整個結構性變動時間點的區域為 4 個, 分別為: 全世界 20 世紀、盎格魯薩克遜 20 世紀、亞洲 20 世紀、歐洲大陸 20 世紀, 其結論符合於高所得群體內, 位於中高分位數之群體支配整個高所得份額的結構改變, 也就是相對於低分量而言, 高分量的影響力相對較大, 換言之於中高分量所偵測到的結構變動點其斷裂程度相對於低分量較大。而沒有符合上述結論的區域有: 全世界戰後時期、盎格魯薩克遜戰後時期、北歐 20 世紀、北歐戰後時期。

若從戰後時期個別國家各個分量是否支配整個結構性變動點來看, 由表 17 可發現總共有 18 個國家, 扣除考慮多的分量下沒有偵測出結構變動點的 5 個國家 (西班牙、法國、德國、印度、新加坡) 外, 其餘 13 個國家當中有發現中高分量 (第 0.4-0.9 分量) 支配整個結構性變動時間點的國家多達 12 個, 僅美國並沒有特定分量支配整個結構性改變。

藉由圖 8 觀察戰後時期不同國家下不同分量所偵測出來的結構變動時間點, 歸納出大部分的結構變動時間點都發生於 1967-1993 年之間。

若將所有 18 個個別國家分不同區域來看, 見圖 9 發現盎格魯薩克遜地區結構變動時間點都發生於 1970-1990 年間。更細部的看個別國家愛爾蘭、美國、英國的結構變動時間點大多發生於 1977 年前, 而澳洲、加拿大與紐西蘭結構變動時間點多發生於 1980 年代以後, 發生結構改變點的時間相對較晚。北歐地區結構變動時間點發生於 1967-1993 年之間, 更細部的看個別國家除芬蘭變動時間點較不固定外, 挪威與瑞典的結構變動時間點在不同

表 17: 個別國家各個分量支配整個結構性變動點一覽表

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
西班牙	0	0	0	0	0	0	0	0	0
愛爾蘭	0	0	1	1	1	1	1	0	0
葡萄牙	0	0	0	0	0	1	1	0	0
澳洲	0	0	1	1	0	1	1	1	0
加拿大	0	0	0	1	0	0	0	0	0
瑞士	0	0	0	1	1	0	0	0	0
芬蘭	0	0	0	1	1	0	0	0	0
法國	0	0	0	0	0	0	0	0	0
德國	0	0	0	0	0	0	0	0	0
印度	0	0	0	0	0	0	0	0	0
日本	0	0	0	0	1	1	1	0	0
荷蘭	0	0	0	1	1	1	0	0	0
挪威	0	0	0	0	1	1	1	1	0
紐西蘭	0	0	0	0	0	1	1	1	0
新加坡	0	0	0	0	0	0	0	0	0
瑞典	0	0	0	0	0	0	1	1	0
英國	0	0	0	1	1	1	0	0	1
美國	0	0	0	0	0	0	0	0	0

註 1: 表內數字 1 代表該分量下所偵測出來的變動時間點與考慮多個分量下所偵測出來的變動時間點相符合, 數字 0 則代表不符合。

分量之間差異並不大。並且發現挪威的結構變動點相較於其他兩個北歐國家是較晚的。歐洲大陸地區不同國家結構變動時間點的發生並沒有太大的規律, 變動時間點集中在 1970-1980 間。亞洲國家地區各個國家之個別分量所偵測出來結構變動時間點差異不大, 結構變動時間點都發生於 1967-1997 年間。

5 結論

本文實證結果發現20世紀不同區域發生的結構變動時間點與過去文獻相當接近，於二次世界大戰期間，高所得份額產生趨勢向下的情形以及於1980年代附近，除歐洲大陸外其他區域都出現高所得份額趨勢由負向反轉為正向的情形。戰後時期分成不同區域以及個別國家來討論，戰後時期不同區域的結構變動時間點發生於1970年代中期至1980年代不等，除亞洲地區及歐洲大陸地區之外，高所得份額趨勢都出現由負向轉為正向的情形。戰後時期個別國家所發生的結構變動點，不同國家結構變動時間點不完全相同，大致來看，不是落於1970年代初期中期就是落於1980年代初期中期，除法國、德國、荷蘭之外，大部分國家時間趨勢都由負向趨勢轉為正向趨勢。

另外，驗證是否於高所得群體中，中高分位數所得群體支配整個結構性改變的議題上，實證研究20世紀不同區域（全世界國家、盎格魯薩克遜地區、北歐地區、歐洲大陸地區、亞洲地區）與戰後時期不同區域及個別國家之高所得份額趨勢變動，研究結果發現不同區域於20世紀及戰後時期扣除多個分量下沒有偵測出結構性改變的2個區域（亞洲戰後時期、歐洲大陸戰後時期），其餘8個區域中，發現中高分量支配整個結構性變動點的區域國家有4個（全世界20世紀、盎格魯薩克遜20世紀、亞洲20世紀、歐洲大陸20世紀），換言之有一半的區域支持高所得份額趨勢改變來自中高分量；戰後時期18個國家中，扣除多個分量下沒有偵測出結構性改變的5個國家（西班牙、法國、德國、印度、新加坡），其餘13個個別國家中，發現中高分量支配整個結構性改變的國家多達12國，僅美國沒有特定分量支配整個結構性改變。故分量迴歸下結構性改變檢定用於高所得份額趨勢變動探討支持高所得份額趨勢變動的主因來自所得分配中，較高分位數的群體。

附錄

附錄中的假設、引理、命題及其所對應的證明取自Qu(2008) 文中，並更完整清楚的詳述證明細節，Qu(2008) 提出兩種不同形式的檢定統計量均可用於給定分量 $\tau \in (0, 1)$ 下結構性變動的檢定，分別為 Subgradient based 檢定以及 Wald 檢定，為求得極限分配，在虛無假設之下給出下面假設，並且為了簡化符號，將 $f_t(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $f_t(\cdot)$ ， $F_t(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $F_t(\cdot)$ ， $F_t^{-1}(\cdot|x_t)$ 縮寫為 $F_t^{-1}(v)$ ，假設如下：

假設 A. 1. 分配函數 $F_t(\cdot)$ 有連續的密度函數 $f_t(\cdot)$ 並且在定義域內各個點 $F_t^{-1}(\tau)$ ， $t = 1, 2, \dots, T$ 上，其對應的函數值在 θ 到 ∞ 之間均勻有界。

假設 A. 2. 對於任何 $\epsilon > 0$ ，並定存在一個 $\sigma(\epsilon) > 0$ ，使得 $|f_t(F_t^{-1}(\tau)+s) - f_t(F_t^{-1}(\tau))| < \epsilon$ 對於所有的 $|s| < \sigma(\epsilon)$ 以及 $1 \leq t \leq T$ 。

假設 A. 3. 解釋變數滿足下面的假設：

- (a) 解釋變數含有截距項；
- (b) $p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^{\lfloor \lambda T \rfloor} f_t(F_t^{-1}(\tau)) x_t x_t' \xrightarrow{p} \lambda H_0$ 對於所有的 $\lambda \in [0, 1]$ ；
- (c) 對於某些 $\varphi > 0$ 及 $L < \infty$ ，在所有的 $t = 1, \dots, T$ 下， $E(x_t' x_t)^{2+\varphi} < L$ 均成立；
- (d) 存在一個 $\delta > 0$ 以及 $M < \infty$ 使得 $T^{-1} \sum_{t=1}^n E \|x_t\|^{3(1+\delta)} < M$ 與 $E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \|x_t\|^3)^{(1+\delta)} < M$ 在任意 T 之下都成立；
- (e) $p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^{\lfloor \lambda T \rfloor} x_t x_t' \xrightarrow{p} \lambda J_0$ 對於所有的 $\lambda \in [0, 1]$ ，其中 J_0 是一個 $p \times p$ 的非隨機正定矩陣。

推導 $H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau))$ 的極限分配且為一 nuisance parameter free 如下式所示：

$$H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda\tau(1-\tau)).$$

Proof. 首先

$$\begin{aligned}
H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau)) &= (T^{-1}X'X)^{-\frac{1}{2}}S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) \\
&= (T^{-1}X'X)^{-\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau)) \\
&= (X'X)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau)).
\end{aligned}$$

再來計算 $H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau))$ 的期望值與變異數如下所示:

$$\begin{aligned}
E\left(H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau))\right) &= E\left((X'X)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau))\right) \\
&= E\left[(X'X)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_tE\left(\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau))|x\right)\right] \\
&= 0. \\
\text{Var}\left(H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau))\right) &= V\left((X'X)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau))\right) \\
&= \left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} V\left(x_t\psi_\tau(y_t - x'_t\beta_0(\tau))\right)\left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} E\left(x_t x'_t \psi_\tau^2(y_t - x'_t\beta_0(\tau))\right)\left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} E\left(x_t x'_t E\left(\psi_\tau^2(y_t - x'_t\beta_0(\tau))|x\right)\right)\left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}}(\tau(1-\tau))\sum_{t=1}^{[\lambda T]} E(x_t x'_t)\left(\sum_{t=1}^T x_t x'_t\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (T^{-1}\sum_{t=1}^T x_t x'_t)^{-\frac{1}{2}}(\tau(1-\tau))(T^{-1}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} E(x_t x'_t))(T^{-1}\sum_{t=1}^T x_t x'_t)^{-\frac{1}{2}} \\
&\stackrel{d}{\rightarrow} J_0^{-\frac{1}{2}}(\tau(1-\tau))(\lambda J_0)J_0^{-\frac{1}{2}} \\
&= \lambda\tau(1-\tau).
\end{aligned}$$

由中央極限定理 (central limit theorem; CLT) 可知:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau))\right)^{-\frac{1}{2}}\left(H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau)) - 0\right) &\xrightarrow{d} N(0, I), \\ \Rightarrow H_{\lambda,T}(\beta_0(\tau)) &\xrightarrow{d} \lambda^{\frac{1}{2}}(\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}}N(0, 1), \\ &= N(0, \lambda\tau(1-\tau)). \end{aligned}$$

□

證明 $p\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{V}(\lambda, \tau) = (\tau(1-\tau))\left\{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right\}\Omega_0$, 及 $T\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 流程如下:

Proof. 分量迴歸下估計參數 $\hat{\beta}(\tau)$ 的極限分配為:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)) \xrightarrow{d} N\left(0, \tau(1-\tau)G(\beta(\tau))^{-1}M_{xx}G(\beta(\tau))^{-1}\right),$$

其中

$$\begin{aligned} G(\beta(\tau)) &= -E[f_t(y_t|x_t)x_t x_t'], \\ M_{xx} &= E[x_t x_t']. \end{aligned}$$

故 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 極限分配為:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) \xrightarrow{d} N\left(0, \tau(1-\tau)E[f_t(y_t|x_t)x_t x_t']^{-1}E[x_t x_t']E[f_t(y_t|x_t)x_t x_t']^{-1}\right),$$

則 $\sqrt{T}\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 變異數為:

$$\begin{aligned} &\text{Var}(\sqrt{T}\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \\ &= \tau(1-\tau)\left(T^{-1}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} f_t(y_t|x_t)x_t x_t'\right)^{-1}\left(T^{-1}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t x_t'\right)\left(T^{-1}\sum_{t=1}^{[\lambda T]} f_t(y_t|x_t)x_t x_t'\right)^{-1} \\ &\xrightarrow{d} \tau(1-\tau)(\lambda H_0)^{-1}(\lambda J_0)(\lambda H_0)^{-1} \\ &= \tau(1-\tau)\frac{1}{\lambda}H_0^{-1}J_0H_0^{-1} \\ &= \tau(1-\tau)\frac{1}{\lambda}\Omega_0. \end{aligned}$$

另外 $\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)$ 的極限分配則使用同樣的方法即可求得如下:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) \xrightarrow{d} N\left(0, \tau(1-\tau)E[f_t(y_t|x_t)x_t x_t']^{-1}E[x_t x_t']E[f_t(y_t|x_t)x_t x_t']^{-1}\right),$$

則 $\sqrt{T}\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)$ 的變異數為:

$$\begin{aligned} & \text{Var}(\sqrt{T}\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)) \\ &= \tau(1-\tau)\left(T^{-1}\sum_{t=[\lambda T]+1}^T f_t(y_t|x_t)x_t x_t'\right)^{-1}\left(T^{-1}\sum_{t=[\lambda T]+1}^T x_t x_t'\right)\left(T^{-1}\sum_{t=[\lambda T]+1}^T f_t(y_t|x_t)x_t x_t'\right)^{-1} \\ &\xrightarrow{d} \tau(1-\tau)[(1-\lambda)H_0]^{-1}[(1-\lambda)J_0][(1-\lambda)H_0]^{-1} \\ &= \tau(1-\tau)\frac{1}{(1-\lambda)}H_0^{-1}J_0H_0^{-1} \\ &= \tau(1-\tau)\frac{1}{(1-\lambda)}\Omega_0. \end{aligned}$$

