行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

還原選擇權風險中立測度之規劃模型
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 95-2416-H-004-039-
執 行 期 間 ：95 年 08 月 01 日至 96 年 07 月 31 日
執 行 單 位 ：國立政治大學應用數學學系

計 畫 主 持 人：劉明郎

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理：劉宣谷、陳韻竹

報 告 附 件 ：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處 理 方 式 ：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 96 年 12 月 11 日

還原選擇權風險中立測度之規劃模型

On Recovering Model of the Risk-Neutral Probability Measure

計畫編號：NSC 95-2416-H-004 -039-
執行期限：自民國 95 年 8 月 1 日起至民國 96 年 7 月 31 日
主持人：劉明郎　國立政治大學應用數學系

中文摘要

本計劃提出線性規劃的方法以選擇權的市場價格還原標的資產的風險中立機率測度，並利用該機率測度計算選擇權的合理價格。為使模型更符合市場機制，模型加入考慮成交量對風險中立機率測度的影響。最後以臺指選擇權(TXO)的交易資料做為實證對象。實證結果指出台灣股票市場加權股價指數的還原機率測度具有雙模的現象，並不符合對數常態分配。我們發現使用還原的風險中立機率測度評價選擇權較 Black-Scholes (BS) 公式更接近市場價格。

Abstract

In this project, we propose a linear programming model to recover a risk-neutral probability measure of the underlying asset price from its observed market option prices and valuate the fair price of options by the resulting risk-neutral probability measure. Finally, we take the real data from TXO in our an empirical study. The empirical study indicates that the probability measure of TAIEX has bimodality and do not satisfy the lognormal distribution. We find that valuation the option’s price by the resulting probability measure is close to the market price than valuation with the BS formula.

1. 前言

1987 年美國股市大崩盤之後，Rubinstein (1994)發現採用 BS 選擇權評價模型求出的合理價格與市場價格產生大幅偏離，他指出此評價理論最大的缺失在於假設標的資產價格波動滿足常態分配和假設波動度為常數。目前有許多模型嘗試改變或放寬其中的假設，進而尋找更為接近市場價格的評價模型。本文以線性規劃的方法尋找接近市場價格的選擇權評價模型。

Rubinstein 及 Jackwerth (1996)提出數學規劃模型評價選擇權的合理價格。他們的模型不需假設標的資產價格波動，但須給定先驗機率分配(prior probability distribution)，在選擇權的理論價格應與觀察到的市場價格一致的條件下，還原隱藏於選擇權市場價格中的風險中立機率測度，並盡可能使該機率分配與先驗機率分配愈接近愈好，再依此機率測度計算滿足市場價格的選擇權的價格。

由於 Rubinstein 及 Jackwerth (1996)的模型須給定先驗機率分配，若市場

價格走勢服從事先給定的先驗機率分配，則我們所求得的機率分配必為該先驗機率分配，毋須多此一舉；反之，若市場價格走勢偏離給定的先驗機率分配，那我們不須逼近此機率分配。因此事先給定先驗機率分配似乎不甚妥當。

尋找符合市場機制的模型還原標的資產的風險中立機率測度已成重要的研究課題。本論文假設選擇權對應同一標的資產，資產價格於到期日的狀態為離散點且個數有限，提出線性規劃的方法還原出符合選擇權市場價格的標的資產風險中立機率測度，利用該測度計算公正的選擇權價格。為使求得的風險中立機率測度函數為平滑可微分的曲線，我們提出平滑風險中立測度模型。為了使選擇權的合理價格更符合市場機制，我們將選擇權的成交量納入考量。

實證研究以臺指選擇權(TXO)的交易資料做為實證對象。實證結果指出台灣股票市場加權股價指數的風險中立機率測度具有雙模的現象(bimodality)，不滿足 BS 所假設的對數常態分配。這表示使用 BS 公式評價台指選擇權可能會和市場價格有相當大的差距。我們發現使用中立機率測度所求得的選擇權價格比使用 BS 公式所求得的理論價格更為接近市場的價格。而考慮成交量所求得的風險中立測度又比之前的模型更貼近市場的價格。

