政　治　大　學
風　險　管　理　與　保　險　學　系
碩士論文

指導教授: 張士傑 博士

解約率因素下附保證給付投資型保險的風險價差

Risk bearing spreads of GMMB with lapse rates dependent on economic factors

研 究 生: 潘冠宇

中華民國　101　年　7　月

摘要

近年來因市場波動劇烈, 保險公司紛紛推出的「附保證投資型保單」, 給予保戶在投資上的保證。然而, 附最低給付保證條件卻使得保險公司必須面對更大的核保與財務風險。所以計算出附有最低保證條件商品的保費就顯得格外地重要。

傳統附保證保單在訂價時, 都是假設固定已知的脫退率, 因爲他們認爲脫退率的變化不會是影響保單價值的主因。但在 Mary hardy 所著的《Investment Guarantees》一書中 page 96 特別提到脫退風險:

Withdrawals are more problematic. Withdrawals are, to some extent, related to the investment experience, and the withdrawal risk is, therefore, not fully diversifiable.

因此, 本文希望透過建立受經濟因子影響的解約率模型, 來得到附保證保險的風險價差。

本文考慮附保證滿期給付投資型商品 (GMMB), 並且使用 Heston (1993) 提出的財務市場模型以及參考 Mercurio (1996,2001) 評價投資型保險之風險承擔價差方法, 使用效用函數來描述保險契約雙方之風險趨避程度。同時根據 Kolkiewicz & Tan (2006) 假設受經濟因子的危險比率模型 (hazard rate model), 來反映出資產的平均波動程度會影響保戶的脫退率。最後以情境方式分別模擬 5、10及15年到期的附保證最低滿期投資型保險之風險價差。本研究推導之模型主要得出下列結果: (1) 保單期間愈長, 價差愈大。(2) 價外賣權的價差高於價內。(3) 風險規避程度越高買賣價差越大。(4) 脫退率受經濟影響愈深, 保單的買賣價差愈大。(5) 當保險公司所保證的價格愈高時, 價差的影響愈大。

Abstract

With the fluctuation in the financial market in 2008, insurance company provided the consumers with equity-linked life insurances embedded guarantees. On the other hand, there are more risk in the financial literacy and underwriting performance of the insurance company. It is especially important to calculate the premium of the contract embedded investment guarantee properly .

Traditional method of pricing the contract embedded investment guarantee was assumed that lapse rate was known, because product providers believed lapse rate was not a major factor to price the contract. However, Mary hardy's "Investment Guarantees" page 96 specifically mentions about the lapse rate risk:

Withdrawls are more problematic. Withdrawals are, to some extent ,related to the investment experience, and the withdrawal risk is, therefore, not fully diversifiable.

So this article will found the model of lapse rate dependent on economic factors and further get the fair value of one kind of a contract embedded guarantee: GMMB.

We will build a financial model introduced by Heston (1993) and use the methodology provided by Mercurio (1996,2001) to price the risk bearing gap of a contract embedded guarantee with utility function to depict the risk averse level between investors . And we have lapse rates affected from the fluctuation of the implying asset which is the hazard rate model used by Kolkiewicz & Tan (2006). Finally, we will simulate a set of scenarios to present the Risk bearing spreads of equity-linked life insurance embedded guarantees whose term are 5、10 and 15 years. The following are the consequences I got: (1) The longer the duration, the larger the spread. (2) The spread out of money is larger than that in the money. (3) The higher the risk aversion, the larger the buy-ask spread. (4) The deeper the influence of economy on the lapse rate, the larger the buy-ask spread. (5) The higher guarantee price insurer offer, the deeper the spread affect.

目錄

表目錄

圖目錄

Chapter 1

緒論

1.1 研究目的與動機

投資型商品爲具有保障以及投資功能的保險商品, 在保險商品創新設計上扮演非常重要的角色。台灣自從2000年發展開始投資型商品, 受到消費者的喜愛。如圖1.1所示。投資型商品的架構爲保戶選擇投資標的, 將所投資的保費置於分離帳戶 (Separate Account), 保險人的角色相當於投資仲介機構, 而保單的價值 (Account Value) 即根據帳戶中投資標的之績效而定, 因此保戶需自行承擔投資風險。但是近年來市場波動劇烈造成保戶投資績效不佳, 使得投資型保單的銷售受到很大的阻礙。因此, 保險公司爲因應市場所需推出所謂的「附保證投資型保單」, 給予保戶在投資上的保證。以美國退休市場爲例, 由於投資保證 (Investment Guarantee) 的年金保單保證保戶於投資績效不佳時至少有保證的金額, 使得投資保證 (Investment Guarantee) 的年金保單受到市場的喜愛。

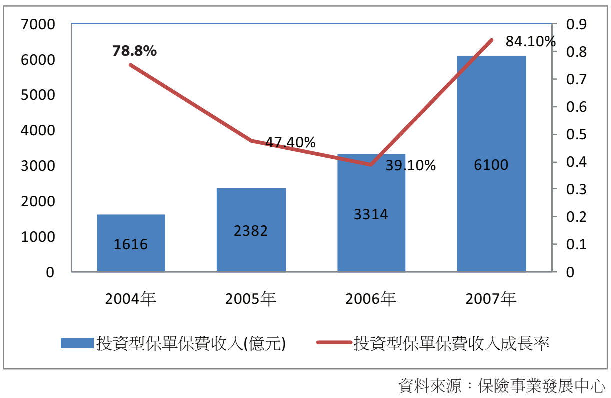

圖 1.1: 投資型保單銷售情況

身處於21世紀的台灣, 由於退休市場未來會朝確定提撥制發展, 因此在人口老化以及退休規劃的發展下, 未來台灣的保險公司爲爭取退休金的市場, 保證給付的投資型商品也勢必將會成爲市場上的主流。

但另一方面, 附有最低給付保證條件卻使得保險公司必須面對更大的核保與財務風險。而在實務上, 提供最低給付保證的保險公司在保單設計時沒有考慮保戶的解約行爲。原因是他們覺得保戶會解約的原因很多, 而且保戶是處於資訊落後的一方。然而根據 ING (2011) 的估計, 因爲保戶的解約行爲與死亡率, 尤其是解約率, 集團必須在2011年認列費用 9 到 11 億歐元。這說明了保戶的行爲會影響保險公司的風險管理與財務的穩定性。同時在保險業的監理方面, 因爲保險公司會因保戶的解約行爲而遭受到重大的損失, 所以主管機關必須知道保險公司在解約行爲上的假設是否正確, 尤其是這個風險是沒有避險策略的情況下。所以如何納入保戶的解約行爲在計算附有最低保證條件保單的保費就顯得格外地重要。

曾有保險公司因爲忽略附投資保證投資型保險之風險管理, 造成保險公司發生財務問題, 英國的 Equitable Life 壽險公司就是一個例子。[1] Equitable Life 壽險公司在1980年代早期發行了大量附保證年金率選擇權 (Guaranteed annuity option ; GAO) 的保單, 根據公司所保證的利率水準, 選擇權在利率低於 6.5% 時會進入價內 (In-the-money), 也就是說利率低於 6.5% 時保戶會選擇執行選擇權, 那麼保險公司就必須要支付保證的年金。然而在保單發行時, 保單簽發的利率高於 10%, 精算師根據個人判斷認爲該保單永遠不會進入價內, 因此在訂價時就忽略了選擇權的價值。然而在1990年代中期利率開始走低, 下降到 6.5% 以下, 造成有200年歷史的 Equitable Life 壽險公司財務受到很嚴重的打擊。

另一方面, 最新2004年的國際會計準則第四號公報 (International Financial Reporting Standards 4 ; IFRS4) 與2001年歐盟研擬之保險業清償能力監理標準 (Solvency II) 就是要求保險公司對於資產與負債以市場一致價值 (market consistent value) 來衡量。對於保險公司來說, 保單是未來對於保戶的承諾, 即爲保險公司負債中的準備金項。因此如何公平地衡量附保

[1]參考來源: Risk Management and Insurance Review

證保單的價值, 對於保險公司在資產負債管理上顯得格外重要。在2008年金融風暴以來, 市場波動劇烈。我們發現保戶會因爲總體經濟環境產生變化而解約, 如利率的改變、經濟成長率、失業率等因素。但是傳統的附保證保險在訂價上, 卻很少考慮到因爲經濟因素而造成保戶解約行爲。所以我們希望考慮經濟環境會變化保戶的解約行爲下, 求得附保證最低給付保險 (GMMB) 的風險差價。期望使得保險公司在附保證保險訂價上有所幫助。同時幫助保險公司在風險管理方面更加完善。