因此可推得:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \text{Var}(\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)) = \text{Var}(\sqrt{T}\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \sqrt{T}\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \\ &= \text{Var}(\sqrt{T}\hat{\beta}_2(\lambda, \tau)) + \text{Var}(\sqrt{T}\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) - 2\text{Cov}(\sqrt{T}\hat{\beta}_2(\lambda, \tau), \sqrt{T}\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \\ &\xrightarrow{d} \tau(1-\tau)\left\{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(1-\lambda)}\right\}\Omega_0 = V_0. \end{aligned}$$

式 (5) 已證明完成。再來推導 Wald 檢定統計量, 首先 $\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 期望值為 0 與變異數為 \hat{V} , 由中央極限定理(Central limit theorem; CLT) 可知:

$$\begin{aligned} & \text{Var}(\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau))^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) - 0) \xrightarrow{d} N(0, I_p) \\ & \Rightarrow \hat{V}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) \xrightarrow{d} N(0, I_p) \end{aligned}$$

取內積可得 Wald 檢定統計量:

$$T\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)'\hat{V}^{-1}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) \xrightarrow{d} \chi^2(I_p).$$

□

為推導下面命題中兩種檢定統計量 SQ_τ 以及 SW_τ 的極限分配, 給出一些引理輔以證明所需如下所示:

引理 1. 假設虛無假設為真並且假設 1 到 3 均成立, 則:

1. 對於 $\lambda \in \Lambda_\epsilon$ 並且 n 足夠大, 則 $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\lambda, \tau) + o_p(1)$, 其中 $Z_T(\lambda, \tau) = \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau))$, $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 為使用樣本期間從 1 到 $[\lambda T]$, $\beta_0(\tau)$ 的估計值, 並且 $H_0 = p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T f_t(F_t^{-1}(\tau)) x_t x_t'$.
2. 對於 $\lambda \in [0, 1]$ 並且 n 足夠大, 則 $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}(\tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\tau) + o_p(1)$, 其中 $Z_T(\tau) = \sqrt{T}(\hat{\beta}(\tau) - \beta_0(\tau))$, 且 $\hat{\beta}(\tau)$ 為使用所有樣本期間, $\beta_0(\tau)$ 的估計值。

Proof. 引理 1.1 與 1.2 證明流程相同, 首先證明引理 1.1, 根據假設 1 到 3, 隱含對於所有 $\lambda \in \Lambda_\epsilon$, $Z_T(\lambda, \tau) \equiv \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) = O_p(1)$, 因此 $Z_T(\lambda, \tau)$ 滿足 $\|Z_T(\lambda, \tau)\| \leq p$, 其中 p 為一有限的常數。令 δ 是一個維度為 p 的向量並且滿足 $\|\delta\| \leq p$, 在根據 Gutenbrunner and Jureckova(1992) 的 (A.1) 得到:

$$\begin{aligned} & S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}\delta) \\ &= S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}\delta) - S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &+ T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{F_t(x_t' \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta) - \tau\} \\ &+ S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)). \end{aligned} \quad (9)$$

式 (8) 由 Bai(1996) 頁 617-618 可知其為 $o_p(1)$ 對於所有 $\|\delta\| \leq p$ 及 $\lambda \in [0, 1]$ 。而對於式 (9) 而言, $\tau = F_t(F_t^{-1}(\tau)) = F_t(x_t' \beta_0(\tau))$, 透過中間值定理 (mean value theorem) 隱含:

$$\begin{aligned} & T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{F_t(x_t' \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta) - \tau\} \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{F_t(x_t' \beta_0(\tau)) + f_t(x_t' \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta^*)(T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta) - \tau\} \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} f_t(x_t' \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta^*) x_t x_t' \delta, \end{aligned}$$

其中 $\|\delta^*\| \leq \|\delta\|$ 。使用假設 A.2. 及 $\max_{1 \leq t \leq T} T^{-\frac{1}{2}} \|x_t\| = o_p(1)$, 則

$$f_t(x_t' \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} x_t' \delta^*) = f_t(x_t' \beta_0(\tau)) + o_p(1),$$

對於所有 $\|\delta\| \leq p$ 及 $1 \leq t \leq T$ 。因此式 (9) 變為:

$$T^{-1} \sum_{t=1}^{[T]} f_t(x_t' \beta_0(\tau)) x_t x_t' \delta + o_p(1),$$

使用假設 A.3.(b) 則上式則寫為 $\lambda H_0 \delta + o_p(1)$ 。綜觀以上結果推得:

$$S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} \delta) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 \delta + o_p(1).$$

再由

$$Z_T(\lambda, \tau) = \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)),$$

經過移項可得:

$$\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) = \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} Z_T(\lambda, \tau),$$

將 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 取代 $\beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} \delta$, 則推得 $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau))$ 為:

$$S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\lambda, \tau) + o_p(1),$$

而引理 1.2 證明同上, 將 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 取代成 $\hat{\beta}(\tau)$, 即可得到:

$$S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}(\tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\tau) + o_p(1).$$

□

檢定統計量 SQ_τ 以及 SW_τ 的極限分配如下面命題:

命題 1. 假設虛無假設為真, 假設 1 到 3 成立, 則:

1. $SQ_\tau \Rightarrow \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B_p(\lambda)\|_\infty$, 其中 B_p 為一個維度為 p 定義在 $[0, 1]$ 上彼此相互獨立的 *Brownian bridge processes*。
2. $SW_\tau \Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B_p(\lambda)\|^2}{\lambda(1-\lambda)}$.

Proof. 首先證明命題 1.1, SQ_τ 的極限分配, 應用引理 1.2:

$$\begin{aligned}
& T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}(\tau)) - \lambda T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}(\tau)) \\
&= T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \beta_0(\tau)) - \lambda T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \beta_0(\tau)) + o_p(1) \\
&\Rightarrow (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} J_0^{\frac{1}{2}} [W_p(\lambda) - \lambda W_p(1)],
\end{aligned}$$

其中 $W_p(\cdot)$ 是一個維度為 p 彼此獨立的 Wiener processes, 又因為 $T^{-1}X'X \xrightarrow{p} J_0$, 因此可推得 SQ_τ 的極限分配為:

$$\begin{aligned}
& SQ_\tau \\
&= \sup_{\lambda \in [0,1]} \|(\tau(1-\tau))^{-\frac{1}{2}} [H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau))]\|_\infty \\
&= \sup_{\lambda \in [0,1]} \|(\tau(1-\tau))^{-\frac{1}{2}} [(T^{-1}X'X)^{-\frac{1}{2}} \times T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}(\tau)) \\
&\quad - \lambda (T^{-1}X'X)^{-\frac{1}{2}} \times T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}(\tau))]\|_\infty \\
&\Rightarrow \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B_p(\lambda)\|_\infty.
\end{aligned}$$

SW_τ 的極限分配也就是命題 1.2 的證明, 為證明所需, 下面的不等式結果成立:

$$\begin{aligned}
\|S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau))\| &= \left\| T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \psi_\tau(y_t - x_t' \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \right\| \\
&\leq \left\| T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \mathbf{1}(y_t = x_t' \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \right\| \\
&\leq p T^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq t \leq T} \|x_t\| \xrightarrow{p} 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

先應用引理 1.1, 並且使用式 (10) 的結果可推得:

$$\begin{aligned}
\sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) &= -[\lambda H_0]^{-1} S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + o_p(1) \\
&\Rightarrow (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} W_p(\lambda).
\end{aligned} \tag{11}$$

同樣的,

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) &= -[(1 - \lambda)H_0]^{-1}S_T((1 - \lambda), \tau, \beta_0(\tau)) + o_p(1) \\ &\Rightarrow (\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}}(1 - \lambda)^{-1}\Omega_0^{\frac{1}{2}}(W_p(1) - W_p(\lambda)).\end{aligned}\quad (12)$$

合併 (11) 及 (12) 式則可得到:

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) &= \sqrt{T}(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) \\ &\Rightarrow (\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1 - \lambda)}(W_p(1) - W_p(\lambda)) - \frac{1}{\lambda}W_p(\lambda)\right] \\ &= (\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda W_p(1) - \lambda W_p(\lambda) - (1 - \lambda)W_p(\lambda)}{\lambda(1 - \lambda)}\right] \\ &= -(\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}[\lambda(1 - \lambda)]^{-1}(W_p(\lambda) - \lambda W_p(1)).\end{aligned}$$

再由式 (5) 已知:

$$\hat{V}(\lambda, \tau) \xrightarrow{p} \tau(1 - \tau)\left\{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(1 - \lambda)}\right\}\Omega_0,$$

因此可推得 SW_τ 的極限分配:

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} T\Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta\hat{\beta}(\lambda, \tau) \\ &\Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{(W_p(\lambda) - \lambda W_p(1))'(W_p(\lambda) - \lambda W_p(1))}{\lambda(1 - \lambda)} \\ &= \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B_p(\lambda)\|^2}{\lambda(1 - \lambda)}.\end{aligned}$$

□

接下來為推導多個分量下檢定統計量 DW 及 DQ 之極限分配所需, 給出假設及引理:

假設 A. 4. 假設 A.1., A.2., A.3. 在 $\tau \in T_\omega$ 均成立。

假設 A. 5. 存在一個隨機變數 Y_T 以及一個常數 $\kappa(0 < \kappa < 1/2)$ 使得對於所有 $0 \leq s_0 \leq s \leq 1$,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=[s_0 T]}^{[sn]} \|x_t\| \leq (s - s_0)Y_T n^\kappa, \quad (13)$$

此外, 對於 $\rho > 2$ 以及 $M < \infty$, $P(|Y_T| > C) < M/C^\rho$ 。

假設 A. 6. 存在一個 $\gamma > 1$, $\alpha > 1$ 以及 $p < \infty$ 使得對於所有 $0 \leq u \leq v \leq 1$ 以及 T , $T^{-1} \sum_{t=[un]}^{[vn]} E(x'_t x_t)^\gamma \leq p(v-u)$, $E(T^{-1} \sum_{t=[un]}^{[vn]} x'_t x_t)^\gamma \leq p(v-u)^\alpha$, 其中 α 的選取則是由 (13) 式得到 κ 及 $(\gamma-1)/(\alpha-1) > 1 + 2\kappa$.

接下來先定義符號:

$$S_T(\lambda, \tau, b) = T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{1(y_t - x'_t b \leq 0) - \tau\},$$

$$S_T^d(\lambda, \tau, b) = T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{1(y_t - x'_t b \leq 0) - F_t(x'_t b)\}.$$

而 $S_T(\lambda, \tau, b)$ 與 $S_T^d(\lambda, \tau, b)$ 個關係如下:

$$S_T(\lambda, \tau, b) = S_T^d(\lambda, \tau, b) + T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{F_t(x'_t b) - \tau\}.$$

有符號定義後, 下述兩個敘述將扮演證明引理 2 以及命題 2 所需之元素, 分別如下所示: 第一、令 $\Phi = [0, 1] \times [0, 1]$ 為參數集合, 定義距離 (metric) $\rho(\{\lambda_1, \tau_1\}, \{\lambda_2, \tau_2\}) = |\lambda_2 - \lambda_1| + |\tau_2 - \tau_1|$. 在假設 4-6 之下, process $S_T(\lambda, \tau)$ 在 (Φ, ρ) 上是隨機連續 (stochastically equicontinuous). 對於任意 $\epsilon > 0$, $\eta > 0$, 存在一個 $\delta > 0$ 使得在 n 很大之下,

$$P \left\{ \sup_{[\delta]} \|S_T(\lambda_1, \tau_1, \beta_0(\tau_1)) - S_T(\lambda_2, \tau_2, \beta_0(\tau_2))\| > \eta \right\} < \epsilon,$$

其中 $[\delta] = \{(s_1, s_2) \in \Phi; s_1 = \{\lambda_1, \tau_1\}; s_2 = \{\lambda_2, \tau_2\}; \rho(s_1, s_2) < \delta\}$. 第二、令 D 為一個任意 R^p 上的緊集合, 在假設 4-6 之下得到:

$$\sup_{\tau \in T_\omega^*} \sup_{\lambda \in [0, 1]} \sup_{\psi \in D} \|S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + T^{-\frac{1}{2}} \psi - S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau))\| = o_p(1),$$

其中 $T_\omega^* = [\omega_1, \omega_2]$, $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$. 已知上述兩種式子的關係, 接下來即可證明引理 2.