本論文架構如下：第一節為緒論。第二節提出四個還原風險中立機率測度模型。第三節為實證研究的結果。第四節為結論。

2. 由選擇權市場價格還原風險中立機率測度模型

Rubinstein 與 Jackwerth (1996)提出的還原風險中立機率測度之數學規劃模型乃事先給定先驗機率分配，且最小化候選的機率測度與先驗分配之平方誤差，因此候選的風險中立機率測度可能有其侷限性。本節將此模型推廣成毋需先驗機率分配之線性規劃模型，在不受先驗機率分配之限制下還原風險中立機率測度。為使模型更符合市場機制，我們將選擇權的成交量加入模型。最後，利用該測度計算合理的選擇權價格。

首先，給定六點基本假設如下：

1. 投資人認同歐式選擇權與其標的資產之市場價格。
2. 市場無任何套利機會存在。
3. 選擇權皆為歐式選擇權。
4. 只考慮單期的情況，即持有選擇權直到到期日。
5. 忽略交易費用及保證金的費

用。

6. 歐式選擇權之標的資產與到期日皆相同。

Breeden 與 Litzenberger (1978)指出在市場不具任何套利機會的情況下，面對一序列對應無限多個相異履約價格之歐式買權及歐式賣權，即履約價最低為 0，最高為∞，必存在一組唯一的隱含風險中立機率測度。但此理論應用到實務上則有其限制，因為選擇權市場上的履約價恆大於零，且最高履約價格必為一有限的正數，故在市場不存在任何套利機會，可能存在多組風險中立的機率測度使歐式選擇權的市場價格、標的資產的市場價格皆服從平賭過程，因此如何選擇適當的風險中立機率測度成為主要的研究課題。

由於標的資產的到期價格S_T是未知的，在離散架構的設定下，假設標的資產價格到期時有n個狀態，由低至高之順序依次為$S_1, S_2, \cdots, S_n$，如圖 4.1 所示，其中t為觀察之時點。

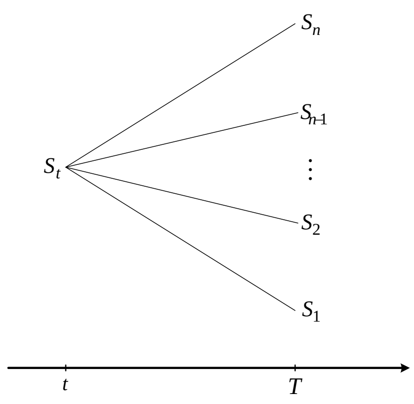

圖 4.1 標的資產可能的到期價格

面對一序列具相同標的資產與到期日，但履約價格相異之m個歐式買權C_i及m個歐式賣權P_i，其中K_i分別為C_i與P_i的履約價格，$i = 1, 2, \cdots, m$。假設該組市場價格無任何套利機會存在，根據等價平賭過程法則，必存在一風險中立的機率測度Q等價於主觀機率測度P，使歐式選擇權與其標的資產的價格變動過程在機率測度Q下服從平賭過程，即

$$S = r^{-T} d^T \sum_{j=1}^{n} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i], i = 1, 2, \cdots, m$$

$$P_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, K_i - S_j], i = 1, 2, \cdots, m$$

此處$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$，$q_j$表示標的資產到期價格為$S_j$之機率，$j = 1, 2, \cdots, n$；$r = (1 + R)$為折現因子，其中$R$為無風險利率；$d = 1 + D$為本利比，其中$D$為標的資產於存續期間所發放的配息。若市場價格存在套利機會時，未必存在一組風險中立機率測度Q能滿足上述平賭限制式，因此，我們放寬其限制條件如下

$$S = r^{-T} d^T \sum_{j=1}^{n} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i] + d_{i,C}^{+} - d_{i,C}^{-},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m$$

$$P_i = r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, K_i - S_j] + d_{i,P}^{+} - d_{i,P}^{-},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 $d_{i,C}^{+}$ 、 $d_{i,C}^{-}$ 、 $d_{i,P}^{+}$ 及 $d_{i,P}^{-}$ 為非負離差變數，$i = 1, 2, \cdots, m$ 。