1.2 研究架構

論文的架構如下, 第二章我們將介紹市場上販售的附保證商品, 並且回顧經濟因子模型影響解約率模型以及附保證最低給付保險訂價的相關文獻。第三章我們將建構總體經濟環境變化影響保戶行爲的解約模型, 以及附保證最低給付保險的風險差價模型。第四章將以數值模擬來分析價格受到考慮經濟因子影響之重要性。第五章爲結論。

Chapter 2

商品介紹與文獻回顧

2.1 附保證投資型商品介紹

附保證投資型商品 (GMXB ; Guaranteed Minimum Benefit) 讓保戶能夠參與市場的投資, 同時保證了最低的給付內容, 也就是說保戶爲投資績效買保險。此一特性使得附保證投資型商品受到保戶的喜愛。

Hardy (2003) 根據給付型態 (benefit types) 將附保證契約分成五類:

保證最低身故金額 (GMDB)

保證最低身故金額 (Guaranteed Minimum Death Benefit ; GMDB) 若保戶於保險契約有效期間死亡, 給予最低保證死亡給付保險金。最低保證金額依據分爲兩類, 分別爲所總保費和帳戶價值。以保費爲基礎的保證常見的有保證給付所繳總保費, 此稱爲保本型保證。若是所繳保費再加上利息, 則此稱爲增值型保證。而以帳戶價值爲基礎的保證型式, 常見的是鎖高型, 即保證金額爲約定時間內出現的最高帳戶價值。因此若保證金額爲 G , 死亡時點的帳戶價值爲 F, 則最低保證的死亡給付爲 $\max(G, F)$。

保證最低滿期金額 (GMMB)

保證最低滿期金額 (Guaranteed Minimum Maturity Benefit ; GMMB) 滿期時若保戶仍生存, 可領得最低保證的滿期給付。若保證金額爲 G, 滿期時點的帳戶價值爲 F, 則最低保證的滿期給付爲 $\max(G, F)$。如圖 2.1所示, G 爲保證到期時帳戶價值, 2006 年爲到期日。若到期時股價表現不佳, 使得連結於股價的帳戶價值表現不理想, 保戶仍可拿到保證的價格. 因此保險公司必須承擔帳戶價值與保證價格的差距 $\max(G - F, 0)$。

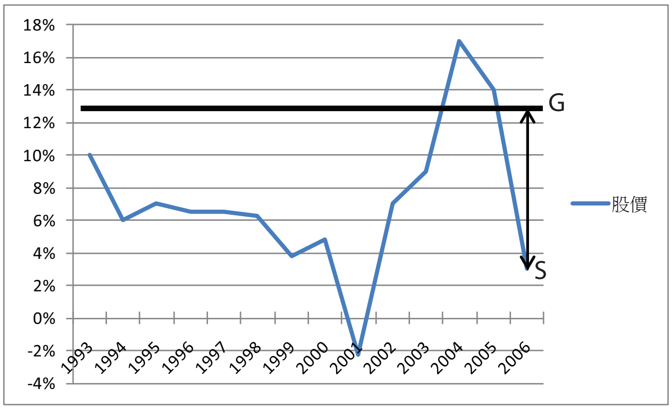

圖 2.1: 保險金與保證金額的關係

保證最低累積金額 (GMAB)

保證最低累積金額 (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit ; GMAB) 在保單生效時, 假設保戶約定在時間點 n_1 續約 (Renew) 並續約後到期日爲 n_2. 那麼帳戶價值在 n_1 前仍是投資標的的總價值。但到續約時間點 n_1 時, 開始有最低保證的功能。常見的保證基礎同樣是有保本、增值與鎖高。因此在到期日 n_2 時, 若 (n_1,n_2) 期間內的最低保證金額爲 G, 帳戶價值爲 F, 則最低保證的滿期給付爲 max[G,F]。

保證最低年金金額 (GMIB)

保證最低年金金額 (Guaranteed Minimum Income Benefit ; GMIB) 保戶可以在累積期滿後將分離帳戶所累積的帳戶價值依保證的型式轉成年金。保證的型式通常是根據市場年金率、保證年金率、滿期最低保證帳戶價值與該分離帳戶帳戶價值來決定。

保證最低提領金額 (GMWB)

保證最低提領金額 (Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit ; GMWB) 保險公司在保證給付開始的一段特定的時間內, 保證最低定期 (如一年或半年) 提領金額。若約定的總金額爲 G , 約定的保證提領期間爲 n 年, 則保戶每年可領到 G/N 。若在期間投資績效不好, 帳戶價值不足以提領時, 保險公司必須支付不足部份, 以保證每次提領的金額。若保證提領期間結束, 仍有帳戶價值, 則保戶可以選擇一次領或年金化剩餘價值。

本論文我們考慮保證最低滿期金額 (GMMB) 附保證投資型保險。考慮總體經濟環境會變化保戶解約行爲下求得附保證最低給付保險的風險差價。

2.2 台灣市售附保證投資商品

在2008年金融海嘯時, 消費者希望除了追求投資的績效外也要能控制風險。因此保險公司在這段期間紛紛推出自家的附保證型商品, 參考圖2.3。本節就以當時熱賣的商品作介紹與分析。

A 公司變額年金保險

1. 本商品是 GMDB 與 GMAB 的結合。
2. 帳戶連結三個國泰投信代操的基金, 客戶分別可選擇積極、穩健或保守的三個帳戶。如圖2.2所示, 各帳戶期間不同的投資比例。
3. 到期時可一次領或年金化到100歲。
4. 保費爲定期定額型且可彈性繳費。
5. 保證爲增值型, 即保證爲每年保費以1.5%複利。
6. 保險費用爲保費的5%、管理費每月100元。
7. 保證給付費用爲 GMDB 0.02%/年, GMMB 0.05%/年。

此變額年金保險的設計很適合年輕人做退休金規劃。可以在年輕時開始做定期定額投資, 按照自己的風險趨險程度來選擇標的之風險性, 或自設「生命週期投資配置」。對投資不太熟悉的人士提供自動投資配置機制並且在退休時設定爲年金給付, 享受有品質有尊嚴的退休生活。

距離到期日(年)	20年以上	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	五年內
飛翔人生積極投資帳戶	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
飛翔人生穩健投資帳戶	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%	80%	60%	40%	20%	0%
飛翔人生保守投資帳戶	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	20%	40%	60%	80%	100%

圖 2.2: 生命週期投資配置比率

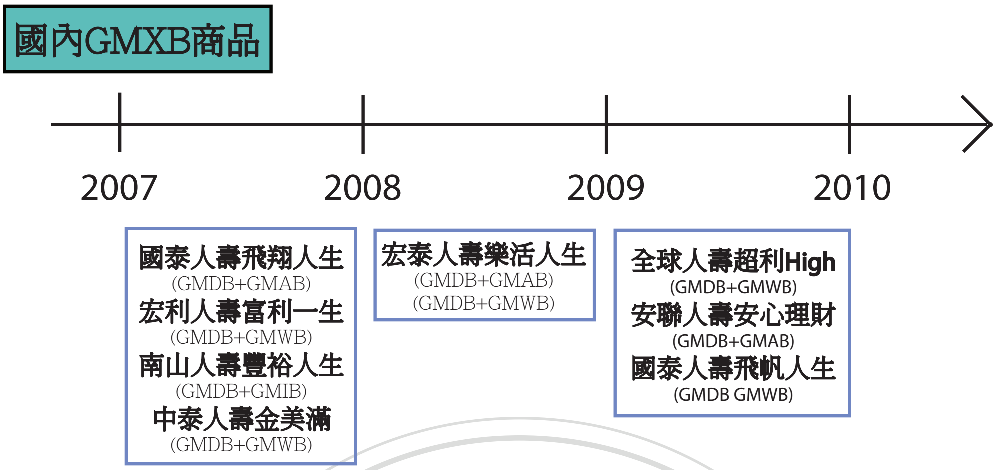

圖 2.3: 國內發行的GMXB 商品

B 公司的保證型商品

1. 投資標的分為 Global Strategy Dynamic(動能型) 和 Global Strategy Defensive(防禦型) 兩種。
2. 投資年期10年或15年。
3. 本商品為 GMMB 和 GMDB 的結合。
4. 美元計價。保費上限為25萬美元
5. 滿期保險金為躉繳保費、滿期保價、投資本金+80%的每季保價相對投資本金之增長三者取其大。死亡保險金為帳戶價值與投保金額乘保險金額比例 (corridor) 二者取其大。
6. 投資標的的投資管理機制分兩方面:(1) 目標波動率、(2) 利率觸發機制。