引理 2. 虛無假設為真並且假設 A.4. 到 A.6. 成立, 則:

1. 對於 $(\lambda, \tau) \in \Lambda_\epsilon \times T_\omega$ 及夠大的 T , $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\lambda, \tau) + o_p(1)$, 其中 $Z_T(\lambda, \tau) = \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau))$, 其中 $\hat{\beta}_1(\lambda, \tau)$ 為使用樣本期間從 1 到 $[\lambda T]$, $\beta_0(\tau)$ 的估計值, 並且 $H_0 = p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T f_t(F_t^{-1}(\tau)) x_t x'_t$.

2. 對於 $(\lambda, \tau) \in [0, 1] \times T_\omega$ 及夠大的 T , $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}(\tau)) = S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda H_0 Z_T(\tau) + o_p(1)$, 其中 $Z_T(\tau) = \sqrt{T}(\hat{\beta}(\tau) - \beta_0(\tau))$, 其中 $\hat{\beta}(\tau)$ 為使用所有樣本期間 $\beta_0(\tau)$ 的估計值。

Proof. 引理 2.1 及 2.2 均使用同樣的證明方式, 這邊說明引理 2.1 的證明。首先必須證明在假設 4-6 之下, 對於所有的 $(\lambda, \tau) \in \Lambda_\epsilon \times T_\omega$,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) = O_p(1). \quad (14)$$

由於 $\|S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\tau, \lambda))\| = o_p(1)$, 式 (14) 會成立當對於任意的 $\epsilon > 0$, 存在一個 $p_0 > 0$, $N_0 > 0$ 以及 $\eta > 0$, 使得當 $\|\sqrt{T}(\beta^*(\tau) - \beta_0(\tau))\| > p_0$,

$$P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \|S_T(\lambda, \tau, \beta^*(\tau))\| < \eta\right\} < \epsilon, \quad \forall T > N_0. \quad (15)$$

為了證明式 (15), 先令 $\beta^*(\tau)$ 等於 $\beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te$, 其中 $t = \|\beta^*(\tau) - \beta_0(\tau)\|$, $e = (\beta^*(\tau) - \beta_0(\tau)) / \|\beta^*(\tau) - \beta_0(\tau)\|$, 其中 $e \in R^p$ 並且 $\|e\| = 1$ 。根據柯西施瓦茲 (Cauchy-Schwarz) 不等式得到 $|e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)| \leq \|S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)\| * \|e\|$, 則下面式子成立:

$$\begin{aligned} & P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \|S_T(\lambda, \tau, \beta^*(\tau))\| < \eta\right\} \\ &= P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \|S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)\| * \|e\| < \eta\right\} \\ &\leq P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)| < \eta\right\}. \end{aligned}$$

其中第二式跳到第三式的不等式則取決於兩者個別所屬的集合大小決定, 進而決定機率的大小, 也就是因為第二式裡面所屬的集合小於等於第三式裡面所屬的集合大小, 因此不等式會成立。接下來下列的式子 (16) 成立間接證明式 (15),

$$P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)| < \eta\right\} < \epsilon, \quad \forall T > N_0. \quad (16)$$

由於 $e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}te)$ 是個非遞減函數, 便足夠說明對於任意單位向量 e , 當 $t \geq p_0$ 並且將 p_0 取代 t , 式 (15) 仍然會成立, 也就是變為下列的式子:

$$P\left\{\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| < \eta\right\} < \epsilon, \quad \forall T > N_0. \quad (17)$$

現在專注於式 (17), 若將 $\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| < \eta$ 看作事件 A, 另外則把 $\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| \geq 2\eta$ 看作事件 B, 則

$$P\{A\} \leq P\{A, B\} + P\{B'\}.$$

上面式子性質的說明如下, 首先將右式減去左式並且經過整理可得: $P\{A, B\} + P\{B'\} - P\{A\} = (P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}) + (1 - P\{B\}) - P\{A\} = 1 - P\{A \cap B\}$, 由機率公理可知機率大小必定大於等於0小於等於1, 因此判定 $1 - P\{A \cap B\}$ 必然大於等於0, 故不等式 (17) 的左邊則會小於等於:

$$P\left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| < \eta, \right. \\ \left. \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| \geq 2\eta \right\} \quad (18)$$

$$+ P\left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| < 2\eta \right\}. \quad (19)$$

對於式 (18) 而言, 先找到所在集合內的關係式:

$$\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| < \eta < 2\eta \leq \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e|,$$

由於

$$\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| - 2\eta \geq 0, \\ \eta - \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| > 0,$$

將上面兩條不等式相加則得到:

$$\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| - \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| \geq \eta.$$

因此式 (18) 轉變為下面的關係式:

$$P\left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e'H_0p_0e| - \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e'S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}}p_0e)| \geq \eta \right\}.$$

再應用不等式條件: 對於任意實數函數 $A(\tau, \lambda)$ 以及 $B(\tau, \lambda)$,

$$\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |B(\tau, \lambda)| - \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |A(\tau, \lambda)| \leq \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} ||B(\tau, \lambda)| - |A(\tau, \lambda)|| \\ \leq \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |B(\tau, \lambda) - A(\tau, \lambda)|,$$

則隱含式 (18) 會小於等於:

$$P \left\{ \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e' H_0 p_0 e - e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e)| \geq \eta \right\} \quad (20)$$

根據 $S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e)$ 定義得到:

$$\begin{aligned} & e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e) \\ &= e' S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e) + T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} e' x_t \{F_t(x_t \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 x_t' e) - \tau\}. \end{aligned}$$

也隱含式 (20) 裡的項目變為:

$$\begin{aligned} & e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e' H_0 p_0 e - e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e) \\ &= e' S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) - e' S_T^d(\lambda, \tau, \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 e) \end{aligned} \quad (21)$$

$$+ \lambda e' H_0 p_0 e - T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} e' x_t \{F_t(x_t \beta_0(\tau) + T^{-\frac{1}{2}} p_0 x_t' e) - \tau\}. \quad (22)$$

根據前述已知, 式 (21) 為 $o_p(1)$ 對於所有 $\tau \in T_\omega$, $\lambda \in \Lambda_\epsilon$, 另外將式 (22) 泰勒展開其亦為 $o_p(1)$ 。則對於很大的 T , 式 (20) 為任意微小數, 故式 (18)(19) 變為:

$$P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + \lambda e' H_0 p_0 e| < 2\eta \right\} + o_p(1),$$

這邊令 $C = e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau))$ 以及 $D = \lambda e' H_0 p_0 e$ 堆得:

$$\begin{aligned} & P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |D - (-C)| < 2\eta \right\} \\ & \leq P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |D| - \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |-C| < 2\eta \right\} \end{aligned}$$

上述不等式成立則是使用 $|A - B| \geq |A| - |B|$ 的結果, 其說明如下: 根據三角不等式可知 $|A + B| \leq |A| + |B|$, 令 $A = A - B$, $B = B$, 帶入上式可得 $|A - B + B| \leq |A - B| + |B|$ 得到 $|A - B| \geq |A| - |B|$ 。接下來將上面等式做移項的動作又等於:

$$\begin{aligned} & P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |D| - 2\eta < \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |-C| \right\} \\ &= P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |D| - 2\eta < \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |C| \right\} \\ & \leq P \left\{ \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |D| - 2\eta < \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |C| \right\}, \end{aligned}$$

因此推得式 (18)(19) 會小於等於:

$$P \left\{ \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau))| > -2\eta + p_0 \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \lambda e' H_0 e \right\}.$$

根據前述已知, 對於任意 $\epsilon > 0$, 存在一個 p' 使得當 T 足夠大, $e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau))$

$$P \left\{ \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} |e' S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau))| > p' \right\} < \epsilon. \quad (23)$$

同樣的, $\inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \lambda e' H_0 e$ 是 0 到 ∞ 有界, 因此選擇一個 p_0 使得:

$$p_0 \inf_{\tau \in T_\omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \lambda e' H_0 e > p' + 2\eta. \quad (24)$$

結合式 (23)(24), 選擇適當的 p_0 使得式 (19) 為任意微小數。縱綜觀以上一長串式子的處理, 其目的僅為了證明式 (16) 成立, 在間接說明式 (10), 也說明 $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1)$ 的收斂性。

再由先前所建立的 $Z_T(\lambda, \tau) \equiv \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) = O_p(1)$, S_T 的定義並且經過一加一減得到:

$$\begin{aligned} S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) &= S_T^d(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) - S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) \\ &+ S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{ F_t(x_t' \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) - \tau \}. \end{aligned}$$

對於所有的 $\tau \in T_\omega$, $\lambda \in \Lambda_\epsilon$, 由前述已知隱含 $S_T^d(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) - S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) = o_p(1)$ 。假設 A.4. 以及中間值定理也隱含 $T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} x_t \{ F_t(x_t' \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) - \tau \} = \lambda H_0 Z_T(\lambda, \tau) + o_p(1)$ 。 □

下面命題說明 DQ 及 DW 兩種檢定統計量的極限分配:

命題 2. 虛無假設為真並且假設 A.4. 到 A.6. 成立, 則:

1. $DQ = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B(\lambda, \tau)\|_\infty,$
2. $DW = \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B(\lambda, \tau)\|^2}{\lambda(1-\lambda)\tau(1-\tau)}.$

Proof. 首先先證明 DQ 的收斂性, 應用引理 2.2:

$$\begin{aligned} & T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[λT]} x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \hat{\beta}(\tau)) - \lambda T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \hat{\beta}(\tau)) \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[λT]} x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \beta_0(\tau)) - \lambda T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \beta_0(\tau)) + o_p(1) \end{aligned}$$

將 λ 及 τ 視為一個 process, 則第一項滿足:

$$T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[λT]} x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \beta_0(\tau)) \Rightarrow J_0^{\frac{1}{2}} W_p^*(\lambda, \tau),$$

第二項則滿足:

$$T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T x_t \psi_\tau(y_t - x'_t \beta_0(\tau)) \Rightarrow J_0^{\frac{1}{2}} W_p^*(1, \tau),$$

其中 $W_p^*(\lambda, \tau) = (W_{p,1}^*(\lambda, \tau), \dots, W_{p,p}^*(\lambda, \tau))'$ 為一個維度為 p 的獨立雙參數 Gaussian process 並且 $E(W_{p,t}^*(\lambda_1, \tau_1) W_{p,t}^*(\lambda_2, \tau_2)) = (\lambda_1 \wedge \lambda_2)(\tau_1 \wedge \tau_2 - \tau_1 \tau_2)$ 。再使用 $(X'X/T)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{p} J_0^{-\frac{1}{2}}$, 則可得到:

$$\begin{aligned} DQ &= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|H_{\lambda,T}(\hat{\beta}(\tau)) - \lambda H_{1,T}(\hat{\beta}(\tau))\|_\infty \\ &\Rightarrow \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} J_0^{-\frac{1}{2}} J_0^{\frac{1}{2}} \|W_p^*(\lambda, \tau) - \lambda W_p^*(1, \tau)\|_\infty \\ &= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|B(\lambda, \tau)\|_\infty. \end{aligned}$$

接下來證明 DW 的收斂性, 應用引理 2.1 並且已知 $S_T(\lambda, \tau, \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) = o_p(1)$, 則可得到:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\beta}_1(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) &= -\lambda^{-1} H_0^{-1} S_T(\lambda, \tau, \beta_0(\tau)) + o_p(1) \\ &\Rightarrow \lambda^{-1} H_0^{-\frac{1}{2}} H_0^{-\frac{1}{2}} J_0^{\frac{1}{2}} W_p^*(\lambda, \tau) \\ &= \lambda^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} W_p^*(\lambda, \tau). \end{aligned}$$

同樣的,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) \Rightarrow (1 - \lambda)^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} (W_p^*(1, \tau) - W_p^*(\lambda, \tau)).$$

結合上面兩式可得到:

$$\begin{aligned}
\sqrt{T}(\hat{\beta}_2(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_1(\lambda, \tau)) &\Rightarrow (1 - \lambda)^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} (W_p^*(1, \tau) - W_p^*(\lambda, \tau)) - \lambda^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} W_p^*(\lambda, \tau) \\
&= \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\lambda} W_p^*(1, \tau) - \frac{1}{\lambda(1 - \lambda)} W_p^*(\lambda, \tau) \right] \\
&= \Omega_0^{\frac{1}{2}} [\lambda(1 - \lambda)]^{-1} (\lambda W_p^*(1, \tau) - W_p^*(\lambda, \tau)).
\end{aligned}$$