放寬此限制條件後，可能存在許多組風險中立機率測度符合此平賭限制式，故我們必須提出一決定風險中立機率測度之機制以符合模型的需求。

由於此線性規劃模型之目的在於還原一組機率分配 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 使標的資產與選擇權的理論價格接近觀察到的市場價格，因此需加入機率分配的限制式

$$q_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, n \text{ 及 } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

我們希望由風險中立機率測度所求得之歐式選擇權合理價格愈接近市場價格愈好，故取取極小化離差變數之和的風險中立機率測度如下：

$$\min \sum_{i=1}^{m} (d_{i,C}^{+} + d_{i,C}^{-} + d_{i,P}^{+} + d_{i,P}^{-})$$

因此完整的線性規劃模型為

<模型一>

$$\min \sum_{i=1}^{m} (d_{i,C}^{+} + d_{i,C}^{-} + d_{i,P}^{+} + d_{i,P}^{-})$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$
$$q_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, n$$
$$S = r^{-T} d^{T} \sum_{j=1}^{n} q_j S_j$$
$$C_i = r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i] + d_{i,C}^{+} - d_{i,C}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$P_i = r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, K_i - S_j] + d_{i,P}^{+} - d_{i,P}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

模型一是以無母數的方式來估計風險中立的機率測度分配，不像有母數在估計風險中立機率測度時，需要對標的資產的價格變動過程做出假設，或是假設風險中立機率測度是屬於某一有母數的分配。

由於歐式選擇權的價格及其標的資產價格均滿足平賭過程之性質，故模型一是在無套利機會之前提下求算機率測度，表示所有資產之期望報酬率皆為無風險利率，即投資人對於風險抱持著中立的態度，因此模型一所求得的最佳機率測度 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 為風險中立機率測度，再依此機率測度可進而求得歐式買權 C_i 及歐式賣權 P_i 的合理價格分別為

$$r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i], i = 1, 2, \cdots, m$$

與

$$r^{-T}\sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i], i = 1, 2, \cdots, m$$

2.2. 平滑風險中立機率測度曲線

對於模型一而言，有多組風險中立機率測度 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 對應相同的最佳目標函數值，但機率分配曲線是一平滑曲線，相鄰兩點間的機率值很接近，以數學式表示如下

$$| q_j - q_{j-1} | \le A, j = 2, 3, \cdots, n \qquad (6)$$

其中 A 為一夠小的正數。由於(6)為非線性關係式，我們可將(6)改寫成線性形式，如下

$$-A \le q_j - q_{j-1} \le A, j = 2, 3, \cdots, n \qquad (7)$$

將(7)加入模型一可將其修正如下

<模型二>

$$\min \sum_{i=1}^{m} (d_{i,C}^{+} + d_{i,C}^{-} + d_{i,P}^{+} + d_{i,P}^{-})$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$q_j \ge 0, j = 1, \cdots, n$$

$$-A \le q_j - q_{j-1} \le A, j = 2, 3, \cdots, n$$

$$S = r^{-T} d^{T} \sum_{j=1}^{n} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i] + d_{i,C}^{+} - d_{i,C}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$P_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, K_i - S_j] + d_{i,P}^{+} - d_{i,P}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

