國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

碩 士 學 位 論 文

熱帶線性系統之研究

On Tropical Linear Systems

碩士班學生: 游竣博 撰

指導教授: 蔡炎龍 博士

中華民國 100 年 12 月 30 日

Abstract

The thesis mainly discusses the methods of finding solutions of tropical linear systems $A \odot x = b$ and two-sided homogeneous tropical linear systems $A \odot x = B \odot y$. We are able to give explicit descriptions of all solutions of any tropical linear systems $A \odot x = b$ and two-sided homogeneous tropical linear systems $A \odot x = B \odot y$.

As the classical situations, when solving the linear systems of the form $A \odot x = b$, we first find the solutions for the corresponding "homogeneous" case $A \odot x = 0$. For two-sided homogeneous tropical linear systems $A \odot x = B \odot y$, we use the concept of win sequence to convert it into a finite number k of classical linear systems: either a system $S\colon C[x^t \ -y^t \ 1]^t = 0$ of equations or a system $T\colon D[x^t \ -y^t \ 1]^t \leq 0$ of inequalities. Moreover, we used so called "compatibility conditions" to reduce the number of k.

The particular feature of both S and T is that each item (equation or inequality) is bivariate. It involves exactly two variables; one variable with coefficient 1, and the other one with -1. S is solved by Gauss-Jordon elimination. We explain how to solve T by a method similar to Gauss-Jordon elimination. To achieve this, we introduce the notion of sub–special matrix. The procedure applied to T is called sub–specialization.

Finally, we will use MATLAB to solve tropical linear systems of these two types.

中文摘要

本篇論文主要在探討熱帶線性系統(*tropical linear system*) $A \odot x = b$ 與雙邊齊次熱帶線性系統(*two-sided homogeneous tropical linear system*) $A \odot x = B \odot y$ 的求解方法。我們將明確的描述任何熱帶線性系統與雙邊齊次熱帶線性系統的解。

如同古典的論述, 當求解線性系統 $A \odot x = b$ 時, 我們首先會先找到對應的 “齊次” 系統 $A \odot x = 0$ 來求解。而對於雙邊齊次熱帶線性系統, 我們將利用勝序列的概念, 將雙邊齊次熱帶線性系統轉化為 k 組古典熱帶線性系統: 含等式系統 S: $C[x^t \ -y^t \ 1]^t = 0$ 與不等式系統 T: $D[x^t \ -y^t \ 1]^t \leq 0$ 。除此之外, 利用相容性條件來減少 k 的數量。

過程中我們處理的 S, T 均為雙變量的系統, 係數分別為 1 與 -1, 對於 S 我們以高斯-喬登消去法(*Gauss–Jordan elimination*)處理。對於 T 我們將以類似高斯-喬登消去法的方式進行列運算, 因此我們定義次特殊矩陣(*sub-special matrix*), 而進行的過程我們稱之為次特殊化(*sub–specialization*)。

最後將以 MATLAB 作為工具來求解出這兩類的熱帶線性系統。

目 錄

第一章　緒論

熱帶幾何是代數幾何的一個分支。“熱帶” 一詞的由來只是因最初從巴西數學家兼計算機科學家 Imre Simon 發展而來, “熱帶” 一詞並沒有其他特別的意思, 只是源於巴西。關於熱帶幾何有許多文獻都有詳細的介紹 [1, 2, 3, 4, 5]。

熱帶代數所考慮的空間為 $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, 在這個考慮的空間上賦予兩個運算 “$\oplus$” 及 “$\odot$”, 分別稱之為熱帶加法與熱帶乘法。

定義 1.1:
在 $\mathbb{T}$ 上我們定義兩個運算 “$\oplus$” 及 “$\odot$” 如下:

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$
$$x \odot y := x + y,$$

$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ 將會構成半環的代數結構。

定義 1.2:
在這篇文章中, 我們將所有佈於 $\mathbb{T}$ 的 $m \times n$ 矩陣構成的集合記作 $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$。