商品分析

1. 風險管控機制: 自動調整投資標的股債分配, 透過利率和波動率觸發機制來達到高賣低買的目的, 可降低保戶的投資風險。同時也降低保險公司因股價急速下跌帶來的保證風險。
2. 保險保障/到期保本: 提供保本機制, 讓投資可完整得到保障。
3. 由於本公司為外商公司, 其母公司為跨國保險集團。因此可以得到外國母公司的支援, 如商品連結標的的管理、母公司旗下的再保險公司分擔並且和國外銀行合作一同承擔風險。

2.3 文獻回顧

大部份的保險公司沒有一套可信賴的解約模型, 也沒有精確地持續追蹤和預測脫退率。Richardson and Hartwell (1951) 探討脫退行爲和總體經濟的關係。他們注意到保戶比較容易將舊的保單解約, 而較不會解約生效幾年內的保單。其原因是因爲保單在剛生效的數年內其價值是較低的。Outreville (1990) 也從實際的數據中得到在美國和加拿大的保險市場中, 失業率和脫退率有著顯著的關係。對於傳統的保險商品, 由於其訂價與利率有關, 因此當利率上升到高於保險公司所宣告的利率時, 保戶會傾向於解約, 並且將解約金投入到比較高利率的標的。但是附保證投資型商品的訂價卻是假設和外在環境獨立的已知脫退率, 就如 Møller (1998) 求得投資型保單最小化風險避險策略中所假設一樣。Christian, Kraut & Schoenmaekers (2012) 指出投資型保單的訂價應與保戶的解約行爲有關。在文中也指出由於保戶的解約行爲, ING集團2011在美國認列 9 億歐元到 1.1 億歐元的費用。因此如何得到**經濟因素下的解約率**來計算附保證保單的價格就格外重要。

Kolkiewicz & Tan (2006) 研究經濟因子影響脫退率下基礎單位連結保險 (unit-linked insurance) 的保費。[1] 在文中介紹了一套方法, 可以透過資產的波動來模擬保戶的解約行爲。他們使用標點法過程 (marked point process) 來得到數個因子會影響脫退率的模型。更進一步, 在文章中具體假設保單中止的原因有死亡以及資產波動造成的解約行爲。結果顯示經濟因素產生的解約行爲對於保單價格有很大的影響。

雖然 Black - Scholes model (1973) 已廣泛地用於金融商品的訂價, 但是仍存在不符合現實的情況。例如大部分的價格過程會有波動簇情形發生 (the presence of volatility clusters)。也就是說大的波動常常跟隨大的波動, 小的波動跟隨小的波動。換言之, 波動幅度會持續數天。波動幅度的出現不隨機。這是隨機漫步理論無法解釋的現象。Bollerslev & Ghysels (1992,1996) 發展 ARCH model 來模擬財務資料解決這個問題。另一個 Black - Scholes

[1] 基礎單位連結保險 (unit-linked insurance) 是投資型保單的一種。保戶所繳交的保費會投資於開放式投資公司 (open-ended investment company)。在到期時, 保險金爲保費於投資帳戶的累積價值。在保單有效期間, 保戶有保證最低的死亡保險金。

model無法符合的現象是 Rubinstein(1995) 所稱的 smiles 和 skews effect。volatility smile 爲長期觀察在價平選擇權會比在價內或價外的選擇權的隱含波動性小。另外當我們以選擇權的波動度和執行價格分別代表 xy 軸時, 它們的關係爲負斜率的我們稱爲 volatility skew。但 Black-Scholes model 卻顯示波動愈大選擇權的價格愈高, 這與眞實情況不同。Heston (1993) 提出一個隨機模型並且其波動是由另一個隨機過程來定義。這個模型可以改善 Black-Scholes model 的缺點。Gesser & Poncert (1997) 證明 Heston (1993) 的模型在執行的可行性和方便性都較其他的模型更好。因此在這篇論文中我們使用 Heston (1993) 的模型來產生股價的模擬。

Föllmer (1986) 介紹在不完全市場下對或有權益 (contingent claim) 避險的方法。他們得到一套策略可以最小化複製投資組合誤差的變異數。在之後 Schw eizer (1988) 等人推廣相關的結果到更一般的情況。但是他們的成果更精確地說是得到避險的方法, 而不是得到權益的價格。考慮離散時間的假設下, Shäl (1994) 藉由最小化可行策略下複製誤差的變異數, 得到權益 (claim) 的"公平避險價格" (fair hedged price)。但是這個方法的缺點是所得到的價格可能爲負的。Mercurio (2001) 假設在離散時間下投資人的偏好可以用二次效用函數來表示並且其目的是要最大化最終資產的效用值。賣價的定義是用以下的方法: 投資人不在乎以下兩種情況: 1. 賣出這個權益並且最適地投資資產和債券 (最適的意思是最大化最終財富的效用) 2. 最適地投資在資產和負債而不交易這個或有權益。在這樣的定義之下就可以得到價差是比例於投資人的風險趨避程度、權益交易的數量以及複製誤差最小的標準差。相同的方法也出現在 Ho and Stoll (1981,1983) 得到股票交易時準備金的買賣費用價差。一般請求權在交易時會存在**買賣價差**(bid-ask spread), 因此我們希望透過 Mercurio (2001) 的方法得到附保證保險內含選擇權的買賣價格。

Chapter 3

模型建立

3.1 保證最低滿期金額保險(GMMB) 現金流

假設一張 GMMB 契約於保戶 x 歲時發行, 並持續 n 年。每月期初固定收取保單管理費率 m (management expense ratio, MER)。保單管理費中有一部份爲支付保證給付的費用率 m_c, 其值爲 MC_t (margin offset)。並且此附保證投資型商品所聯結投資標的爲股票指數型基金。G 爲每單位 GMMB 給予之期滿時間 T 的保證金額。F 爲帳戶的市場價值 (market value of the account)。爲了方便理解, F_{t^-} 爲時間點 t 時 GMMB 投資型商品未扣除手續費狀態。F_{t^+} 爲時間點 t, 即每個月月初, GMMB 投資型商品已扣除手續費的帳戶價值。

假設保單爲躉繳保費, 保戶繳交保費時保險公司即收取第一筆費用。因此第一期的保費現金流 (cash flow) 爲

$$F_{0^+} = F_{0^-} \times (1 - m),$$

$$MC_0 = F_{0^+} \times m_c,$$

其中 m_c 爲支付保證給付的費用率。在 t=1時的帳戶價值

$$F_{1^-} = \frac{S_1}{S_0} \times F_{0^+}.$$

其中 S_0、S_1 爲股價在 t=0以及 t=1時的價格。

我們可以用代數符號將現金流以一般化表示:

時間 t 帳戶價值爲

$$F_{t^+} = F_{t^-} \times (1-m).$$

月底之保單價值

$$F_{t+1^-} = \frac{S_{t+1}}{S_t} \times F_{t^+}.$$

因此,

$$F_{t^+} = F_{t^-} \times (1-m) = \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \times F_{t-1^+}\right] \times (1-m).$$

可以得到時間點 t 與 t+u 的期初帳戶價值的關係爲

$$F_{(t+u)^+} = F_{t^+} \times \frac{S_{t+u}(1-m)^u}{S_t}.$$

時間點 t 期的帳戶價值與所繳保費的關係爲

$$F_{t^-} = F_{0^-} \times \frac{S_t(1-m)^t}{S_0}.$$

若契約滿期時間爲 T, 契約的內含選擇權給付爲

$$\max(0, G - F_T) = (G - F_T)^+.$$

此契約的負債期望值爲

$$C_t = -{}_tp_x^\tau \times MC_t + {}_{t-1|1}q_x^d (G - F_t)^+ \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中 ${}_tp_x^\tau$ 爲保單有效機率。此契約總負債現值爲

$$L_0 = \sum_{t=0}^{n} C_t e^{-rt}.$$

其中 MC_t 爲時間 t 時, 由帳戶價值中收取之手續費, C_t 爲時間 t 時 GMMB 商品之負債期望值, L_0 爲未來各期的負債以利率 r 折現的總值。將各期預期的淨現金流折現相加, 求出並分析 NPV (net present value) 的方法, 稱爲精算評估方法 (actuarial approach) 。

表3.1爲一年期 GMMB 商品現金流的例子。股價爲一模擬情況, 存活率及死亡率如表中所示。假設被保險人50歲, 期初投資100, 保證金額爲100, 每個月的保單管理費率 (m) = 0.02/12, 保證給付費用率 (m_c) = 0.005/12。每個月的保證給付費用率內含於保單管理費率。在期初,