2.3. 考慮相鄰三點間的機率限制

已知實務上的機率分配圖形為一平滑、可微之曲線，且相鄰三點間的機率值相當接近，以數學式表示如下：

$$2q_j - q_{j+1} - q_{j-1} \le A, j = 2, 3, \cdots, n-1 \qquad (8)$$

其中 A 為一夠小的正數。將式(8)加進模型一可將模型修正如下

<模型三>

$$\min \sum_{i=1}^{m} (d_{i,C}^{+} + d_{i,C}^{-} + d_{i,P}^{+} + d_{i,P}^{-})$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$q_j \ge 0, j = 1, \cdots, n$$

$$2q_j - q_{j+1} - q_{j-1} \le A, \quad j = 2, 3, \cdots, n-1$$

$$S = r^{-T} d^{T} \sum_{j=1}^{n} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, S_j - K_i] + d_{i,C}^{+} - d_{i,C}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$P_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{n} q_j \max[0, K_i - S_j] + d_{i,P}^{+} - d_{i,P}^{-}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

2.4. 考慮成交量之影響

分析模型三的結果，觀察所求之風險中立機率測度已為平滑曲線，但

為了讓選擇權合理價格更符合市場價格的機制，我們將選擇權的成交量納入考量，以反應其重要性。

令參數 $H_{i,C}$ 與 $H_{i,P}$ 分別代表歐式買權 C_i 及賣權 P_i 的交易量，$i=1,2,\cdots,m$，則我們可將權重 $W_{i,C}$ 及 $W_{i,P}$ 設為

$$W_{i,C}=\frac{H_{i,C}}{\sum_{i=1}^{m}H_{i,C}}, i=1,2,\cdots,m$$

$$W_{i,P}=\frac{H_{i,P}}{\sum_{i=1}^{m}H_{i,P}}, i=1,2,\cdots,m$$

將交易量納入考量後，我們挑選風險中立機率測度的準則修正如下

$$\min \sum_{i=1}^{m}[W_{i,C}(d_{i,C}^{+}+d_{i,C}^{-})+W_{i,P}(d_{i,P}^{+}+d_{i,P}^{-})] \tag{9}$$

將模型三的目標函數置換成式(9)，則模型修正如下

<模型四>

$$\min \sum_{i=1}^{m}[W_{i,C}(d_{i,C}^{+}+d_{i,C}^{-})+W_{i,P}(d_{i,P}^{+}+d_{i,P}^{-})]$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n}q_j=1$$

$$q_j\geq 0,\ j=1,\cdots,n$$

$$2q_j-q_{j+1}-q_{j-1}\leq A,\ j=2,\cdots,n-1$$

$$S=r^{-T}d^{T}\sum_{j=1}^{n}q_jS_j$$

$$C_i=r^{-T}\sum_{j=1}^{n}q_j\max[0,S_j-K_i]+d_{i,C}^{+}-d_{i,C}^{-},\qquad i=1,\cdots,m$$

$$P_i=r^{-T}\sum_{j=1}^{n}q_j\max[0,K_i-S_j]+d_{i,P}^{+}-d_{i,P}^{-},\qquad i=1,\cdots,m$$

3. 實證分析

3.1. 資料來源

本論文的實證對象為臺指選擇權(TXO)，根據臺灣期貨交易所網站提供的選擇權每日交易行情簡表，擷取 2006 年 2 月 16 日至 2006 年 5 月 17 日之間，標的資產為台灣股票市場加權股價指數且到期期間為一個月的臺指選擇權之歷史資料，其中 2 月 16 日至 3 月 15 日為 3 月到期 TXO 的存續期間，共有 19 個交易日，且交易的履約價區格間為 5500 點至 7200 點；3 月 16 日至 4 月 19 日為 4 月到期 TXO 的存續期間，共有 24 個交易日，且交易的履約價格區間為 5900 點至 7200 點； 4 月 20 日至 5 月 17 日為 5 月到期 TXO 的存續期間，共有 19 個交易日，且交易的履約價格區間為 6100 點至 7900 點，此處台灣股票市場加權股價指數取自台灣證券交易所網站的統計資料。TXO 買賣權的歷史價格採用當日的結算價，加權股價指數採用當日的台灣股票市場收盤指數，最後，再依據中央銀行所提供的利率統計資料，我們採用一個月到期的定期存款利率 1.50%作為無風險利率。我們使用的電腦環境為 Pentium-M Centrino