本文將要探討的是有關於熱帶代數運算下的線性系統, 稱為熱帶線性系統。關於熱帶線性系統, 在很多的相關文章當中都有介紹 [1, 6, 7]。要探討熱帶線性系統, 我們需要先定義矩陣的熱帶乘法與熱帶加法運算。

定義 1.3:
若 A 為一個佈於 $\mathbb{T}$ 的 $m\times n$ 矩陣, B 為一個佈於 $\mathbb{T}$ 的 $n\times p$ 矩陣, 則 $C = A\odot B$ 為一個佈於 $\mathbb{T}$ 的 $m\times p$ 矩陣, 矩陣中每個位置 $c_{ij} := \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}\odot b_{kj} = \max\{a_{ik}+b_{kj} : k = 1, 2, \ldots, n\}$, 其中, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$。而矩陣加法則是對應位置做熱帶加法。

假設 A, B 為佈於 $\mathbb{T}$ 的 $m\times n$ 矩陣, x 屬於 $\mathbb{T}^n$, y, a, b 屬於 $\mathbb{T}^m$, C 為佈於 $\mathbb{T}$ 的 $s\times n$ 矩陣, D 為佈於 $\mathbb{T}$ 的 $s \times m$ 矩陣。則以下列舉一些熱帶線性系統常見的形式:

T1: $A \odot x = 0$

T2: $A \odot x = b$

T3: $A \odot x \leq b$

T4: $A \odot x = B \odot x$

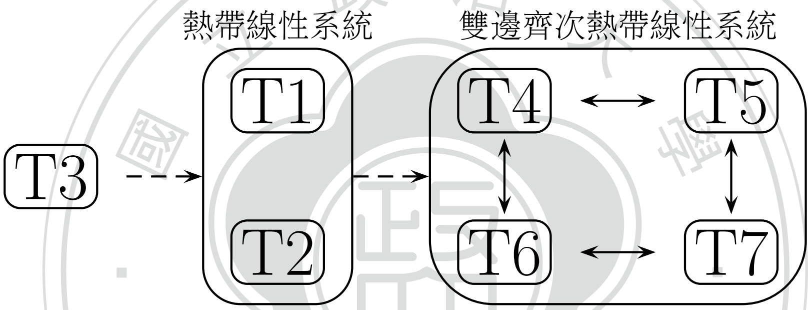
T5: $A \odot x \leq B \odot x$

T6: $C \odot x = D \odot y$

T7: $A \odot x \oplus a = B \odot x \oplus b$

這些線性系統之間有些關聯, 解法不完全相同。

圖 1.1: 熱帶線性系統關係示意圖



在求解 T1 與 T2 事實上是求解相同的問題。T1 中 0 表示每一個位置都是 0 的向量, 而 T2 求解任何的熱帶線性系統 $b \in \mathbb{T}^m$。然而在求解 $A \odot x = b$ 時我們將會處理成 $A \odot x = 0$ 的形式, 所以可以說是在求解相同的問題, 詳細內容將在第三章說明。T2 與 T3 之間的關係則是若 T2 有解則 T3 的最大解將是 T2 的一個解。

解 T4 與 T5 是相同的問題。因為 T5 的 $A \odot x \leq B \odot x$ 等價於 $(A \oplus B) \odot x = B \odot x$ 也就是T4 的形式。而 T4 也可看成是 $A \odot x \leq B \odot x$ 且 $A \odot x \geq B \odot x$, 所以亦可從 T5 來求 T4。

T6 與 T4 可以透過變換化為相同的問題。若令 $A \odot x = B \odot x = y$ 則 T4 可以寫成

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \odot x = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{T}} \\ I_{\mathbb{T}} \end{bmatrix} \odot y, \text{ 其中 } I_{\mathbb{T}} \text{ 是熱帶單位矩陣。}$$

即可化成 T6 形式。而 T6 的 $A \odot x = B \odot y$ 可以寫成 T4 的形式如下:

$$\begin{bmatrix} A & O_{\mathbb{T}} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{\mathbb{T}} & B \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ 其中 } O_{\mathbb{T}} \text{ 是熱帶零矩陣。}$$

