

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 熱帶幾何相交理論與熱帶循環之研究 II 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 98-2115-M-004-002-  
執行期間：98年08月01日至99年09月30日  
執行單位：國立政治大學應用數學學系

計畫主持人：蔡炎龍

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：林祐宇  
博士班研究生-兼任助理人員：陳振偉

報告附件：國外研究心得報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 99 年 12 月 30 日

國科會專題研究成果報告:  
熱帶幾何相交理論與熱帶循環之研究 II

計畫編號: 98-2115-M-004-002-  
蔡炎龍

December 30, 2010

# Chapter 1

## 報告內容

### 1.1 簡介

本年度承席去年, 繼續對熱帶幾何 (tropical geometry) 之相交理論做更深入的研究。這份報告總結這兩年的成果, 希望提供熱帶相交理論的研究基礎、相關文獻, 及一些新的研究結果。

### 1.2 熱帶幾何簡介

這裡很快的復習熱帶幾何的基本理論。首先熱帶幾何主要代數結構熱帶半環 (tropical semiring) 定義如下。

**Definition 1** (熱帶半環). 一個熱帶半環  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ , 為  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , 並定義下面兩個二元運算。對任意的  $x, y \in \mathbb{T}$ , 定義

- $x \oplus y := \max\{x, y\}$
- $x \odot y := x + y$

有這個代數結構, 我們自然可定義熱帶多項式。假設一個如下的熱帶多項式:

$$f(x) = a_n \odot x^{\odot n} \oplus a_{n-1} \odot x^{\odot n-1} \oplus \cdots \oplus a_r \odot x^{\odot r}.$$

依定義計算, 我們可以得到

$$f(x) = \max_{r \leq i \leq n} (a_i + ix). \quad (1.1)$$

我們定義  $f(x)$  的零根為式 1.1 中極大值出現兩次或兩次以上的  $x$ 。

熱帶多項式更詳細的討論, 及基本性質我們整理在 [9]。於是, 我們可以定義熱帶曲線 (tropical curve) 及更一般的熱帶超曲面 (tropical hypersurface), 其參考一些熱帶幾何基礎文章, 如 [3, 7, 8]。

### 1.3 穩定相交理論

在開始這個計畫之初, 還沒有什麼明確的熱帶相交理論。不過最近這方面已漸漸有較清楚的成果。我們先用一個簡單的例子來說明熱帶相交的問題和定義的基本想法。首先, 熱帶相交和古典幾何有相當多相似的地方。比方說, 如圖 1.1 所示, 兩條熱帶直線會交於一點。所有的熱帶直線都是決定一個中心, 有固定方向的三條射線組成。所以只要中心點決定就可以決定一條熱帶直線。

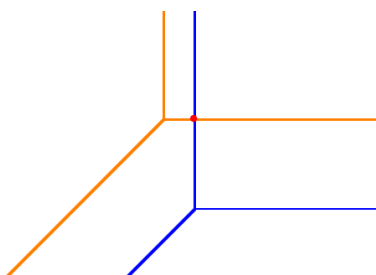


Figure 1.1: two tropical lines in general positions

熱帶直線的相交就已經看得出熱帶曲線相交的問題: 我們把其中一條直線移動一下, 可以發現兩相異直線有可能交於無限多點 (一條射線), 如圖 1.2 所示。處理這樣的例外, Richter-Gebert, Sturmfels, 和 Theobald [8] 提出了「穩定相交」(stable

intersection) 的概念。穩定相交就是雖然這兩條直線交於一個射線，但只要偏移一點點，就會很「正確」的交於一點。那我們讓偏移一點點，有正確交點的交點找出來，當偏移量趨近零的時候，就會趨向一個點，我們就稱這個點為這兩條直線的穩定交點。

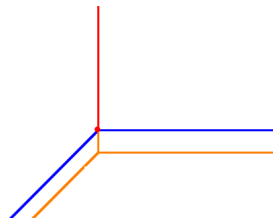


Figure 1.2: two tropical lines in a ray

一般來說，兩條曲線  $C$  和  $D$  的穩定相交定義如下：

$$C \cap_{\text{st}} D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_\varepsilon \cap D_\varepsilon)$$

其中  $C_\varepsilon$  和  $D_\varepsilon$  很小的平移。這樣的定義解決了熱帶曲線의相交問題，但我們也發現這個定義很難嚴謹的寫出來，一般情況下也很難用來計算。所以我們需要尋求其他的定義方式：以熱帶循環的相交來定義。

## 1.4 熱帶循環的相交理論

我們看到直接用集合上的相交會有些問題，穩定相交可以解決這個問題，但很難嚴謹定義和計算。Mikhalkin [7] 提出一個想法，而 Allermann 和 Rau [1] 嘗試把這個想法嚴謹的寫下來。基本上這個想法是把相交理論以「熱帶循環」(tropical cycle) 的交集來處理。一個熱帶曲線或更一般的熱帶曲體都可以看成某個熱帶循環等價類中的一個例子。所以我們可以在每個等價類中選擇「好的」代表來做交集，這樣的交集就會是「正確的」交集。

這裡多是技術層面的處理，詳細的過程除了可以參考前面提及 Allermann 和 Rau [1] 的工作，更早 Gathmann, Kerber, 和 Markwig [4] 的工作在概念上更容易理解。這樣的定義方式事實上和穩定相交有異曲同工之處，所以 Allermann 和 Rau [1] 猜測這兩種交集事實上是相同的。這個猜測最近由 Katz [5] 證明。至此熱帶相交理論可說已有相當的基礎。