2GHz，並利用 GAMS (Brooke, Kendrick, and Meeraus, 1988)軟體撰寫數學模型以解法器 CPLEX 求解。

3.2. 資料選取

根據楊靜宜(2004)選擇權交易策略的整數線性規劃模型，檢視市場價格數據以剔除具有套利機會的資料，其中，我們所採用的數據為其當天成交量較大的 7 檔買權及 7 檔賣權，此外，我們所挑選的買權及賣權之履約價格區間皆相同。由於實務上，法規對於法人或自然人的選擇權交易部位有一定數量的限制，交易時也有一定的成本(包含手續費與保證金)，此外，真實市場中大多具有套利機會，而理論上，若存在套利機會且不限制歐式買權與歐式賣權買賣的數量 x_i 及 y_i 的上界，模型一的解必為∞，為避免此情形發生，因此給予 x_i 與 y_i 之界限為

$$|x_i| \le 10, |y_i| \le 10, i = 1, 2, \cdots, m$$

接著找出最佳目標函數值較小的幾個交易日，將這些交易日的最佳目標函數值扣除必須付出的交易成本，則能得到接近 0 的目標函數值，故這些交易日可視為不具有任何套利機會的市場資料。

使用楊靜宜(2005)的交易策略後，我們得到共 62 個交易日的最佳目標函數值，並取出 3 月到期、4 月到期及 5 月到期 TXO 的 62 筆資料中，最佳目標函數值相對較小的交易日：4 月 11 日及 4 月 19 日，我們將此 2 個交易日當時的市場視為不具有任何套利機會。

3.3. 結果分析

3.3.1 還原風險中立機率測度

考慮 4 月到期 TXO，其交易的履約價格區間為 5900 點至 7200 點。我們將標的資產到期價格 S_T 區間擴大為 5000 點至 8000 點以利分析。以 4 月 11 日選擇權每日交易行情的資料作為實證結果之呈現，此處不具套利機會的 14 檔 TXO 選擇權分別為 6300 點、6400 點、…、6900 點的 TXO 買權及賣權，其交易量就當日而言也是較大的 14 檔 TXO 選擇權，且標的資產於存續期間皆不發放股息，即 $d = 1$。將該天的交易資料以模型一求解，依切割 S_T 價格區間程度不同分成五種情況，分別為 25 點一格，每個點即為未來加權股價指數可能發生的狀態 S_j，利用此線性規劃模型還原市場價格之風險中立機率分布如圖 3.1 所示，接著，依此還原風險中立機率測度反推求出履約價格分別為 5900 點、6000 點、…、7200 點的 TXO 買權及 TXO 賣權之合理價格，並將其與實際的市場價格以及 BS 選擇權評價公式作比

較。

觀察圖 3.1，發現依據此交易日之市場資料，若將 S_T 價格區間切割為 25 點 1 格之風險中立機率測度分佈雖然大多是跳躍點(jump)，與機率分布圖形為平滑曲線之實務情況相牴觸，但此風險中立機率測度只有少數幾個點有值，我們發現由此機率測度所反推之 14 檔不具套利機會的 TXO 選擇權合理價格相當接近市場價格，其表現較 BS 選擇權評價公式所計算出的選擇權理論價格來得準確，故模型一針對反推選擇權的合理價格而言，是相當具有效率且準確的。除了此 14 檔 TXO 買權及賣權，由於其他 TXO 選擇權的成交量很少，因而不具參考價值，或是存在些許套利機會，故我們所求算之 TXO 選擇權合理價格雖然略為偏離市場價格，但與 BS 選擇權評價公式所計算出的選擇權理論價格相較，差距有限。