所以這兩個問題是等價的問題。

T4 與 T7 可以視為相同的問題。顯然 T4 只是 T7 在 $a = -\infty, b = -\infty$ 時的特例。而 T7 也可以轉化問題成為 T4 的形式如下:

$$\begin{bmatrix} A & a \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & b \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}。$$

不同的是求得的解 z 分量可能不是 0, 所以求得的 x 不一定滿足 $A \odot x \oplus a = B \odot x \oplus b$, 但是, $(-z) \odot x$ 將會是 $A \odot x \oplus a = B \odot x \oplus b$ 解。

以上提到的問題形式主要區分兩類, 一類是一般熱帶線性系統 $A \odot x = b$, 另一類則是雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$。

在文章 [7] 中, 主要在求解熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot x$ 這樣的線性系統, 對於其他線性系統則轉為 $A \odot x = B \odot x$ 的形式來求解。在文章 [6] 中則是提供一個用迭代的方式來收斂到線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 的一組解, 而通解並無法用迭代的方式求得。

本文在第二章將會對熱帶代數及運算做更詳細的介紹。而在第三章中將先由 $A \odot x = b$ 的求解開始介紹, 如同古典的論述 [8], 當求解線性系統 $A \odot x = b$ 時, 我們將會找到對應的 "齊次" 系統 $A \odot x = 0$ 來求解。

在第四章我們探討 $A \odot x = B \odot y$ 的求解, 對於雙邊齊次熱帶線性系統, 我們將利用勝序列(定義 4.14)的概念, 將雙邊齊次熱帶線性系統轉化為 k 組古典熱帶線性系統: 含等式系統 S: $C[x^t \; -y^t \; 1]^t = 0$ 與不等式系統 T: $D[x^t \; -y^t \; 1]^t \leq 0$ 。除此之外, 利用相容性條件來減少 k 的數量。

過程中我們處理的 S, T 均為雙變量的系統, 係數分別為 1 與 -1, 對於 S 我們以高斯-喬登消去法(*Gauss–Jordan elimination*)處理。對於 T 我們將以類似高斯-喬登消去法的方式進行列運算, 因此我們定義次特殊矩陣(*sub-special matrix*), 而進行的過程我們稱之為次特殊化(*sub–specialization*), 藉此求得 $A \odot x = B \odot y$ 的通解。

第二章　基本介紹

在開始探討熱帶線性系統前, 我們先對熱帶代數所需要具備的知識做一些基本的介紹。

定義 2.1:
一個非空集合上若具有一個二元運算 "$\circ$", 且滿足結合律則稱為一個半群($semigroup$)。如果又存在一個元素 e, 使得對於每個 $x \in S$, $e \circ x = x \circ e = x$, 即存在單位元素, 則稱此代數結構為具單位元半群($monoid$)。

定義 2.2:
如果集合 S 上具有兩個運算 "$+$" 和 "$\times$", 分別稱為"加法"和"乘法"。如果滿足以下條件, 則我們稱此代數結構為半環($semiring$):

1. 對加法構成一個可交換具單位元半群, 以 0 代表加法單位元素。
   (a) 對於任意 $a, b, c \in S$, $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (b) 存在 $0 \in S$, 使得對於任意 $a \in S$, $a + 0 = 0 + a = a$
   (c) 對於任意 $a, b \in S$, $a + b = b + a$
2. 對乘法構成一個具單位元半群, 以 1 代表乘法單位元素。
   (a) 對於任意 $a, b, c \in S$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
   (b) 存在 $1 \in S$, 使得對於任意 $a \in S$, $a \times 1 = 1 \times a = a$
3. 加法與乘法之間具有分配律。
   (a) 對於任意 $a, b, c \in S$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
   (b) 對於任意 $a, b, c \in S$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
4. 對於每一個元素 $s \in S$, $s \times 0 = 0 \times s = 0$。