再結合式 (5) $\hat{V} \xrightarrow{p} V_0 = (\tau(1 - \tau)) \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(1 - \lambda)} \Omega_0 \right\}$ 則推得:

$$\begin{aligned}
DW &= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} T \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau)' \hat{V}(\lambda, \tau)^{-1} \Delta \hat{\beta}(\lambda, \tau) \\
&= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \Omega_0^{\frac{1}{2}} [\lambda(1 - \lambda)]^{-1} (\lambda W_p^*(1, \tau) - W_p^*(\lambda, \tau)) \\
&\quad \times (\tau(1 - \tau))^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(1 - \lambda)} \Omega_0 \right\}^{-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}} [\lambda(1 - \lambda)]^{-1} (\lambda W_p^*(1, \tau) - W_p^*(\lambda, \tau))' \\
&= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{(W_p^*(\lambda, \tau) - \lambda W_p^*(1, \tau)) (W_p^*(\lambda, \tau) - \lambda W_p^*(1, \tau))'}{\tau(1 - \tau) \lambda(1 - \lambda)} \\
&= \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon} \frac{\|B(\lambda, \tau)\|^2}{\lambda(1 - \lambda) \tau(1 - \tau)}.
\end{aligned}$$

□

多個結構性改變檢定下, 給出虛無假設為真時, $SW_\tau(m)$ 、 $SSW_\tau(M)$ 及 $DW(m)$ 、 $SDW(M)$ 檢定統計量的極限分配如下列命題所示:

命題 3. 在虛無假設為真之下:

1. 假設 A.1.-A.3. 成立時,

$$\begin{aligned}
SW_\tau(m) &\Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j)\|^2}{\lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \\
SSW_\tau(M) &\Rightarrow \max_{1 \leq m \leq M} a_m \left\{ \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j)\|^2}{\lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \right\},
\end{aligned}$$

2. 假設 A.4.-A.6. 成立時,

$$\begin{aligned}
DW(m) &\Rightarrow \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}, \tau) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j, \tau)\|^2}{\tau(1 - \tau) \lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \\
SDW(M) &\Rightarrow \max_{1 \leq m \leq M} b_m \left\{ \sup_{\tau \in T_\omega} \sup_{\lambda \in \Lambda_\epsilon(m)} \sum_{j=1}^m \frac{\|\lambda_j B_p(\lambda_{j+1}, \tau) - \lambda_{j+1} B_p(\lambda_j, \tau)\|^2}{\tau(1 - \tau) \lambda_j \lambda_{j+1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \right\}.
\end{aligned}$$

Proof. 命題3.1及3.2證明同步驟, 因此僅證明3.1的部分. 令 A 為一個 $m \times m$ 矩陣且該矩陣內的元素除了第 (j, j) 個以及第 $(j, j-1)$ 個之外, 其餘元素均為0的下三角矩陣並且令第 (j, j) 個元素為 $A_{j,j}$, 第 $(j, j-1)$ 個元素為 $A_{j,j-1}$, 其定義分別如下:

$$A_{j,j} = \frac{1}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$A_{j,j-1} = -\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})}, \quad j = 2, \dots, m.$$

由於矩陣 A 為非奇異 (nonsingular) 矩陣, 則

$$\begin{aligned} & T\hat{\beta}(\lambda, \tau)'R'(R\hat{S}(\lambda, \tau)R')^{-1}R\hat{\beta}(\lambda, \tau) \\ &= T\hat{\beta}(\lambda, \tau)'R'(A^{-1} \otimes I_p)'((A^{-1} \otimes I_p)R\hat{S}(\lambda, \tau)R'(A^{-1} \otimes I_p))^{-1}(A^{-1} \otimes I_p)R\hat{\beta}(\lambda, \tau). \end{aligned}$$

為了證明其極限分配, 必須先得出 $(A^{-1} \otimes I_p)\sqrt{T}R\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 及 $((A^{-1} \otimes I_p)R)\hat{S}(\lambda, \tau)((A^{-1} \otimes I_p)R)'$ 的極限分配。

對於 $(A^{-1} \otimes I_p)\sqrt{T}R\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 來說, 當 $j = 1, \dots, m+1$, 引理1隱含:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_j(\lambda, \tau) - \beta_0(\tau)) \Rightarrow (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{W_p(\lambda_j) - W_p(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}}\right).$$

因此可推得:

$$\begin{aligned} & \sqrt{T}(\hat{\beta}_j(\lambda, \tau) - \hat{\beta}_{j+1}(\lambda, \tau)) \\ & \Rightarrow (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{W_p(\lambda_j) - W_p(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} - \frac{W_p(\lambda_{j+1}) - W_p(\lambda_j)}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right) \\ & = (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}}\Omega_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{W_p(\lambda_j)[\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)] - W_p(\lambda_{j-1})[\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})}\right. \\ & \quad \left. - \frac{W_p(\lambda_{j+1})[\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})] - W_p(\lambda_j)[\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{W_p(\lambda_j) [\lambda_{j+1}\lambda_j - \lambda_{j+1}\lambda_{j-1} - \lambda_j\lambda_j + \lambda_j\lambda_j + \lambda_{j-1}\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}\lambda_j]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{W_p(\lambda_{j-1}) [\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)] - W_p(\lambda_{j+1}) [\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right) \\
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{W_p(\lambda_j) [\lambda_{j+1}(\lambda_j - \lambda_{j-1})] - W_p(\lambda_{j+1}) [\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{W_p(\lambda_{j-1}) [\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)] + W_p(\lambda_j) [\lambda_{j-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right) \\
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{W_p(\lambda_j)\lambda_{j+1} - W_p(\lambda_{j+1})\lambda_j}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} - \frac{W_p(\lambda_{j-1})\lambda_j - W_p(\lambda_j)\lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1}(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right) \\
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_{j+1} [W_p(\lambda_j) - \lambda_j W_p(1)] - \lambda_j [W_p(\lambda_{j+1}) - \lambda_{j+1} W_p(1)]}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_j [W_p(\lambda_{j-1}) - \lambda_{j-1} W_p(1)] - \lambda_{j-1} [W_p(\lambda_j) - \lambda_j W_p(1)]}{\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right) \\
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} \Omega_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_{j+1} B_p(\lambda_j) - \lambda_j B_p(\lambda_{j+1})}{\lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} - \frac{\lambda_j B_p(\lambda_{j-1}) - \lambda_{j-1} B_p(\lambda_j)}{\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})} \right).
\end{aligned}$$

定義 $\mathbf{B}_p(\lambda)$ 如下:

$$\mathbf{B}_p(\lambda) = \left[\left(\lambda_2 B_p(\lambda_1) - \lambda_1 B_p(\lambda_2) \right)', \dots, \left(\lambda_{m+1} B_p(\lambda_m) - \lambda_m B_p(\lambda_{m+1}) \right)' \right]'$$

則 $\sqrt{TR}\hat{\beta}(\lambda, \tau)$ 的收斂情形為:

$$\sqrt{TR}\hat{\beta}(\lambda, \tau) \Rightarrow (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} (A \otimes \Omega_o^{\frac{1}{2}}) \mathbf{B}_p(\lambda),$$

兩邊同乘 $(A^{-1} \otimes I_p)$ 可得:

$$\begin{aligned}
(A^{-1} \otimes I_p) \sqrt{TR}\hat{\beta}(\lambda, \tau) &\Rightarrow (A^{-1} \otimes I_p) (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} (A \otimes \Omega_o^{\frac{1}{2}}) \mathbf{B}_p(\lambda) \\
&= (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} (I_m \otimes \Omega_o^{\frac{1}{2}}) \mathbf{B}_p(\lambda).
\end{aligned}$$

對於 $((A^{-1} \otimes I_p)R)\hat{S}(\lambda, \tau)((A^{-1} \otimes I_p)R)'$ 來說, 由於 A^{-1} 是一個下三角矩陣且 $(A^{-1})_{j,j}, (A^{-1})_{j,k}$ 為:

$$(A^{-1})_{j,j} = \lambda_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \quad \text{對於所有的 } j = 1, \dots, m,$$

$$(A^{-1})_{j,k} = \lambda_k(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \quad \text{對於所有的 } j = 2, \dots, m, k < j.$$

再使用 R 的定義，寫成 $R = R^* \otimes I_p$ ，其中 R^* 為一個 $m \times m + 1$ 的矩陣其元素僅 0 與 1，因此可得：

$$\hat{S}(\lambda, \tau) \xrightarrow{p} \tau(1 - \tau) \text{Diag}\left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_0)}, \dots, \frac{1}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)}\right) \otimes \Omega_0,$$

則

$$\begin{aligned} & ((A^{-1} \otimes I_p)R)\hat{S}(\lambda, \tau)((A^{-1} \otimes I_p)R)' \\ & \xrightarrow{p} \tau(1 - \tau) \left((A^{-1}R^*) \text{Diag}\left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_0)}, \dots, \frac{1}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)}\right) (A^{-1}R^*)' \right) \otimes \Omega_0 \\ & = \tau(1 - \tau) \text{Diag}\left(\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1), \dots, \lambda_m\lambda_{m+1}(\lambda_{m+1} - \lambda_m)\right) \otimes \Omega_0. \end{aligned}$$

□

給定分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論，為推導估計值得極限性質所需，下面給出假設 A.7.-A.12. 如下：

假設 A. 7. $\{1(\epsilon_t^0(\tau) < 0) - \tau\}$ 為一個 *martingale difference* 序列。

假設 A. 8. 分配 $\{F_t(\cdot)\}$ 及 $\{f_t(\cdot)\}$ 都是連續的並且對於所有的 t 滿足 $0 < L_f \leq f_t(F_t^{-1}(\tau)) \leq U_f < \infty$ 。

假設 A. 9. 對於任何 $\epsilon > 0$ ，存在一個 $\sigma(\epsilon) > 0$ 使得 $|f_t(F_t^{-1}(\tau) + s) - f_t(F_t^{-1}(\tau))| < \epsilon$ ，對於所有的 $|s| < \sigma(\epsilon)$ ， $1 \leq t \leq T$ 。

假設 A. 10. $T_j^0 = [\lambda_j^0 T]$ ($j = 1, \dots, m$)，其中 $0 < \lambda_1^0 < \lambda_m^0 < 1$ 。

假設 A. 11. (a) 截距項被包含在 x_t 裡面；

(b) 對於每個 $j = 1, \dots, m + 1$ ，

$$\frac{1}{T} \sum_{t=T_{j-1}^0+1}^{T_{j-1}^0+[sT]} f_t(F_t^{-1}(\tau)) x_t x_t' \xrightarrow{p} s H_j^0(\tau) \quad \text{及} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=T_{j-1}^0+1}^{T_{j-1}^0+[sT]} x_t x_t' \xrightarrow{p} s J_j^0$$

其中 $0 \leq s \leq \lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0$ ， J_j^0 及 $H_j^0(\tau)$ 為非隨機正定矩陣；

(c) 對於某些 $\varphi > 0$, $L < \infty$, $t = 1, \dots, T$, $E\|x_t\|^{4+\varphi} < L$ 成立;

(d) 存在 $M < \infty$, $\gamma > 2$ 使得在 T 很大時 $T^{-1} \sum_{t=1}^T E\|x_t\|^{2\gamma+1} < M$, $E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \|x_t\|^3)^\gamma < M$ 成立;

(e) 存在 $j_0 > 0$ 使得 $j^{-1} \sum_{t=l}^{l+j} x_t x_t'$ 的特徵值為有界的並且上界為 λ_{\max} 下界為 λ_{\min} , 對於所有的 $j \geq j_0$, $1 \leq l \leq T - j$, $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < \infty$.

假設 A. 12. 令 $\Delta_{T,j}(\tau) = \beta_{j+1}^0(\tau) - \beta_j^0(\tau)$ ($j = 1, \dots, m$), 假設 $\Delta_{T,j}(\tau) = v_T \Delta_j(\tau)$, 對於某些 $\|\Delta_j(\tau)\| > 0$, 其中 $\Delta_j(\tau)$ 為一個與 T 無關的向量, v_T 為一個 *scalar* 並且對於某些 $\vartheta \in (0, 1/2)$ 滿足 $v_T \rightarrow 0$ 且 $T^{(1/2)-\vartheta} v_T \rightarrow \infty$.