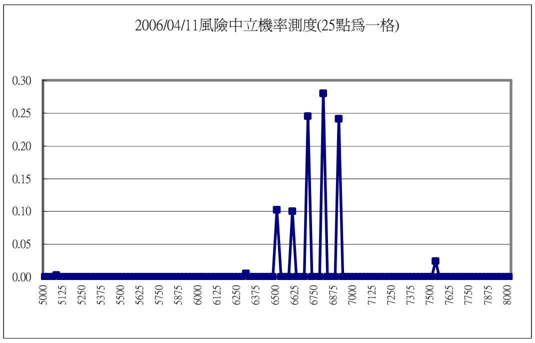

圖 3.1 風險中立機率測度

3.3.2. 平滑風險中立機率測度曲線

觀察圖 3.1，發現當 S_T 價格區間切割成 25 點一格時，利用模型一所得之風險中立機率測度中機率大於零的 S_j 只有數個點，其風險中立機率測度曲線為一震盪劇烈的曲線，此與實務上標的資產價格走勢為平滑可微的的機率分配曲線不吻合。我們使用平滑風險中立機率測度模型修正。

將 4 月 11 日 TXO 選擇權不具套利機會的交易資料以模型二求解，針對 S_T 價格區間切割程度的不同取一序列適當之 A 值以對應相同之最佳目標函數值 35.3638，依分割 S_T 價格區間程度之不同可得以下風險中立機率測度圖形，如圖 3.2 所示。

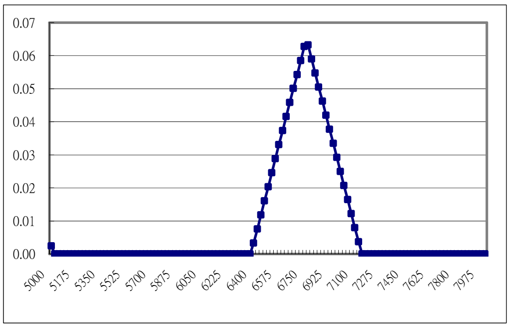

圖 3.2 風險中立機率測度

接著，利用此還原風險中立機率測度反推求出履約價格分別為 5900 點，6000 點，…，7100 點，7200 點的 TXO 買權及 TXO 賣權合理，並將之與實際的市場價格以及 BS 選擇權評價公式作比較。由直觀的角度所取得之平滑風險中立機率測度所算出的選擇權合理價格不僅比 BS 選擇權評價

公式所計算出的選擇權理論價格貼近市場價格脈動，更比模型一的結果更為優異。

觀察圖 3.2，雖然較模型一所得之風險中立機率測度曲線平滑，但卻趨近於三角分配，於機率分配的最高點有不可微分之可能性，與實務中平滑可微的機率分配測度曲線尚有一小段差距，為了改善此現象，我們考慮另一機率測度曲線平滑限制式。

3.3.3. 考慮相鄰三點間的機率限制

同樣使用 4 月 11 日的市場價格資料，以模型三求解，對於 S_T 價格區間切割程度的不同取一適當之 A 值，觀察此實證結果，我們依分割 S_T 價格區間程度之不同可得以下風險中立機率測度圖形，如圖 3.3 所示。觀察得知，風險中立機率測度隨著 S_T 價格區間切割得愈細，其曲線愈為平滑。

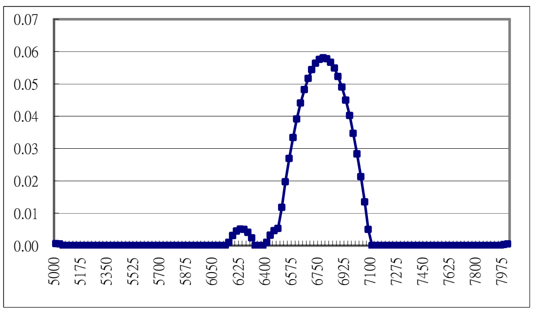

圖 3.3 風險中立機率測度

根據同樣的步驟，我們依上述所得之風險中立機率測度還原該交易日對應各履約價格之 TXO 的選擇權合理價格，並將之與 BS 理論價格以及實際的市場價格作比較，如表四。從表四得知，由模型三求得之平滑風險中立機率測度所算出的選擇權合理價格不僅比 BS 選擇權評價公式所計算出的選擇權理論價格符合市場價格，針對 14 檔無套利機會的 TXO 選擇權，此模型所得之結果較模型二而言，更能精確地貼近市場價格。