表 3.1: GMMB在模擬情境下的現金流

Month	Equity Index (simulated)	F_{t^-}	${}_tp_x^\tau$	${}_{t\|1}q_x^d$	EV of MC_t	EV of MB outgo	C_t
0	1	100	1	0.0003	0.042		-0.042
1	0.9935	99.19	0.9931	0.0003	0.041	0	-0.041
2	1.0227	101.93	0.9862	0.0003	0.042	0	-0.042
3	1.0399	103.48	0.9793	0.0003	0.042	0	-0.042
4	1.0761	106.9	0.9725	0.0003	0.043	0	-0.043
5	1.1095	110.03	0.9658	0.0003	0.044	0	-0.044
6	1.08	106.93	0.9591	0.0003	0.043	0	-0.043
7	1.1195	110.65	0.9524	0.0003	0.044	0	-0.044
8	1.2239	120.77	0.9458	0.0003	0.048	0	-0.048
9	1.0894	107.32	0.9392	0.0003	0.042	0	-0.042
10	1.0865	106.86	0.9327	0.0003	0.042	0	-0.042
11	1.0573	103.81	0.9262	0.0003	0.04	0	-0.04
12	1.015	99.49	0.9198	0.0003	0	0.469	0.469

註 MB:maturity benefit (滿期保險金)

EV of $MC_0 = MC_0 \times {}_0p_x^\tau = (100 \times 0.005/12) = 0.042$,

C_0 = -(EV of MC_0 - EV of MB outgo) $= -(0.042-0) = -0.042$.

在第一年度保單週年日時, 帳戶價値爲

$$F_{1^-} = F_{0^-}\times(1-m)\times S_1/S_0 = 100\times(1-0.02/12)\times\frac{0.9935}{1} = 99.19.$$

保證費用期望值爲

$$\text{EV of } MC_1 = MC_1 \times {}_1p_x^\tau = (F_{1^-} \times m_c) \times {}_1p_x^\tau$$
$$= 99.19 \times (0.005/12) \times 0.9931 = 0.041.$$

滿期時, EV of MB outgo $= (G - F_{12^-}) \times {}_{12}p_x^\tau$

$$= (100 - 99.49) \times 0.9198 = 0.469$$

3.2 財務市場模型

Black, Scholes & Merton (1973) 假設股價指數服從幾何布朗運動 (Geometric Brownian motion), 推導出衍生性金融商品的價格。然而在實證的研究上卻顯示 Black-Scholes model 無法敍述時間序列中價格會出現 volatility cluster 的現象。Bollerslev & Ghysels (1992,1996) 發展出 ARCH model 來改進 Black-Scholes model 的缺點。Hull, White, Scott & Wiggins (1987) 研究標的資產的價格可以用一個隨機過程來模擬, 而其波動程度又是另一個與其獨立或非獨立的隨機過程。這樣的假設可以讓模型更貼近實證。在本篇論文我們使用 Heston (1993) 所提出的模型。在 P - measure 下, 標的資產的模型爲

$$dS(t) = S(t)[u(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_s(t)]$$

並且其變異數過程 (variance process) 爲 Cox et al. (1985) 提出的模型

$$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v(t),$$

其中 $v(t)$ 是 drift term, 同時也是股價的隨機變異數。$(W_s(t), W_v(t))$ 是標準布朗運動 (standard Brownian motion), 滿足$cov(dW_s, dW_v) = \rho dt$。在本文中利率 $r(z)$ 不爲隨機過程, 由時間 t+s 折現至時間 t 的公式爲

$$B^{-1}(t, t+s) = e^{-\int_t^{t+s} r(z)dz}$$

同時爲了計算的簡潔, 我們也假設沒有股利的發放。

Kolkiewicz & Tan (2006) 表示由於在 Heston (1993) 標的資產的模型假設下, 波動不代表任何一個資產並且沒有一個可交易的資產是完全正相關的, 所以我們無法如同 Black-Scholes 建立一個包括標的資產和債券的無風險組合來求解選擇權的價格。Scott (1987) 指出選擇權訂價函數必須滿足某一個偏微分方程, 但其解不是唯一的。除非可以明確地說明風險的市場價格。Cox et al. (1985) 具體地指出波動風險溢酬的公式, 這個公式是和變異數成正比: $\lambda(S, v, t) = \lambda v$。因此可以在 Q measure 下, Heston model 與波動風險溢酬的公式可表示爲

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)[\sqrt{1-\rho^2}dW_1(t) + \rho dW_2(t)],$$

變異數過程 (variance process) 爲 $dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t)$。其中 $r(t)$ 是無風險利率函數, $v(t)$ 是股價的隨機變異數。$(W_s(t), W_v(t))$ 是標準布朗運動 (standard Brownian motion), 滿足 $cov(dW_s, dW_v) = \rho dt$。參數 κ, θ, σ and ρ 可以用 S 的選擇權市價來估計。Bakshi et al. (1997) 將這個模型套入 S&P500指數求出對應的參數, 結果以該模型求的之選擇權價格與眞實價格是相當接近的。

圖3.1與圖3.2分別爲 Heston model 模擬出一組 5 年期 (365 ×5 日) 的股價波動度 $v(t)$ 以及股價過程。假設參數 $r = 0.02, \rho = 0.5, k = 1.6, \sigma = 0.25$ and $\theta = 0.04$。

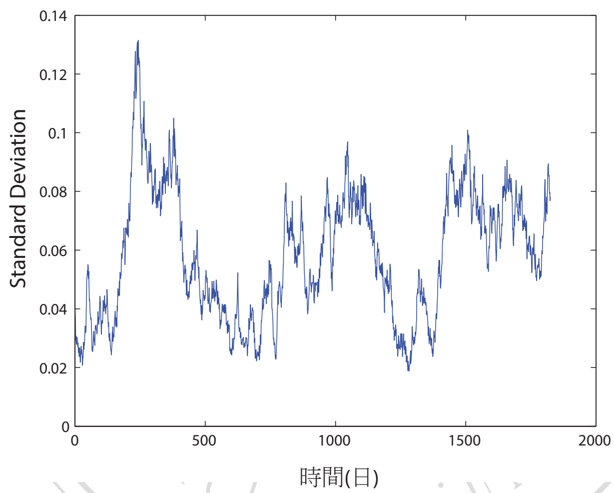

圖 3.1: 模擬股價波動

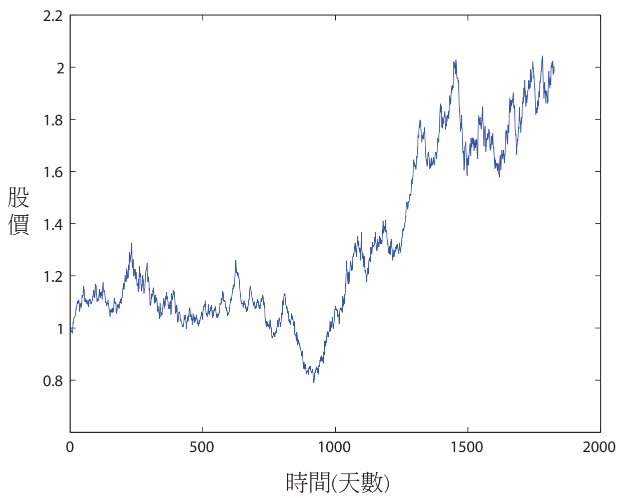

圖 3.2: 模擬股票價格

3.3 脫退率模型

Kolkiewicz & Tan (2006) 指出脫退行爲可能受到經濟與非經濟因素影響。假設 L_x 爲時間 t=0 時 x 歲的人數, $T_1, T_2, \ldots T_{L_x}$ 爲獨立且同分佈非負隨機變數, 表示個人距離死亡而脫退的時間。時間 t 時的總脫退人數可以用下列的計數過程 (counting process) 來表示:

$$N_t = \sum_{i=1}^{L_x} I(T_i \leq t),$$

其中 $I(T_i \leq t)$ 表示生存時間小於 t 的指標函數. 當 $I(A) = 1$ 時, 代表 A 事件發生。而當 $I(A) = 0$ 時, 代表 A 事件不發生。