多個分量下多個結構性改變之參數與變動時間點的估計與推論, 為推導估計值得極限性質所需, 下面給出假設 A.13. 如下:

假設 A. 13. 不同分量 τ_h ($h = 1, \dots, q$) 下都滿足假設 A.7. 到 A.11., 至少存在一個分量 τ_j ($1 \leq j \leq q$) 滿足假設 A.12.。

重複橫斷面之給定分量多個結構性改變檢定之係數與變動時間點的估計與推論, 加入個人 i 下的假設, 與先前的假設 A.1. 到 A.7. 類似, 標示如下所示:

假設 B. 1. 對於給定的 i , $\{1_{(u_{it}^0(\tau) < 0)} - \tau\}$ 為一個 *martingale difference* 序列並且對於所有的 $i \neq j$, $u_{it}^0(\tau)$ 與 $u_{jt}^0(\tau)$ 是相互獨立的。

假設 B. 2. 對於 $\{F_{it}(\cdot)\}$, $\{f_{it}(\cdot)\}$ 假設 B.1. 成立。

假設 B. 3. 對於任意 $\epsilon > 0$, 存在一個 $\sigma(\epsilon) > 0$ 使得對於所有 $|s| < \sigma(\epsilon)$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq t \leq T$, $|f_{it}(F_{it}^{-1}(\tau) + s) - f_{it}(F_{it}^{-1}(\tau))| < \epsilon$.

假設 B. 4. $T_j^0 = [\lambda_j^0 T]$ ($j = 1, \dots, m$), 其中 $0 < \lambda_1^0 < \lambda_m^0 < 1$ 並且對於所有的 i 而言結構性變動點都是相同的。

假設 B. 5. (a) 截距項被包含在 x_{it} 裡面;

(b) 對於每個 $j = 1, \dots, m + 1$,

$$\frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=T_{j-1}^0+1}^{T_{j-1}^0+[sT]} f_{it}(F_{it}^{-1}(\tau)) x_{it} x'_{it} \xrightarrow{P} s \bar{H}_j^0(\tau) \quad \text{及} \quad \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=T_{j-1}^0+1}^{T_{j-1}^0+[sT]} x_{it} x'_{it} \xrightarrow{P} s \bar{J}_j^0,$$

對於所有的 N , 其中 $0 \leq s \leq \lambda_j^0 - \lambda_{j-1}^0$, \bar{J}_j^0 及 $\bar{H}_j^0(\tau)$ 為非隨機正定矩陣;

(c) 對於某些 $\varphi > 0$, $L < \infty$ 及所有的 i, t , $E\|x_{it}\|^{4+\varphi} < L$ 成立;

(d) 存在 $M < \infty$, $\gamma > 2$ 使得在對於所有的 N 及 T 很大時, $(NT)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T E\|x_{it}\|^{2\gamma+1} < M$, $E((NT)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \|x_{it}\|^3)^\gamma < M$ 成立;

(e) 存在 $j_0 > 0$ 使得對於所有的 N , $(jN)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{l+j} x_{it} x'_{it}$ 的特徵值為有界的並且上界為 λ_{\max} 下界為 λ_{\min} , 對於所有的 $j \geq j_0$, $1 \leq l \leq T - j$, $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < \infty$.

假設 B. 6. 假設 N 及 T 滿足下列兩種條件之一:

1. 當 $T \rightarrow \infty$, N 是固定的,
2. 當 $(N, T) \rightarrow \infty$ 但 $\log N/T^{\vartheta/2} \rightarrow 0$,

假設 B. 7. 令 $\Delta_{NT,j}(\tau) = \beta_{j+1}^0(\tau) - \beta_j^0(\tau)$, 假設 $\Delta_{NT,j}(\tau) = N^{-1/2} v_T \Delta_j(\tau)$, 對於某些 $\|\Delta_j(\tau)\| > 0$, 其中 $\Delta_j(\tau)$ 為一個與 T, N 無關的向量, v_T 為一個 *scalar* 並且滿足 $v_T \rightarrow 0$ 且 $T^{(1/2)-\vartheta} v_T \rightarrow \infty$.

重複橫斷面之多個分量多個結構性改變檢定之係數與變動時間點的估計與推論, 加入個人 i 下的假設, 為推導估計值得極限性質所需, 下面給出假設 B.8. 如下:

假設 B. 8. 在不同分量 $\tau_h (h = 1, \dots, q)$ 滿足假設 B.1. 到 B.6., 至少至少存在一個分量 $\tau_j (1 \leq j \leq q)$ 滿足假設 B.7.。

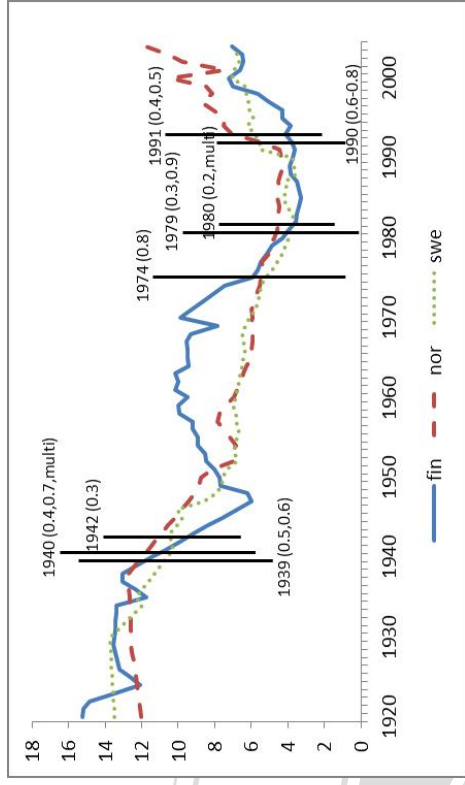
參考文獻

- Aaberge, Rolf, and Anthony B. Atkinson (2010), "Top Incomes in Norway," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010).
- Alvaredo, Facundo, "Top Incomes and Earnings in Portugal, 1936-2005," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010).
- Alvaredo, Facundo, and Emmanuel Saez (2009), "Income and Wealth Concentration in Spain from a Historical and Fiscal Perspective," *Journal of the European Economic Association*, 1140-1167.
- Andrews, Donald W.K., Ploberger, W. (1994), "Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative," *Econometrica*, 62(6), 1383-1414.
- Atkinson, Anthony B. (2005), "Top incomes in the UK over the 20th century," *Journal of the Royal Statistical Society*, 70, 9-38.
- Atkinson, Anthony B., "Top Incomes in a Rapidly Growing Economy: Singapore," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010)
- Atkinson, Anthony B., and Andrew Leigh, "The Distribution of Top Incomes in New Zealand," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007a)
- Atkinson, Anthony B., and Andrew Leigh, "The Distribution of Top Incomes in Australia," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007b)
- Atkinson, Anthony B., and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth*

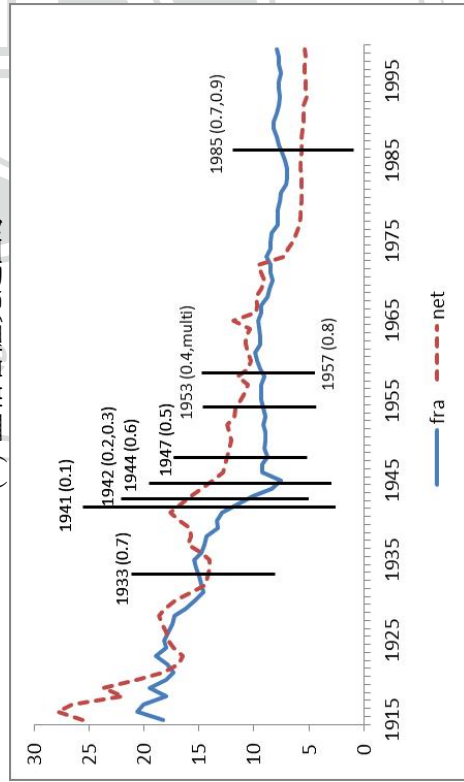
- Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries (New York: Oxford University Press, 2007).
- Atkinson, Anthony B., and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010).
- Bai, Jushan (1997), "Estimation of a change point in multiple regression models," *The Review of Economics and Statistics*, 79(4), 551-563.
- Bai, Jushan and Perron, Pierre (1998), "Estimating and testing linear models with multiple structural changes," *Econometrica*, 66(1), 47-78.
- Bai, Jushan and Perron, Pierre (2003), "Computation and analysis of multiple structural change models," *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), 1-22.
- Bai, Jushan and Perron, Pierre (2003), "Critical values for multiple structural change tests," *The Econometrics Journal*, 6, 72-78.
- Banerjee, Abhijit, and Thomas Piketty, "Top Indian Incomes, 1922-2000," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010)
- Dell, Fabien, *Top Incomes in Germany throughout the Twentieth Century* "Top Incomes in Germany throughout the Twentieth Century," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007)
- Dell, Fabien, Thomas Piketty, and Emmanuel Saez, "Income and Wealth Concentration in Switzerland of the 20th Century," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007)
- Hasen, Bruce E. (2001), "The new econometrics of structural change: Dating breaks in u.s. labor productivity," *Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 117-128.

- Jantti, Markus, Marja Riihela, Risto Sullstrom, and Matti Tuomala, "Trends in Top Income Shares in Finland," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes: A Global Perspective*, vol. 2 (New York: Oxford University Press, 2010)
- Kuznets, Simon (1953), "Shares of Upper Income Groups in Income and Savings," *National Bureau of Economic Research*
- Moriguchi, Chiaki, and Emmanuel Saez (2008), "The Evolution of Income Concentration in Japan, 1886-2005: Evidence from Income Tax Statistics," *Review of Economics and Statistics*, 90, 713-734.
- Nolan, Brian, "Long-Term Trends in Top Income Shares in Ireland," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007).
- Oka Tatsushi and Qu Zhongjun (2011), "Estimating Structural Changes in Regression Quantiles," *Journal of Econometrics*, 162(2), 248-267.
- Piketty, Thomas (2005), "Top Income Shares in the Long Run: An Overview," *Journal of the European Economic Association*, 3, 1-11.
- Piketty, Thomas, "Income, Wage, and Wealth Inequality in France, 1901-98," *Journal of the European Economic Association*, in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries* (New York: Oxford University Press, 2007)
- Piketty, Thomas and Emmanuel Saez (2003), "Income Inequality in the United States, 1913-1998," *Quarterly Journal of Economics*, 118, 1-39.
- Piketty, Thomas and Emmanuel Saez (2006), "The Evolution of Top Incomes: A Historical and International," *American Economic Review*, 96(2), 200-205.
- Ploberger, Werner.,and Kramer, Walter. (1992), "The Cusum Test with Ols Residuals," *Econometrica*, 60(2), 271-285.

- Roger Koenker and Gilbert Bassett, Jr. (1978), "Regression Quantiles," *Econometrica*, 46, 33-50.
- Roine, Jesper and Daniel Waldenstrom (2008), "The evolution of top incomes in an egalitarian society: Sweden, 1903-2004," *Journal of Public Economics*, 92, 366-387.
- Roine, Jesper and Daniel Waldenstrom (2011), "Common Trends and Shocks to Top Incomes: A Structural Breaks Approach," *Review of Economics and Statistics*, 93(3), 832-846.
- Roine, Jesper, Jonas Vlachos, and Daniel Waldenstrom (2009), "The long-run determinants of inequality: What can we learn from top income data," *Journal of Public Economics*, 93, 974-988.
- Salverda, Wiemer, and Anthony B. Atkinson, "Top Incomes in the Netherlands over the Twentieth Century," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries*, (New York: Oxford University Press, 2007).
- Saez, Emmanuel, and Michael R. Veall, "The Evolution of High Incomes in Canada, 1920-2000," in Anthony B. Atkinson and Thomas Piketty (Eds.), *Top Incomes over the Twentieth Century: A Contrast between European and English-Speaking Countries*, (New York: Oxford University Press, 2007).
- Qu, Zhongjun (2008), "Testing for structural change in regression quantiles," *Journal of Econometrics*, 146, 170-184.
- Qu, Zhongjun, Perron, Perron (2007), "Estimating and testing structural changes in multivariate regressions," *Econometrica*, 75, 459-502.