根據同樣的步驟，我們依上述所得之風險中立機率測度還原該交易日對應各履約價格之 TXO 的選擇權合理價格，並將之與 BS 理論價格以及實際的市場價格作比較，如表四。從表四得知，由模型三求得之平滑風險中立機率測度所算出的選擇權合理價格不僅比 BS 選擇權評價公式所計算出的選擇權理論價格符合市場價格，針對 14 檔無套利機會的 TXO 選擇權，此模型所得之結果較模型二而言，更能精確地貼近市場價格。

3.3.4. 考慮成交量之影響

將 4 月 11 日無套利的市場價格資料以模型四求解，採取前述的相同步驟，依 S_T 價格區間切割程度的不同，我們取一適當之 A 值，隨著分割 S_T 價格區間程度之差異可得以下風險中立機率測度圖形，如圖 3.4 所示。觀察得知，風險中立機率測度隨著 S_T 價格區間切割得愈細，其曲線愈為平滑，

此結果與模型三相一致。

接著，根據相同的步驟，還原該交易日對應各履約價格之TXO的合理價格，並將之與 BS 選擇權評價公式所求理論價格以及實際的市場價格作比較。由模型四求得之平滑風險中立機率測度所算出的TXO選擇權合理價格不僅比 BS 選擇權評價公式所計算出的選擇權理論價格貼近市場價格脈動，針對 14 檔無套利機會的 TXO 選擇權，此模型所得之結果較模型三而言，更能精確地接近市場價格。

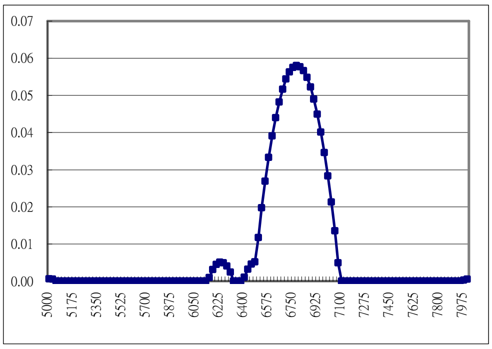

圖 3.4 風險中立機率測度

實證中發現，同時考慮平滑限制式及權重之模型在評價選擇權合理價格的效能最為優異。此外，圖 3.5 為對數常態分布與還原所得機率分布圖形之比較，其中圖 3.5 對數常態分配之平均值與波動度分別採用前 30 個交易日與前 50 個交易日台灣股票市場收盤指數的算術平均數及標準差。

觀察圖 3.5，我們發現利用此線性規劃求得之台灣股票市場加權股價指數的風險中立機率測度曲線具有雙模(bimodality)現象產生，且不為 BS 所假設的對數常態分配。

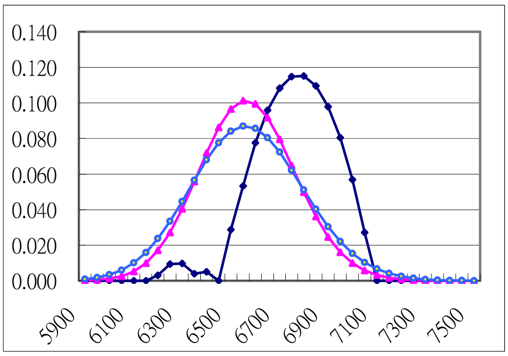

圖 3.5 還原風險中立機率測度與對數常態分布曲線之比較

4. 結論

本論文假設選擇權對應同一標的資產與到期日，資產價格於到期日的狀態為離散點且個數有限，在標的資產與選擇權價格符合市場價格之條件下，以極小化市場價格與合理價格之離差總和作為挑選風險中立機率測度的準則，提出線性規劃模型以還原隱藏於選擇權市場價格中的風險中立機率測度，並利用該測度計算選擇權的合理價格。