假設預期脫退力爲 μ_{x+t} , 則所有被保險人的瞬時死亡密度函數爲

$$(L_x - N_t)\mu_{x+t}dt = \lambda_t dt.$$

$\lambda = \{\lambda_t\}_{(0<t<T)}$ 爲一可預測的隨機密度過程 (stochastic intensity process)。

由於評價時間點爲離散且實際死亡人數與預期結果難一致, 故定義核保誤差爲 M_t,

$$M_t \equiv N_t - \int_0^t \lambda_s ds,$$

其中 M_t 爲平賭過程 (martingale)。

假設脫退力函數 $\mu_x(t)$ 是由死亡和財務市場波動造成的脫退。因此我們假設 $\mu_x(t;\omega)$ 是由死力與另一財務市場相關的危險率所組成的線性函數:

$$\mu_x(t;\omega) = \mu_x^d(t) + \mu_x^e(t;\omega),$$

其中 $\mu_x^e(t;\omega)$ 是受到經濟影響的脫退。使用這個方法可以捕抓到像是利率或是資產價值變動的脫退行爲。參考 Kolkiewicz & Tan (2006) 假設受經濟因素而脫退的原因是股價在短時間內的波動。因此假設 $\mu_x^e(t)$ 爲以下形式:

$$\mu_x^e(t) = h(\overline{v}(t, t_a)),$$

其中

$$\overline{v}(t, t_a) = \frac{1}{t - \max(t - t_a)} \int_{\max(t-t_a)}^{t} \sqrt{v(s)}ds, \tag{3.1}$$

$$h(x) = \begin{cases} \gamma \left[\frac{x-k_1}{k_2-K_1}\right] & \text{if } k_1 \leq x \leq k_2 \\ \gamma & \text{if } k_2 \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.2}$$

式(3.1)代表時間點 t 時具有延遲性的開方波動平均, 即 $(t-t_a, t)$ 時間內開方的波動再取平均。式(3.2)表示當 $h(x)$ 介於 k_1 到 k_2 時是呈現一次方上升, 而超過 k_2 時死力的極限爲 γ , 如圖3.3所示。其中 $k_1 = 0.3, k_2 = 0.35, \gamma = 0.1$。

圖3.4中, 假設參數 $k_1 = 0.3, k_2 = 0.35, \gamma = 0.1$ and $t_a = 3$。圖3.1中, 可以發現在約第300日與第1400日期間股價的波動度是很劇烈的, 因此在圖3.4中保戶受經濟影響的脫退力在這段期間也會明顯上升, 最大值爲 $\gamma = 0.1$。

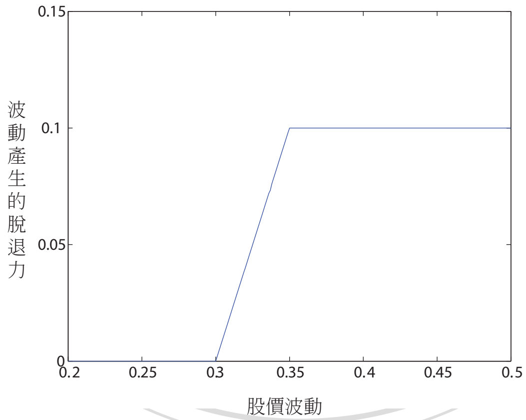

圖 3.3: 受經濟影響的脫退力與股價波動的關係

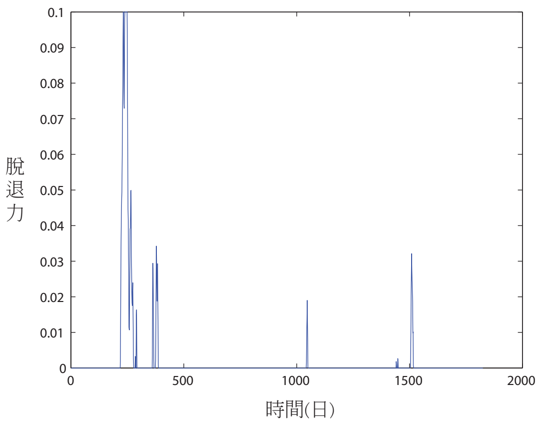

圖 3.4: 受經濟影響的脫退力

3.4 偏好均變異數準則

Frittelli (2000) 歸納交易市場可依其特性分爲以下三類:

完全市場 (complete market):

在完全市場下, 請求權 (claim) 存在唯一自我籌資策略 (self-financing strategy), 可以利用市場交易標的複製請求權價值, 且請求權價值與交易者之風險偏好無關。若 ω 爲未來給付的價值, 以 Q 爲平賭測度 (Martingale), 則請求權價值爲 $\pi(\omega) = \mathrm{E}_Q(\omega)$。

整體不完全市場 (totally incomplete market):

於整體不完全市場中, 無法利用市場交易標的複製請求權價值。請求權的價值完全依交易者之風險態度而定。假設 u 爲交易者之效用函數, 則交易者認定請求權之價值爲 $u(\pi(\omega)) = \mathrm{E}(u(\omega))$

不完全市場 (incomplete market):

不完全市場介於完全市場與整體不完全市場之間。事件部份可由市場上交易資產複製, 部分則無法利用市場資產複製。而衡量事件的價值仍需加入交易者之風險偏好。而請求權價值介於$\{inf[\mathrm{E}_Q(\omega)], sup[\mathrm{E}_Q(\omega)]\}$。

根據 Frittelli (2000) 對於交易市場的定義, 保險市場即爲不完全市場。因爲以附保證保險爲例, 保險人的財務風險雖可藉由避險組合規避, 但對於**核保風險**, 若保險人在保單發售之初保單數量無法準確估計, 那麼就無法以大數法則達到充分避險。保險人也無法在市場上以投資組合複製死亡風險。因此保險市場爲一**不完全市場**, 而且對於保險人而言必須承受因估計誤差所產生的**內在風險**。

假設被保險人皆爲 x 歲, 投保人數共有 L_x 人。保單期滿的給付責任與存活人數有關。假設保險公司的滿期責任爲 $g(S_T) = \max(F_T - G, 0)$, 給付金額的現值爲 H、保證金額爲 G, 則

$$H = g(S_T)B_T^{-1}(L_x - N_T).$$

H 在時間 t 時的價值爲

$$V_t = \mathrm{E}\left[H|F_t\right] = \mathrm{E}\left[(L_x - N_t)|F_t\right]\mathrm{E}\left[g(S_T)B_tB_T^{-1}|F_t\right], \tag{3.3}$$

其中

$$\mathrm{E}\left[(L_x - N_t)|F_t\right] = (L_x - N_t)_{T-t}P_{x+t},$$

且令

$$F^g(t, S_t) = \mathrm{E}\left[g(S_T)B_tB_T^{-1}|F_t\right].$$

因此, 式(4.3)可化簡成

$$V_t = (L_x - N_t)_{T-t}P_{x+t}F^g(t, S_t).$$

又因爲財務風險可經由複製投資組合避險, 但核保風險無法利用資本市場規避。所以 V_t 可寫成

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^{M-1}\xi_i\Delta S_i^* + L_t^H,$$

其中 $V_0 + \sum_{i=0}^{M-1}\xi_i\Delta S_i^*$ 爲財務風險, 所以可避險。但 L_t^H 爲脫退經驗產生的誤差項, 即爲保險公司的內在風險。

$$\begin{aligned} L_t^H &= \sum_{j=1}^{t}\left[(L_x - N_j)_{T-j}P_{x+j} - (L_x - N_{j-1})_{T-j+1}P_{x+j-1}\right]F^g(t, S_t) \\ &= \sum_{j=1}^{t}{}_{T-j}P_{x+j}\left[(L_x - N_j) - (L_x - N_{j-1})P_{x+j-1}\right]F^g(t, S_t). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta L_t^H &= L_t^H - L_{t-1}^H \\ &= {}_{T-t}P_{x+t}\left[(L_x - N_t) - (L_x - N_{t-1})P_{x+t-1}\right]F^g(t, S_t), \end{aligned}$$

其中定義 $\Delta L_0^H = 0$, $N_0 = 0$.