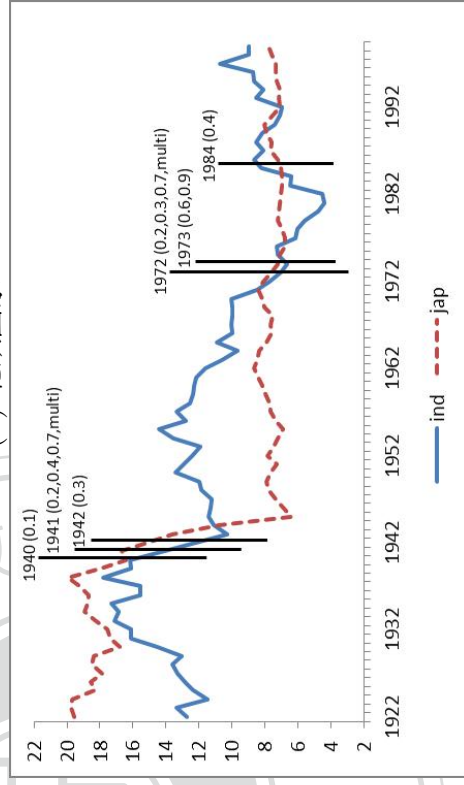


(a) 盎格魯薩克遜國家



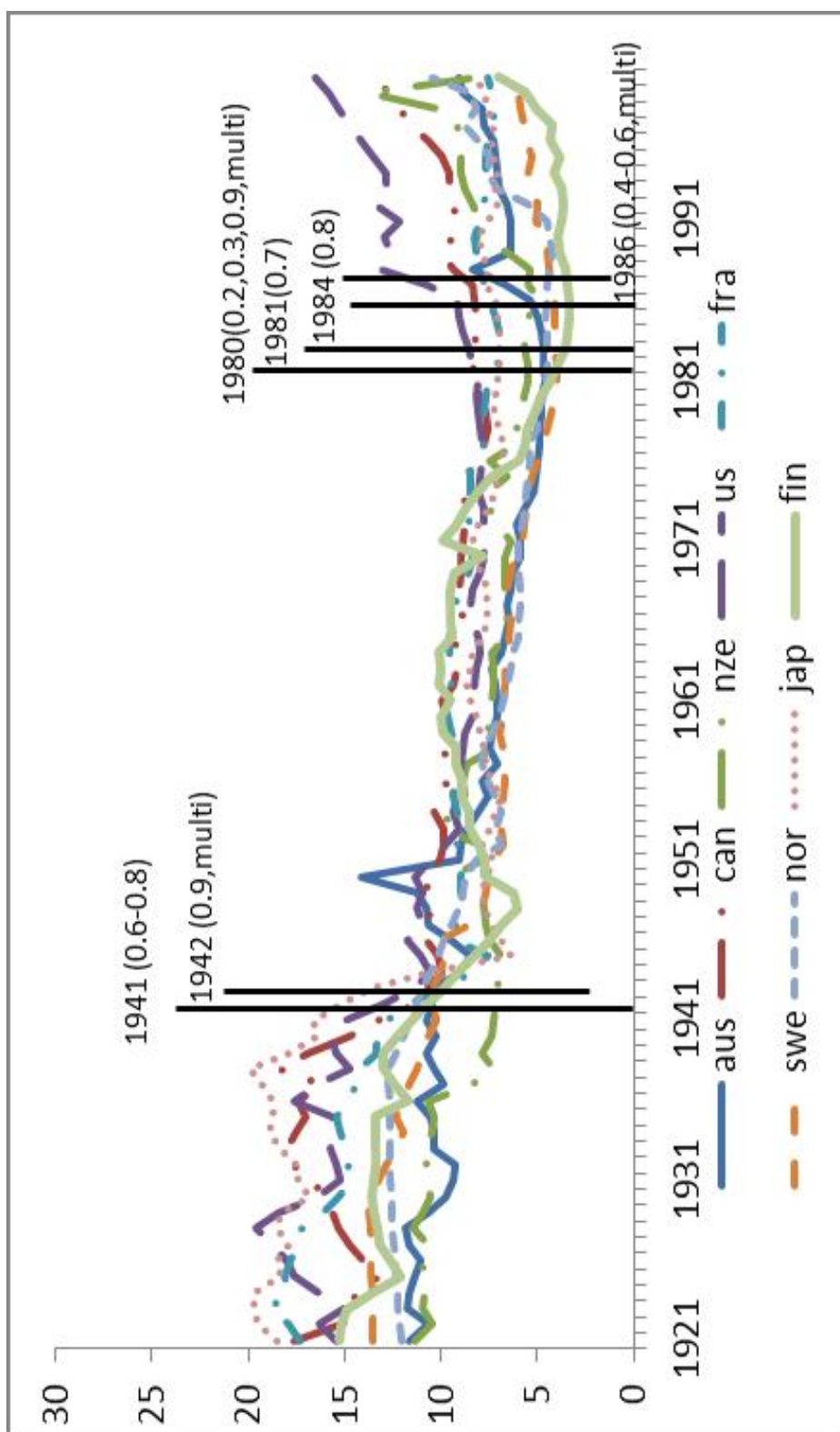
(c) 歐洲大陸國家

(b) 北歐國家



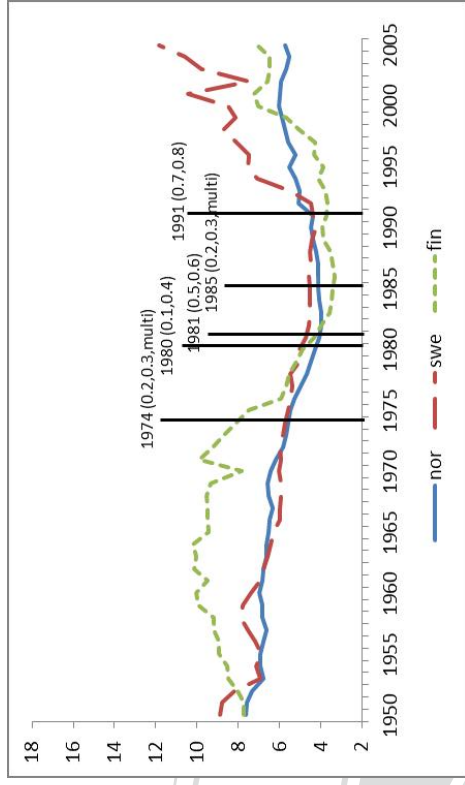
(d) 亞洲國家

圖 1: 20世紀不同區域個別分量高所得份額結構改變時間點

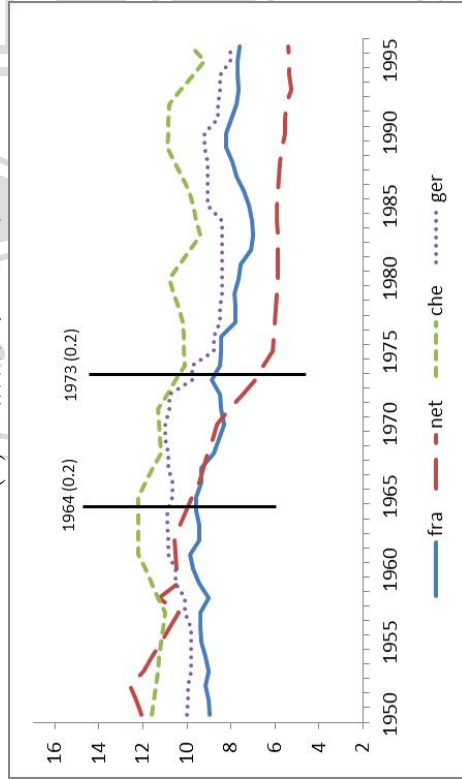


全世界

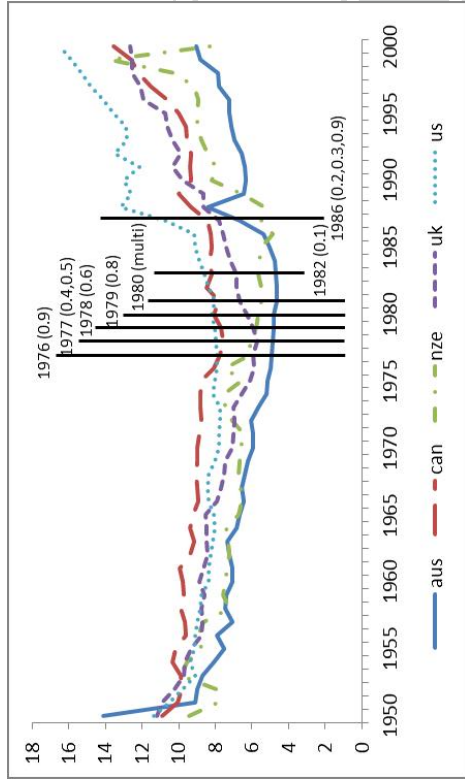
圖 2: 20 世紀全世界個別分量高所得份額結構改變時間點



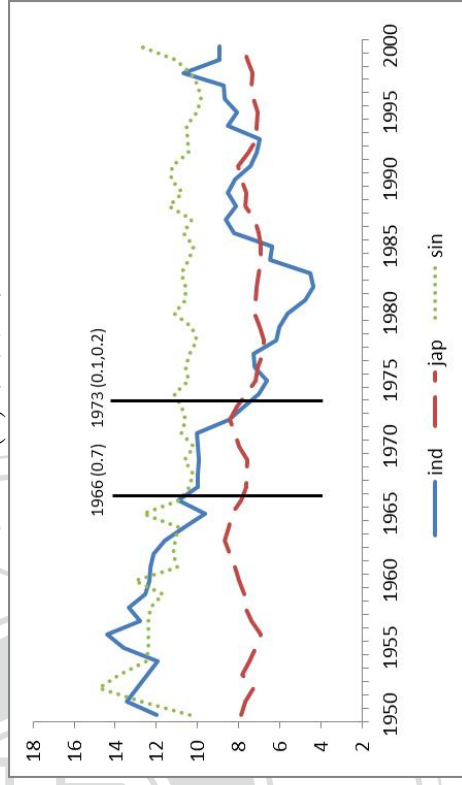
(a) 盎格魯薩克遜國家



(c) 歐洲大陸國家