我們以臺指選擇權(TXO)的交易資料評估本論文提出之模型的效能，發現若將標的資產到期價格 S_T 區間切割為 25 點 1 格，其風險中立機率測度分佈大多是跳躍點，與機率分布圖形為平滑曲線之實務情況相牴觸。為了解決此問題，我們加入機率測度須滿足平滑準則的限制式來修正此線性規劃模型。

將平滑限制式加入模型後，發現風險中立機率測度隨著S_T價格區間切割得愈細，其曲線愈為平滑，隨著風險中立機率分布曲線愈趨於平滑，所算出的選擇權合理價格較 BS 選擇權評價公式更接近市場價格。實證中發現，同時考慮平滑限制式及權重之模型在評價歐式選擇權合理價格的效能最為優異。

我們發現雖然此模型架構與 Rubinstein 和 Jackwerth (1996)的無母數還原風險中立機率模型略有不同，但是利用此線性規劃模型求得之風險中立機率測度曲線與 Rubinstein 和 Jackwerth (1996)所得的機率分布曲線相似，均有雙模現象產生，且皆不為 BS 所假設的對數常態分配，此結論與晚近許多學者的看法相同。

參考文獻

Black, F. and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." Journal of Political Economy 81(3), 637-659.

Breeden, D.T. and R.H. Litzenberger (1978), "Prices of State Contingent Claims Implicit in Option Prices." Journal of Business 51, 621-652.

CPLEX Optimization, Inc. (1993), Using the CPLEX Callable Library and CPLEX Mixed Integer Library, Incline Village, NY.

GAMS Development Corporation (2003), GAMS - The Solver Manual, Washington, DC.

Rubinstein, M. and J. Jackwerth (1996), "Recovering Probability Distributions from Option Prices." The Journal of Finance 51(5),1611-1631.

Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees." Journal of Finance 49(3), 771-818.

楊靜宜 (2004)，選擇權交易策略的整數線性規劃模型，政治大學應用數學系碩士論文。

出席國際學術會議心得報告

計畫編號	NSC 95-2416-H-004-039
計畫名稱	還原選擇權風險中立測度之規劃模型
出國人員姓名 服務機關及職稱	劉明郎，政治大學應用數學系副教授
會議時間地點	July 1-3, 2007, Beijing
會議名稱	International Symposium on Graph Theory and Combinational Algorithm
發表論文題目	A Graph Coloring Model and Its Application to an Assignment Problem

一、參加會議經過

圖論與組合演算法國際研討會（International Symposium on Graph Theory and Combinatorial Algorithms，簡稱 GTCA' 07），於 2007 年 7 月 1－3 日假中國科學院數學與系統科學研究院舉行。參加會議的學者近 160 人，其中海外與會學者 20 餘人。

GTCA’07 會議的主要議題有：圖論及其應用、隨機圖論、複雜網路、英特網數學、組合優化、網路設計與優化、計算生物學、生物資訊學、圖論演算法、近似演算法、線上演算法、隨機演算法。

本次會議程式委員會特別邀請了相關領域國際上的著名專家 Bela Bollobas 教授 (英國劍橋大學純粹數學與數學統計系)做一小時大會報告；同時還邀請了中國科學院馬志明院士、蔡茂誠研究員和王建方研究員做了一小時大會報告。另外，此次會議還安排了十幾個三十分鐘邀請報告和二十多個十五分鐘普通報告。

二、與會心得

目前筆者在政大應數系開設作業研究、整數規畫與財務數學等課程多年，深感學術研究發展日新月異、一日千里。國科會能給予補助出國費用出席國際學術研討會，除了能吸收國外新知、尋找新的研究方向外，並能認識相關研究領域的國外學者，收穫相當大。希望將來能多利用課餘時間出國做短期研究，。回國後繼續開設相關課程，並指導博、碩士班研究生，籌辦國際學術研討會，推動國際學術研究工作的交流。