## Chapter 2

### 成果自評

這次的計畫中，我們研究了熱帶相交理論目前最新的進展，瞭解穩定相交和 Allermann, Rau 等更嚴謹定義的相交理論之關聯性。

我們最希望的應用是用在研究非交換餘調的相關問題。在到美國加州大學爾灣校區訪問的期間，試著去計算一些例子，發現幾個問題。第一個問題是熱帶化後，有可能有些問題變得太顯然，亦即得不到有意思的結果。另一方面是很們很難描述什麼是 Hodge 分解。

可能的方向是在熱帶幾何中合理解釋  $\mathbb{C}^*$  作用。這個方向會是我們今後考慮的重點並會放在明年的計畫當中。

對於一些例外我們還是整理一篇論文發表 [?], 另外也對熱帶亞純函數做了進一步的整理 [9]。未來我們希望能對整個熱帶曲體有更完整的認識，真正可以將古典一些困難問題轉成熱帶幾何的問題處理。

# Bibliography

- [1] Lars Allermann and Johannes Rau. First steps in tropical intersection. arXiv:0709.3705v2, 2007.
- [2] T. Bogart, A. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, and R. Thomas. Computing tropical varieties. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2):54–73, 2007.
- [3] Andreas Gathmann. Algebraic geometry.
- [4] Andreas Gathmann, Michael Kerber, and Hannah Markwig. Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves. *Compos. Math.*, 145(1):173–195, 2009.
- [5] Eric Katz. Tropical intersection theory from toric varieties. arXiv:0907.2488v1, 2009.
- [6] Yen lung Tsai. *Non-abelian Clemens-Schmid Exact Sequences*. PhD thesis, University of California, Irvine, 2003.
- [7] Grigory Mikhalkin. Tropical geometry and its applications. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 827–852. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [8] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [9] Y. L. Tsai. Working with one-variable tropical meromorphic functions. (forthcoming).
- [10] Yen-Lung Tsai and Eugene Z. Xia. Non-abelian local invariant cycles. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(8):2365–2367, 2007.

國科會專題研究出國報告:  
熱帶幾何相交理論與熱帶循環之研究 II

計畫編號: 98-2115-M-004-002-  
蔡炎龍

訪問地點: 美國加州大學爾灣校區

這次很感謝國科會的支援, 可以到美國加州大學爾灣校區訪問 Lu, Zhiqin 教授。這次訪問的目的主要是和 Lu 教授討論未來可能的合作, 及完成一些工作中的成果。

訪問的期間, 給了一個名為 “Introduction to Tropical Geometry,” 介紹熱帶幾何及自己研究工作的演講。和 Lu 教授主要討論是不是在這種熱帶結構中也會有某些 Hodge 結構。我們為此做了不少討論。這個問題主要的困難一方面是還沒有完善的餘調理論。

在訪問的期間, 試著去計算一些例子, 發現幾個問題。第一個問題是熱帶化後, 有可能有些問題變得太顯然, 亦即得不到有意思的結果。另一方面是很們很難描述什麼是 Hodge 分解。

可能的方向是在熱帶幾何中合理解釋  $\mathbb{C}^*$  作用。這個方向會是我們今後考慮的重點並會放在明年的計畫當中。



# 國科會補助計畫衍生研發成果推廣資料表

日期:2010/12/27

國科會補助計畫	計畫名稱: 熱帶幾何相交理論與熱帶循環之研究 II
	計畫主持人: 蔡炎龍
	計畫編號: 98-2115-M-004-002- 學門領域: 幾何與拓樸學
無研發成果推廣資料	

98 年度專題研究計畫研究成果彙整表

計畫主持人：蔡炎龍		計畫編號：98-2115-M-004-002-					
計畫名稱：熱帶幾何相交理論與熱帶循環之研究 II							
成果項目		量化			單位	備註（質化說明：如數個計畫共同成果、成果列為該期刊之封面故事...等）	
		實際已達成數（被接受或已發表）	預期總達成數（含實際已達成數）	本計畫實際貢獻百分比			
國內	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	1	1	100%		
		專書	0	0	100%		
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（本國籍）	碩士生	3	3	100%	人次	
		博士生	1	1	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		
國外	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%		章/本
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（外國籍）	碩士生	0	0	100%	人次	
		博士生	0	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		

<p>其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)</p>	<p>至 University of California, Irvine 與 Lu, Zhi-qin 教授交換意見，未來可能在熱帶 Hodge 結構上進一步合作。</p>
--	--

	成果項目	量化	名稱或內容性質簡述
科 教 處 計 畫 加 填 項 目	測驗工具(含質性與量性)	0	
	課程/模組	0	
	電腦及網路系統或工具	0	
	教材	0	
	舉辦之活動/競賽	0	
	研討會/工作坊	0	
	電子報、網站	0	
	計畫成果推廣之參與(閱聽)人數	0	



# 國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

達成目標

未達成目標（請說明，以 100 字為限）

實驗失敗

因故實驗中斷

其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文： 已發表  未發表之文稿  撰寫中  無

專利： 已獲得  申請中  無

技轉： 已技轉  洽談中  無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）

本次研究可做為日後熱帶幾何相關研究之重要基礎工具。例如有了這些工具才能更清楚定義熱帶曲體，這是下一個計畫主要希望研討的。