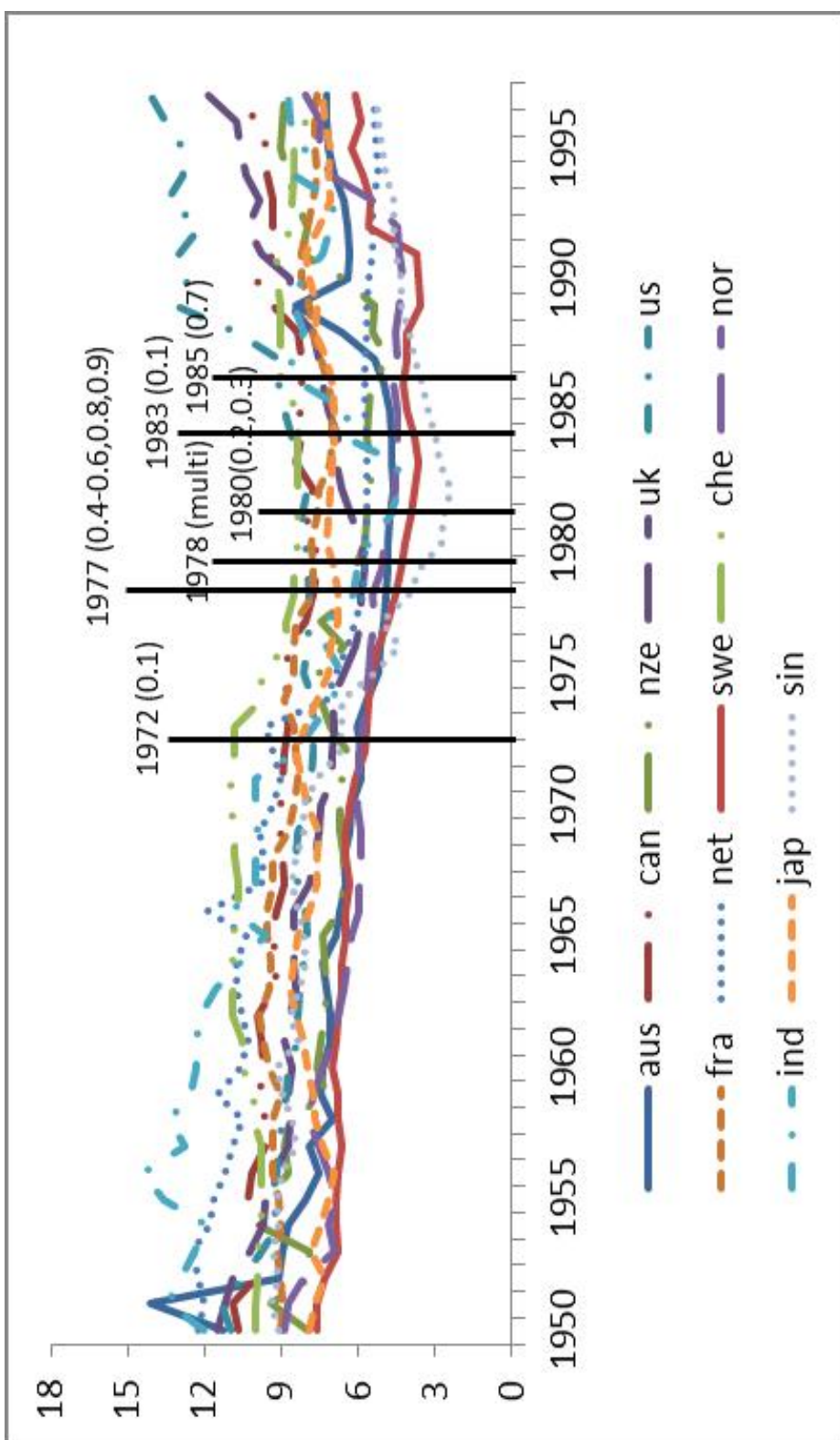


(b) 北歐國家



(d) 亞洲國家

圖 3: 戰後時期不同區域個別分量高所得份額結構改變時間點



全世界

圖 4: 戰後時期全世界個別分量高所得份額結構改變時間點

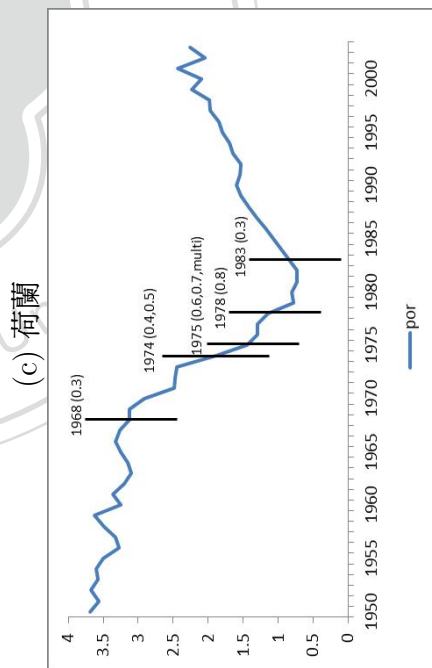
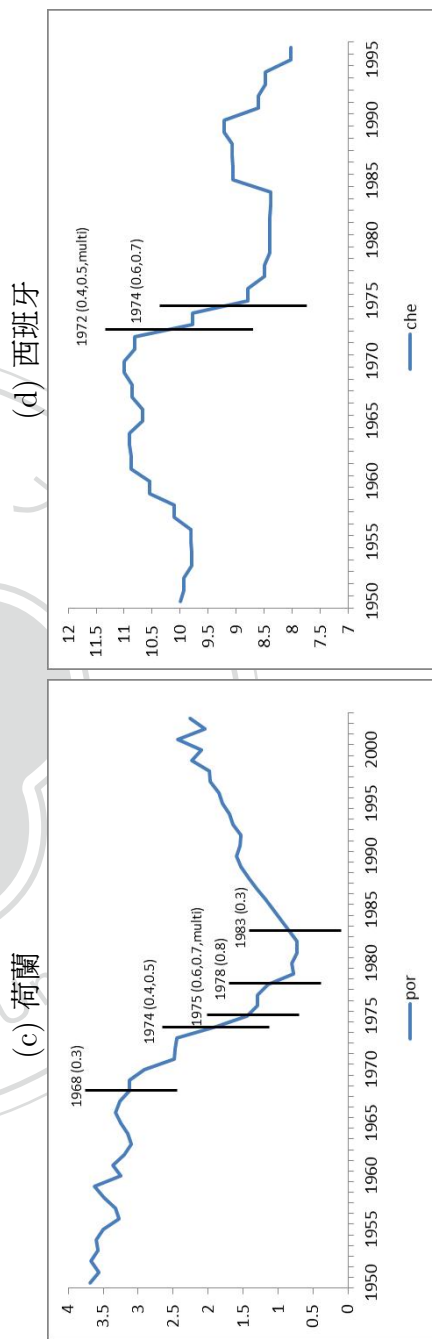
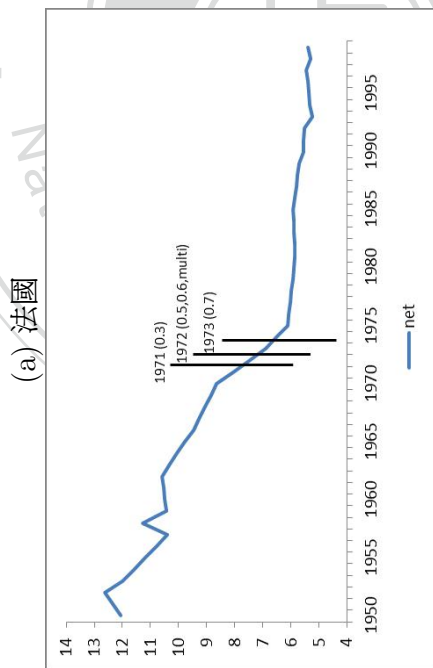
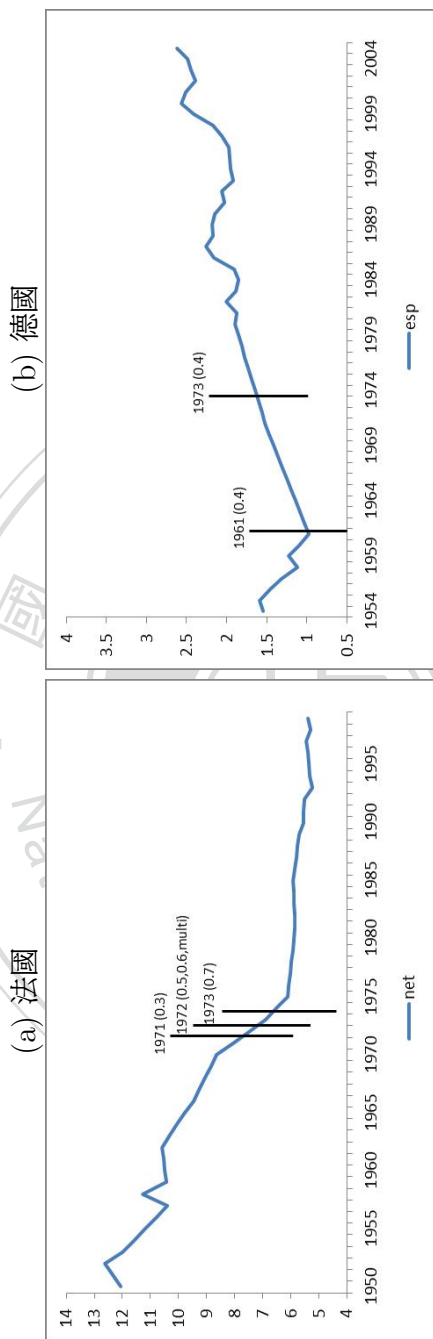
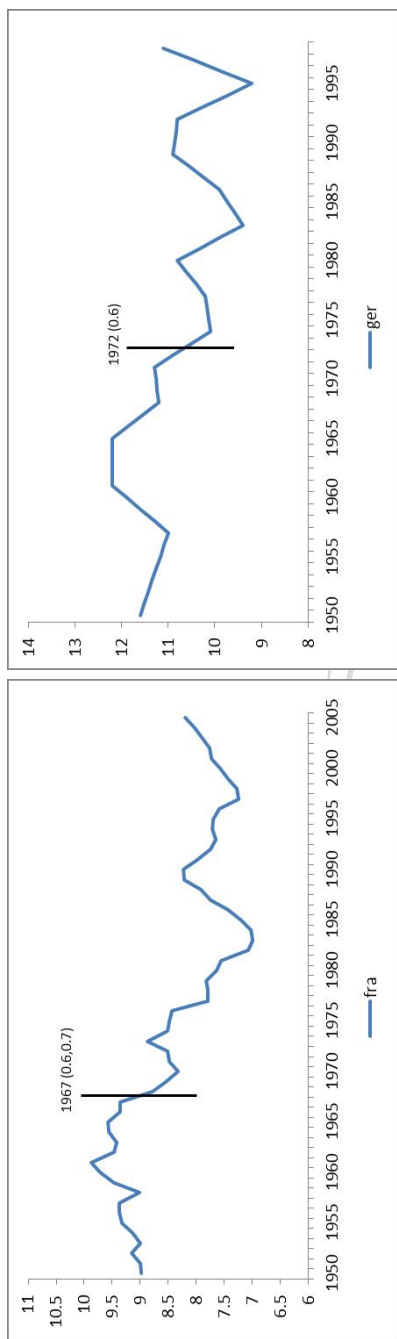
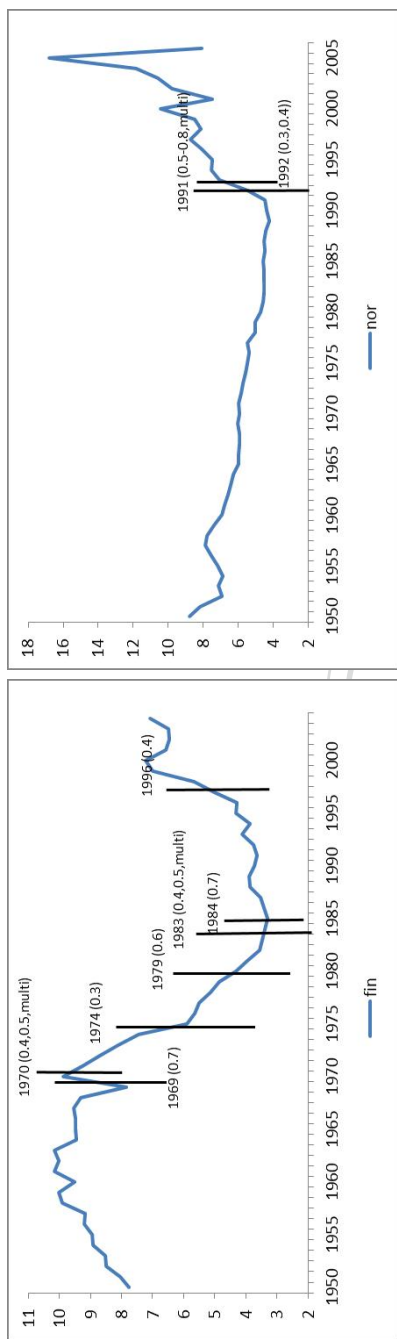
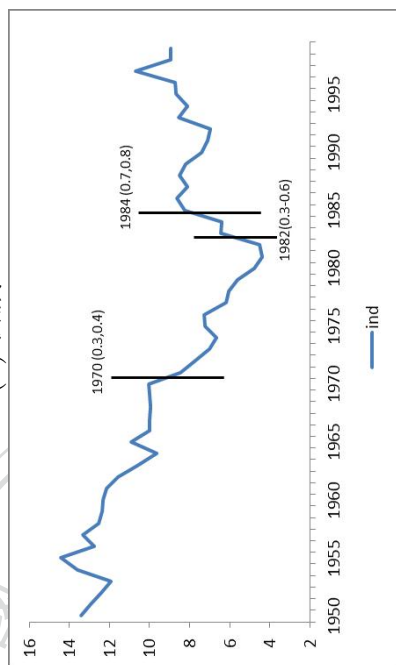