Mercurio (2001) 考慮投資者的目標是最大化期末財富效用, 在不完全市場下得到因投資人的風險趨避性所產生的選擇權買賣價差 (Bid-Ask Spread)。假設 W_M 爲到期日 M 時的財富變數, 定義財富的效用函數爲 $\mathrm{U}(W_M) = \mathrm{E}(W_M) - A\mathrm{Var}(W_M)$ 其中 $A > 0$ 爲風險趨勢係數。當風險趨勢係數 A 愈大時, 會讓投資者面對風險時的效用愈低。

Mercurio (2001) 說明當投資者交易 α 個請求權, 其中每個請求權價值爲 V, 則請求權的價值 V 必須滿足

$$V = V_\alpha = \widehat{E}(H) - A\alpha\{\sum_{k=0}^{M-1}\prod_{j=k+1}^{M-1}(1-\lambda_j)(\Delta L_k^H)^2\}. \tag{3.4}$$

在式(3.4)中, 因爲 $\mathrm{E}(\Delta S_k|F_k) = 0$, 所以 $\lambda_k = 0$。因此式(3.4)可化簡爲

$$V = V_\alpha = \widehat{E}(H) - A\alpha\{\sum_{k=0}^{M-1}(\Delta L_k^H)^2\}.$$

第一項就如 Schal's (1994) 不考慮投資者風險特性所得出的請求權價格。而第二項可看作是風險溢酬 (risk premium)。

我們可以看到請求權的價值與投資者的風險特性 (A) 有關。當投資者在作交易的時候, 根據他的風險特性來要求風險溢酬。當投資者買入 β 個請求權時, 對於每個請求權投資者願付的價值 (bid price) 爲

$$V_\beta = \widehat{E}(H) - A\beta\{\sum_{k=0}^{M-1}(\Delta L_k^H)^2\}$$

當投資者賣出 β 個請求權時, 對於每個請求權投資者願賣的價值 (ask price) 爲

$$V_{-\beta} = \widehat{E}(H) + A\beta\{\sum_{k=0}^{M-1}(\Delta L_k^H)^2\}$$

因此我們可以得到: 對於投資者交易 β 個請求權時, 該請求權存在買賣價差 (Bid-Ask Spread)

$$2A\beta\mathrm{E}\{\sum_{k=0}^{M-1}(\Delta L_k^H)^2\},$$

其中

$$\Delta L_t^H = {}_{T-t}P_{x+t}\left[(L_x - N_t) - (L_x - N_{t-1})P_{x+t-1}\right]F^g(t, S_t).$$

Chapter 4

研究結果

4.1 投資型商品與情境假設

假設情況:

1. 契約爲附保證滿期型商品 (GMMB), 給付型態爲 $\max(G - F_T, 0)$。G 爲最低給付保證, F_T 爲滿期時的帳戶價值。
2. 保險躉繳, 保險期限爲五年, 十年期與十五年期。
3. 期初被保險人爲1位40歲男性, 即 $L_x = 1$。
4. 假設每月收取的手續費率 (MER) 爲0.02/12。
5. 假設死亡函數滿足 Gompertz 模型, 契約訂價時估計死力爲

$$\mu_{x+t} = 0.0035 \times 1.072^{x+t}. \tag{4.1}$$

6. 經濟因子脫退力模型與參數假設:

   $k_1 = 0.3, k_2 = 0.35, \gamma \in \{0.005, 0.01\}, t_a = 3$ (平均波動的天數)

$$\mu_x^e(t) = h(\overline{v}(t, t_a)),$$

其中

$$h(x) = \begin{cases} \gamma \left[\frac{x-k_1}{k_2-K_1}\right] & \text{if } k_1 \leq x \leq k_2 \\ \gamma & \text{if } k_2 \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{4.2}$$

$$\overline{v}(t, t_a) = \frac{1}{t - \max(t - t_a)} \int_{\max(t-t_a)}^{t} \sqrt{v(s)} ds. \tag{4.3}$$

7. 財務模型假設:

   (a) 同時假設期初帳戶與股價同爲100。
   (b) 滿足無套利假設。
   (c) 不發放股利。
   (d) 變異數過程 (variance process) 模型爲 Cox et al. (1985) 提出

   $$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v(t).$$

   股票價格過程 (Stock price process) 爲 Heston 所提出。

   在 P-measure 下股票價格模型

   $$dS(t) = S(t)[u(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_s(t)].$$

   在 Q measure 下,

   $$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)[\sqrt{1-\rho^2}dW_1(t) + \rho dW_2(t)].$$

   (e) 假設參數 $r = 0.02, \rho \in \{-0.5, 0, 0.5\}, k = 1.6, \sigma \in \{0.25, 0.35\}$ and $\theta = 0.04$。

求得風險價差的計算, 我們使用模擬 (simulation) 的技術。以下爲我們在模擬方法的步驟。

1. 產生股價波動軌跡

Cox et al. (1985) 提出變異數過程 (variance process) 的模型爲

$$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v(t).$$

我們使用一階估計

$$v(t_i + \Delta) = v(t_i) + k[\theta - v(t_i)]\Delta + \sigma\sqrt{v(t_i)}\epsilon_i \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

其中 $\Delta = \frac{T}{N}$ 是時間間隔, 每個間隔點爲 $t_i = i\Delta$。隨機變數{ϵ_i; i=0,1,...,N-1}是互相獨立的標準常態分配。

接著我們假設 $v(0)=0$, 然後使用遞迴方法 (recursive approach) 就可以得到變異數軌跡的模擬。

在 Q-measure 下, Heston model 與波動風險溢酬的公式可以表示為

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)[\sqrt{1-\rho^2}dW_1(t) + \rho dW_2(t)].$$

我們使用一階估計

$$S(t) = S(t-1) + rS(t-1)dt + \sqrt{v(t)}S(t-1)\times$$
$$\left[\sqrt{1-\rho^2}dW_1(t) + \rho dW_2(t)\right] \quad i = 1,2,3,\ldots$$

2. **計算股價的平均波動程度 $\overline{v}$(t;t_a) 造成的脫退力** (force of lapse)

經濟影響的脫退模型

$$\mu_x^e(t) = h(\overline{v}(t,t_a)),$$

其中

$$h(x) = \begin{cases} \gamma\left[\frac{x-k_1}{k_2-K_1}\right] & \text{if } k_1 \le x \le k_2 \\ \gamma & \text{if } k_2 \le x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{4.4}$$

$$\overline{v}(t,t_a) = \frac{1}{t-\max(t-t_a)}\int_{\max(t-t_a)}^{t} \sqrt{v(s)}ds. \tag{4.5}$$

以 Riemman sum 的技巧求出 $\overline{v}(t;t_a)$ 的近似值。

$$\overline{v}(t;t_a) \approx \frac{1}{t-max(t-t_a,0)}\sum_{max(t-t_a,0)}^{t}\sqrt{v(s)}ds$$

如(4.5)所示, $\overline{v}(t,t_a)$為時間 t 前 t_a 日開方波動的平均值。而當 $t < t_a$ 時, 平均的天數為 t 日。

3. 公平價格

假設保險公司每月收取費用率 m , 則在第 T 年時帳戶價值與股價的關係爲

$$F_T = F_0 \frac{S_T}{S_0}(1-m)^{12T}.$$

所以可以得到在期初選擇權的價格爲

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT}\mathrm{E}^Q\left[(G - F_T)\right] \\ &= e^{-rT}\mathrm{E}^Q\left[G - F_0\frac{S_T}{S_0}(1-m)^{12T}\right] \\ &= (1-m)^{12T}\{e^{-rT}\mathrm{E}^Q\left[(G(1-m)^{-12T} - S_T)^+\right]\}. \end{aligned}$$

以 Black-Scholes 公式求解可以得到

$$V_0 = Ge^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0(1-m)^{12T}\Phi(-d_1)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln[S_0(1-m)^{12T}/G] + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{ln(S_0/G) + (r + ln(1-m)^{12T} + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

4. 風險價差

假設訂價時的死力滿足 Gompertz 模型, 因此至 t 年後的存活率爲

$${}_tp_x^d = e^{-\int_x^{x+t}\mu_x ds} = exp[-0.0035 \times (ln1.072)^{-1} \times (1.072^{x+t} - 1.072^x)]$$

上標 d 代表保戶因死亡而脫退。在保單有效的期間, 保戶也會因爲股價的波動而解約。因此保單有效的比例必須考慮經濟的因素而產生的脫退。

在上一章指出保險公司的風險爲脫退經驗產生的誤差。所以我們可以得到

$$\Delta L_t^H = {}_{T-t}P_{x+t}\left[(L_x - N_t) - (L_x - N_{t-1})P_{x+t-1}\right]F^g(t, S_t).$$

其中 N_t 爲眞實的死亡人數, 即爲一併考慮經濟因素後造成的脫退率。而 P 爲訂價時假設滿足 Gompertz 模型的存活率。

所以我們可以得到對於保險公司, 一張保單 (即$\beta = 1$) 的買價 (bid price) 爲

$$V_0 - \left\{ A \times \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{M-1} (\Delta L_k^H)^2 \right] \right\}$$

賣價 (ask price) 爲

$$V_0 + \left\{ A \times \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{M-1} (\Delta L_k^H)^2 \right] \right\}$$

買賣價差 (bid ask spread) 爲

$$2A \times \mathrm{E}\{ \sum_{k=0}^{M-1} (\Delta L_k^H)^2 \}$$

4.2 數值呈現與整理

由表4.1到表4.6分別爲5年期、10年期及15年期的躉繳保費附滿期保證商品的買賣價差。表4.1到表4.3中, 受經濟影響的參數 $\gamma = 0.005$, 而表4.4到表4.6中, 受經濟影響的參數 $\gamma = 0.01$。

表 4.1: 5年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.005$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	19.2610	19.2325	19.2896	0.0285	0.15%
0.02	19.2610	19.2039	19.3181	0.0571	0.30%
0.03	19.2610	19.1754	19.3467	0.0856	0.44%
			G=95		
0.01	16.6693	16.6391	16.6994	0.0302	0.18%
0.02	16.6693	16.6090	16.7295	0.0603	0.36%
0.03	16.6693	16.5789	16.7597	0.0904	0.54%
			G=105		
0.01	22.0029	21.9186	22.0871	0.0843	0.38%
0.02	22.0029	21.8343	22.1714	0.1686	0.77%
0.03	22.0029	21.7501	22.2557	0.2528	1.15%

註: 價差 = Ask price - $\widehat{E}(H)$

表 4.2: 10年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.005$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	23.1982	23.0752	23.3211	0.123	0.53%
0.02	23.1982	22.9523	23.4440	0.2459	1.06%
0.03	23.1982	22.8294	23.5669	0.3688	1.59%
			G=95		
0.01	20.7767	20.6750	20.8783	0.1017	0.49%
0.02	20.7767	20.5733	20.9800	0.2034	0.98%
0.03	20.7767	20.4717	21.0817	0.305	1.47%
			G=105		
0.01	25.7077	25.5276	25.8879	0.1801	0.70%
0.02	25.7077	25.3474	26.0681	0.3603	1.40%
0.03	25.7077	25.1672	26.2482	0.5405	2.10%

表 4.3: 15年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.005$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	23.7235	23.5032	23.9438	0.2203	0.93%
0.02	23.7235	23.2829	24.1641	0.4406	1.86%
0.03	23.7235	23.0626	24.3844	0.6609	2.79%
			G=95		
0.01	21.5650	21.4057	21.7242	0.1593	0.74%
0.02	21.5650	21.2465	21.8834	0.3185	1.48%
0.03	21.5650	21.0872	22.0427	0.4778	2.22%
			G=105		
0.01	25.9405	25.6695	26.2116	0.271	1.04%
0.02	25.9405	25.3985	26.4826	0.542	2.09%
0.03	25.9405	25.1274	26.7536	0.8131	3.13%

表 4.4: 5年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.01$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	19.2610	19.1564	19.3657	0.1046	0.54%
0.02	19.2610	19.0517	19.4703	0.2093	1.09%
0.03	19.2610	18.9470	19.5750	0.314	1.63%
			G=95		
0.01	16.6693	16.5898	16.7488	0.0795	0.48%
0.02	16.6693	16.5102	16.8283	0.1591	0.95%
0.03	16.6693	16.4307	16.9078	0.2386	1.43%
			G=105		
0.01	22.0029	21.8774	22.1284	0.1255	0.57%
0.02	22.0029	21.7519	22.2539	0.251	1.14%
0.03	22.0029	21.6263	22.3794	0.3766	1.71%

表 4.5: 10年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.01$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	23.1982	22.8456	23.5507	0.3526	1.52%
0.02	23.1982	22.4930	23.9033	0.7052	3.04%
0.03	23.1982	22.1404	24.2559	1.0578	4.56%
			G=95		
0.01	20.7767	20.5597	20.9936	0.217	1.04%
0.02	20.7767	20.3428	21.2105	0.4339	2.09%
0.03	20.7767	20.12597	21.4275	0.65073	3.13%
			G=105		
0.01	25.7077	25.3947	26.0207	0.313	1.22%
0.02	25.7077	25.0817	26.3337	0.626	2.44%
0.03	25.7077	24.7688	26.6467	0.9389	3.65%

表 4.6: 15年期 GMMB 的風險價差 ($\sigma = 0.25, \rho = 0.5, \gamma = 0.01$)

A	$\widehat{E}$(H)	Bid	Ask	價差	價差/公平保費$\widehat{E}(H)$
			G=100		
0.01	23.7235	23.3943	24.0527	0.3292	1.39%
0.02	23.1982	23.0650	24.3820	0.1332	0.57%
0.03	23.1982	22.7358	22.7358	0.4624	1.99%
			G=95		
0.01	21.5650	21.2966	21.8333	0.2684	1.24%
0.02	21.5650	21.0283	22.1016	0.5367	2.49%
0.03	21.5650	20.7600	22.3699	0.805	3.73%
			G=105		
0.01	25.9405	25.2544	26.6266	0.6861	2.64%
0.02	25.9405	24.5683	27.3127	1.3722	5.29%
0.03	25.9405	23.8822	27.9988	2.0583	7.93%