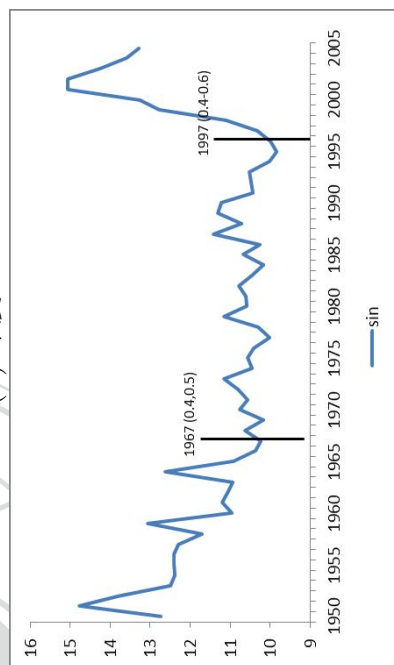
圖 5: 戰後時期各個分量歐洲大陸國家高所得份額結構改變時間點



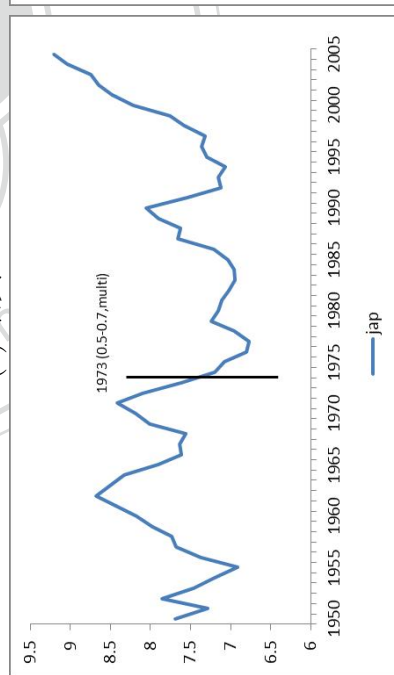
(b) 挪威



(c) 瑞典

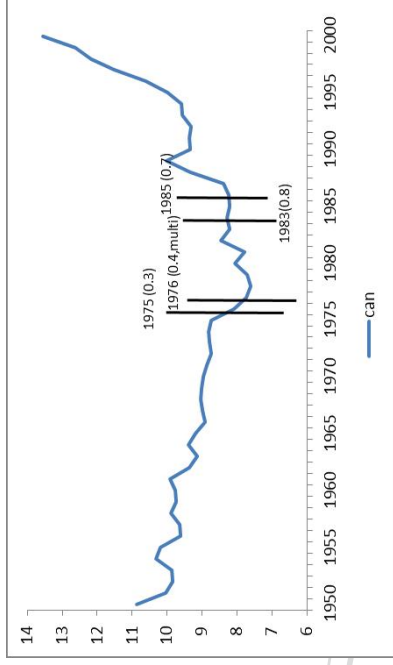


(f) 新加坡

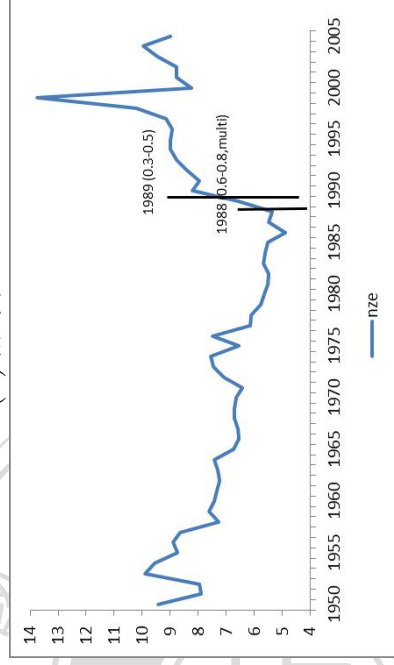


(f) 新加坡

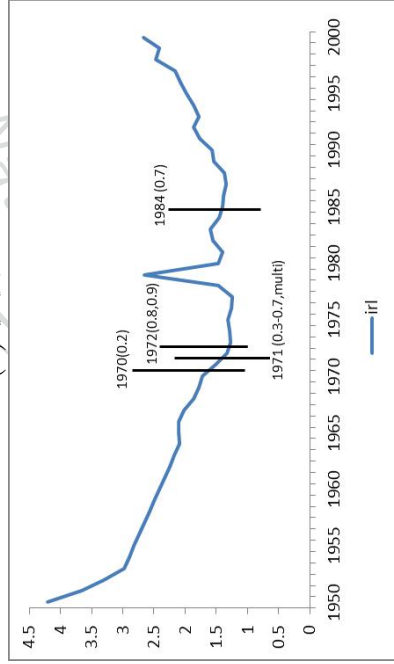
圖 6: 戰後時期各個分量北歐與亞洲國家高所得份額結構改變時間點



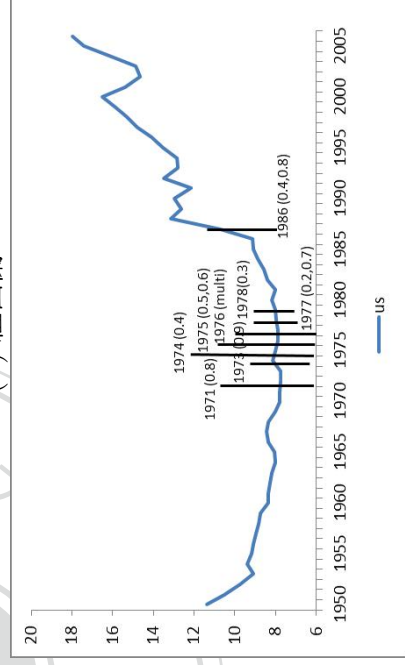
(a) 澳洲



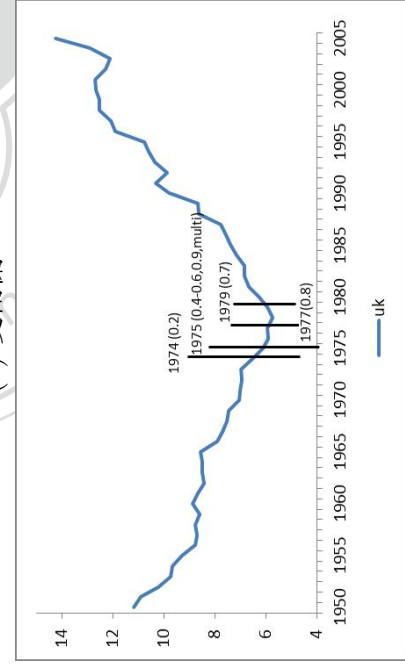
(b) 加拿大



(c) 愛爾蘭



(d) 紐西蘭



(e) 英國

(f) 美國

圖 7: 戰後時期各個分量盎格魯薩克遜國家高所得份額結構改變時間點

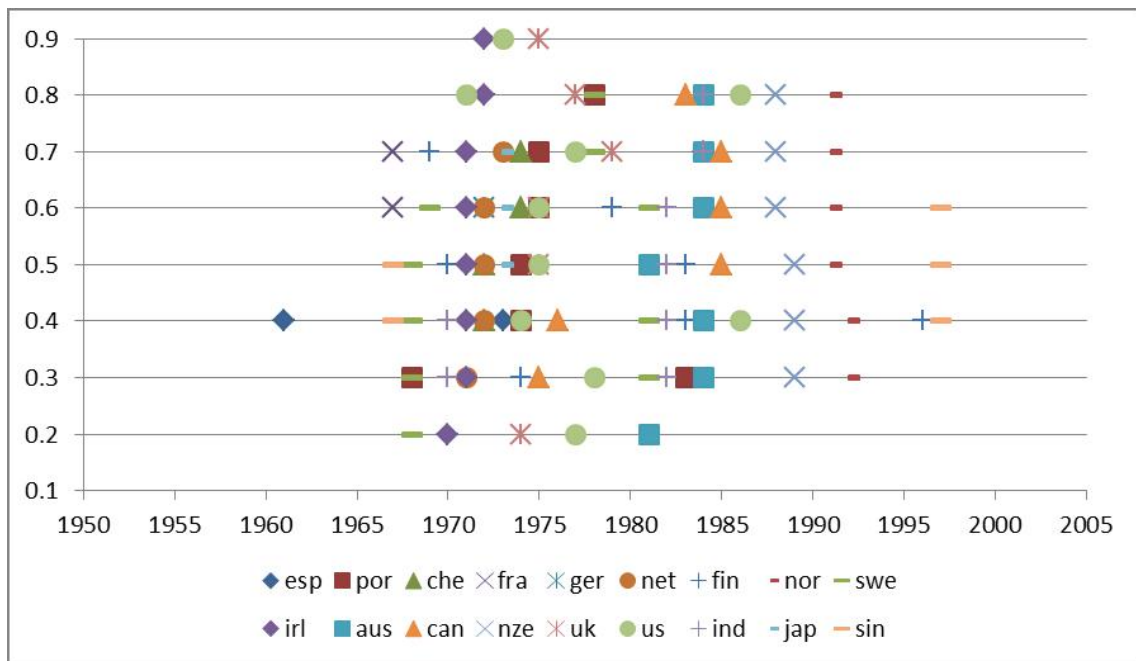
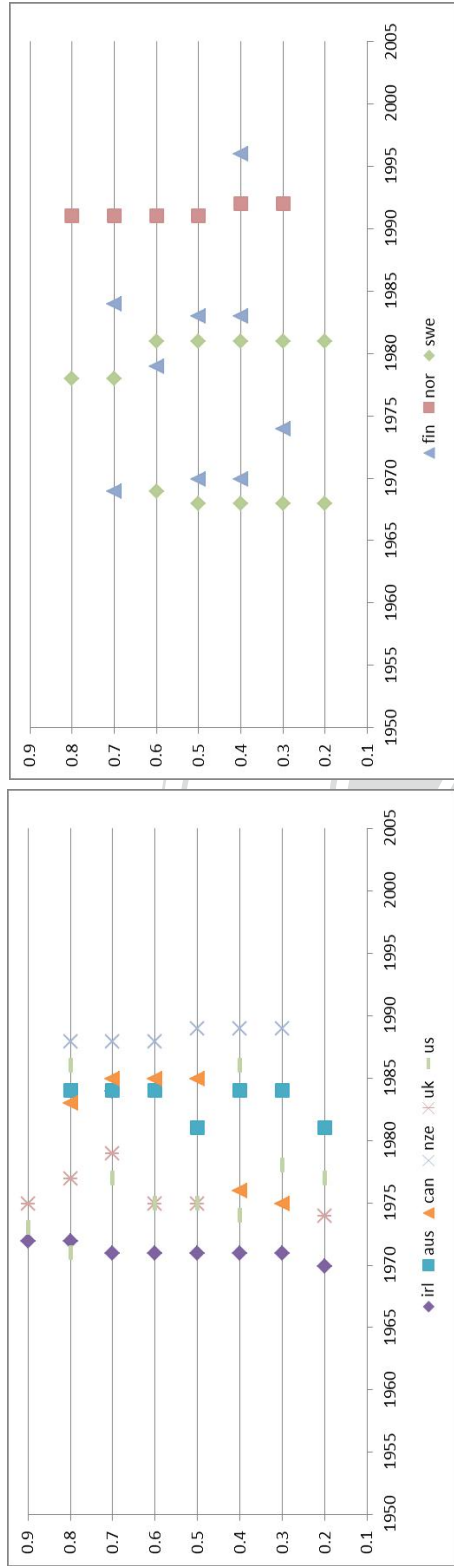
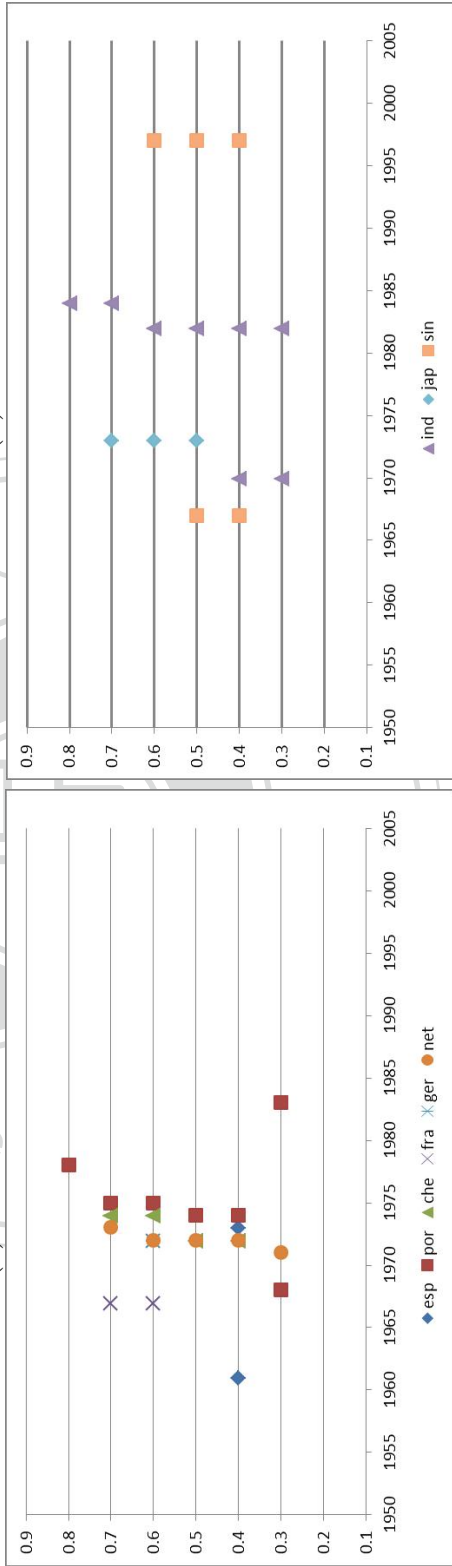


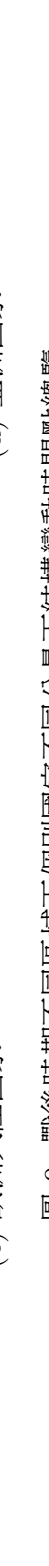
圖 8: 戰後時期所有個別國家不同分量下結構變動時間點總覽



(b) 北歐國家



(c) 歐洲大陸國家



(d) 亞洲國家



圖 9: 戰後時期不同區域下個別國家不同分量下結構變動時間點總覽