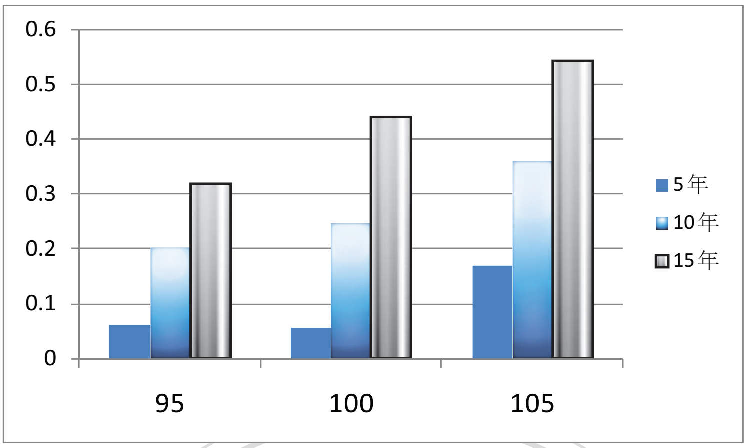

圖 4.1: $\gamma = 0.005$、係數 $A = 0.01$ 的買賣價差

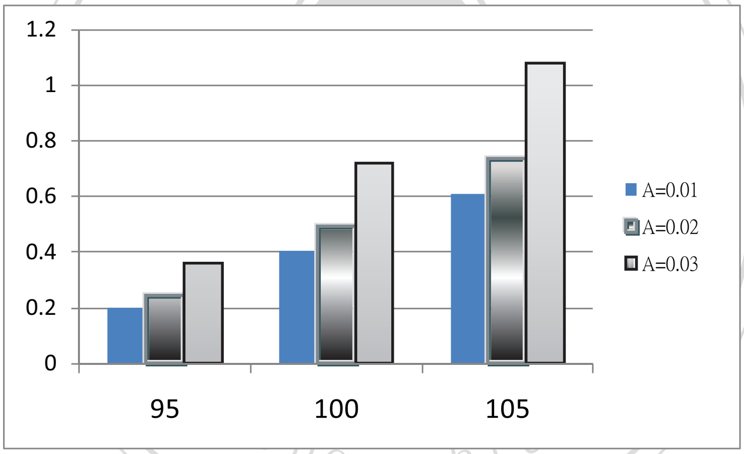

圖 4.2: 10年期、$\gamma = 0.005$ 的買賣價差

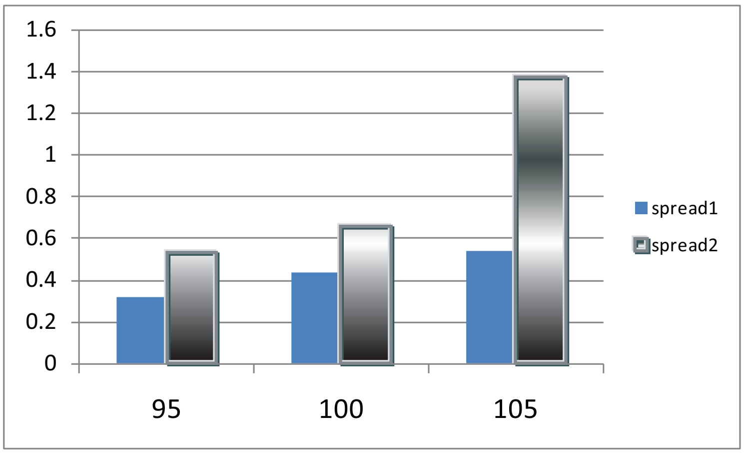

圖 4.3: γ 分別爲 0.005 與 0.01的買賣價差

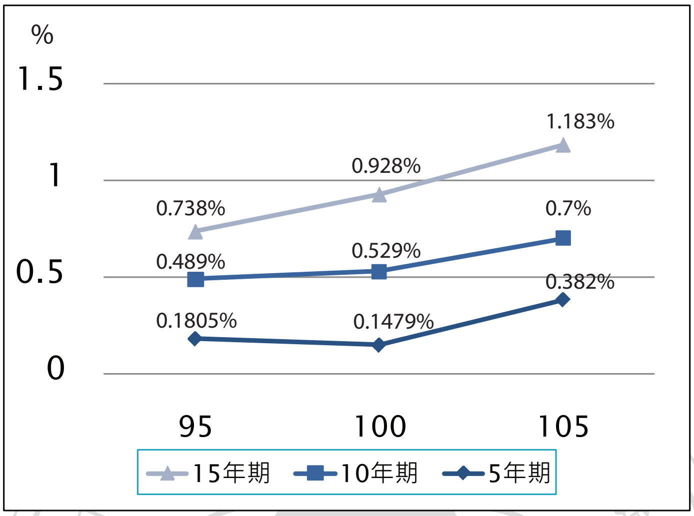

圖 4.4: 價差佔公平保費的比例 $\gamma = 0.005$

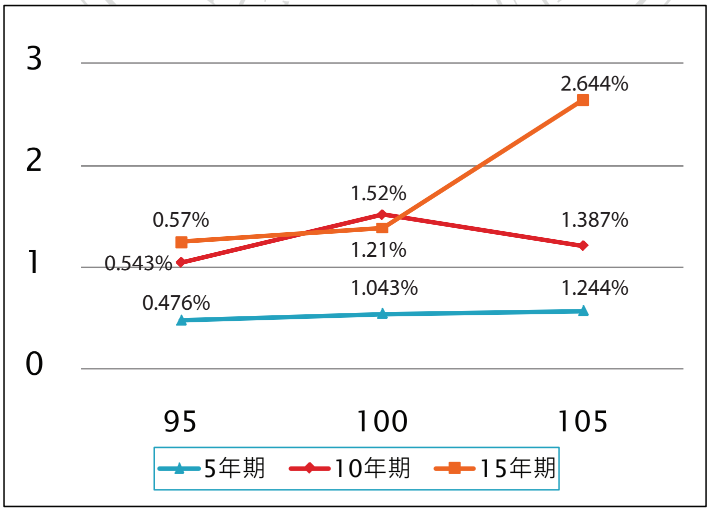

圖 4.5: 價差佔公平保費的比例 $\gamma = 0.01$

Chapter 5

分析與結論

圖 4.1 爲 $\gamma = 0.005$、係數 $A = 0.01$ 時的風險價差。可以發現契約期間愈長價差愈大。保證價格愈高, 價差也會呈現愈大。圖 4.2 爲 10 年期、$\gamma = 0.005$ 時在不同係數 A 下的表現。我們可以看出當保險公司的風險趨避程度愈高, 契約的風險價差愈大。圖 4.3 爲 15 年期 γ 分別爲 0.005 與 0.01 時的風險價差。我們可發現當保戶受經濟影響愈大時, 買賣價差就會愈大。

歸納後可以得到以下結論:

1. **保單期間愈長, 價差愈大。**因爲保單期間愈長, 保險公司必須面臨更多的核保風險。由於訂價時保險公司所假設的存活率不會與眞實情況的存活率相同, 所以保險公司必須承擔在保單期間內的內在風險。

2. **價外賣權的價差高於價內。**價外賣權即保證的價格高於期初的股價, 這個時候保險公司所承擔的風險會高於保證的價格低於期初的價格。因爲保險公司有比較大的可能支付到期時保證價格與帳戶價格的差距。

3. **風險規避程度越高買賣價差越大。**買賣價差是由保險公司的風險趨避程度 A 乘上內在風險。因此當保險公司的風險趨避程度越高, 所願意賣出的選擇權的價格也就愈高。

4. **脫退率受經濟影響愈深, 保單的買賣價差愈大。**由於經濟的波動會造成保戶解約, 因此保險公司必須承擔更多的核保風險。爲了要因應保險公司無法預測的脫退風險, 保險公司必須要收取更高的費用。所以保單的買賣價差也就愈大。

5. **保證的價格愈高, 價差占公平保費的比例愈高。**在圖4.4和4.5中呈現出保證的價格愈高, 價差占公平保費的比例愈高的現象。

本研究的貢獻在於說明保險公司在訂價時, 應該考慮保單的期間、保險公司本身的風險趨避的程度、保證的價格以及保戶受到經濟影響的程度。保險公司不該再以固定的已知脫退率求得保單的價值, 尤其經濟的波動會對保戶的解約行爲有很大的影響時, 保戶不理性的解約會造成保險公司巨大的風險。同時保險公司也應了解本身風險趨避的程度才能得到適合該公司的價格。希望本文能夠對於保險商品的訂價以及保險公司的風險控管有所幫助。

保險公司經過本論文的模型得到的選擇權賣價 (ask price) 後, 再將這個價格用考慮經濟因子後的脫率以年金化的方式求得每個月的保證給付費率, 即保險公司爲了保證價格向保戶收取的費用率。若所求得的費用率是低於模型所假設的保單管理費率, 那麼保險公司即可以考慮本身希望的預期獲利後在選擇權賣價 (ask price) 上再加一個比例。以滿足保險公司司獲利的需求。選擇權賣價 (ask price) 再加一個比例即爲保險公司在考慮經濟脫退因子後的保單管理費率。

本論文可以作以下延伸: 1. **使用同樣的方法在不同給付類型的附保證型保險**. 本論文僅對GMMB 商品作研究, 將來可對 GMDB 或者是更複製的商品, 如 GMAB, 求取經濟因子模型下的風險價差。由於不同的附保證商品會有不同的觸發條件, 所以可能也會得到與本研究不同的結果。2. **使用測度轉換得到選擇權的公平價格**. 以Black - Scholes model 求出選擇權價格是適合的, 但是可嘗試以論文中 Heston model 在 Q-measure 下的模型, 得到選擇價的公平價值. 3. **考慮更多影響脫退率的因子**. 本論文僅考慮股價的波動造成的脫退, 所以納入更多的因子來得到脫退率會讓結果更加的完善.

參考文獻

張士傑著, 保險契約之評價與風險管理, 前程文化事業有限公司, 民國99年6月。

林忠機、楊曉文著, 附保證給付投資型保險之定價與風險評估, 保險事業發展中心, 民國100年10月。

Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1976). The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. Journal of Financial Economics, 3(3), 195-213.

Chang, M. C., & Jiang, S.-j. (2010). Surrender effects on policy reserves: a simulation analysis of investment guarantee contracts. Global Journal of Business Research, Vol. 4, No. 4, pp. 11-21, 2010.

Chris O'Brien (2006) The downfall of equitable life in the United Kingdom:the mismatch of strategy and risk management, Risk Management and Insurance Review, volume9, issue 22,189-204.

Coleman, T. F., Levchenkov, D., & Li, Y. (2007). Discrete hedging of American-type options using local risk minimization. Journal of Banking & Finance, 31(11).

Föllmer, H., & Schweizer, M. (1988). Hedging by sequential regression: An introduction to the mathematics of option trading. ASTIN Bulletin, 18(2), 147-160.

Föllmer, H., & Sondermann, D. (1985). Hedging of non-redundant contingent claims. [Discussion Paper Serie B].

Hardy, M. (2003). Investment guarantees: modeling and risk management for equity-linked life insurance: John Wiley & Sons.

Kim, C. (2005). Modeling surrender and lapse rates with economic variables. North American Actuarial Journal, 9(4), 56-70.

Kolkiewicz, A. W., & Tan, K. S. (2006). Unit-linked life insurance contracts with lapse rates dependent on economic factors. Annals of Actuarial Science, 1, 49-78.

Møller, T. (1998). Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts. ASTIN Bulletin, 28(1), 17-47.

Mercurio, F. (2001). Claim pricing and hedging under market incompleteness and "mean-variance" preferences. European Journal of Operational Research, 133(3), 635-652.

Schäl, M. (1994). On quadratic cost criteria for option hedging. Mathematics of Operations Research, 19(1), 121-131.

Schweizer, M. (1988). Hedging of options in a general semimartingale mode. [Ph.D. dissertation].

Schweizer, M. (1991). Option hedging for semimartingales. Stochastic Processes and their Applications, 37, 339-363.

Schweizer, M. (1994a). Risk-minimizing medging strategies under restricted information. Mathematical Finance, 4, 327-342.

Schweizer, M. (1995b). On the Minimal Martingale Measure and the Föllmer-Schweizer Decomposition. Stochastic Analysis and Applications, 13, 573-599.

Schweizer, M., & Föllmer, H. (1988). Hedging by Sequential Regression: an Introduction to the Mathematics of Option Trading. ASTIN Bulletin, 18(2), 147-160.