在古典的數學裡, 有許多的例子都符合半環的條件, 例如 $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{N}\cup\{0\},+.\times)$。在熱帶幾何裡我們所要討論的集合為 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, 我們將利用符號 $\mathbb{T}$ 表示這樣的集合。在 $\mathbb{T}$ 上我們考慮兩種運算 "$\oplus$" 和 "$\odot$", 這兩個運算我們分別稱之為 "熱帶加法" 與 "熱帶乘法"。其運算定義如下:

$$x \oplus y = \max\{x, y\}$$

$$x \odot y = x + y$$

備註 2.3:

$(\mathbb{T},\oplus,\odot)$ 構成一個半環。

證明: 顯然對於任意給定的 $x, y \in \mathbb{T}$, 都有 $x\oplus y = \max\{x, y\} \in \mathbb{T}$ 和 $x\odot y = x+y \in \mathbb{T}$, 即符合運算的封閉性。

對任意 $x, y, z \in \mathbb{T}$, 則

1. 對加法構成一個可交換具單位元半群。

   (a) $(x \oplus y) \oplus z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\} = x \oplus (y \oplus z)$

   (b) 存在 $0_{\mathbb{T}} = -\infty \in \mathbb{T}$, 使得 $x \oplus 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}} \oplus x = \max\{x, -\infty\} = x$

   (c) $x \oplus y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \oplus x$

2. 對乘法構成一個具單位元半群。

   (a) $(x \odot y) \odot z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \odot (y \odot z)$

   (b) 存在 $1_{\mathbb{T}} = 0 \in \mathbb{T}$, 使得 $x \odot 1_{\mathbb{T}} = 1_{\mathbb{T}} \odot x = x + 0 = x$

3. 加法與乘法之間具有分配律。

   (a) $x \odot (y \oplus z) = x + \max\{y, z\} = \max\{x + y, x + z\} = x \odot y \oplus x \odot z$

   (b) $(x \oplus y) \odot z = \max\{x, y\} + z = \max\{x + z, y + z\} = x \odot z \oplus y \odot z$

4. 對於任意元素 $x \in \mathbb{T}$, $x \odot 0_{\mathbb{T}} = x + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + x = 0_{\mathbb{T}}$。

因此, $(\mathbb{T},\oplus,\odot)$ 構成一個半環。 □

我們稱 $(\mathbb{T},\oplus,\odot)$ 為一個熱帶半環(*tropical semiring*), 並簡記為 $\mathbb{T}$。

備註 2.4:

熱帶半環是一個交換環(*commutative ring*), 即對於任意 $a, b \in \mathbb{T}$, $a \odot b = b \odot a$。

證明: $a \odot b = a + b = b + a = b \odot a$。 □

備註 2.5:
對於任意 $a \in \mathbb{T}$, $a \oplus a = a$, 即熱帶加法是冪等(*idempotent*)。

證明: 對於任意給定的 $a \in \mathbb{T}$, $a \oplus a = \max\{a, a\} = a$, 因此, 熱帶加法是冪等的。 □

值得一提的是, 在熱帶運算之下並沒有減法運算。事實上, 對大部分元素都不具有加法反元素, 例如: 不存在 x 使得 $x \oplus 1 = 0_{\mathbb{T}}$。文章中, 為了方便起見, 對於熱帶加法 "$\oplus$" 有時會使用 "max", 而對於熱帶乘法 "$\odot$" 有時會使用 "+" 來表示。以 "古典" 表示一般的加法、乘法運算, 用來區分與熱帶運算的差異。在其他熱帶幾何的文章中, 對於熱帶加法的定義可能使用 "min" 來當 "$\oplus$", 在此我們將以符號 "$\oplus'$" 表示。$(\mathbb{T}, \oplus', \odot)$ 也會得到同構的代數結構, 因此我們將只考慮 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$。

如同古典的線性系統, 在熱帶半環上, 我們仍然可以定義矩陣的熱帶乘法。若 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{T})$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{T})$, 則 $C = A \odot B$ 意思是 $c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \odot b_{kj} = \max\{a_{ik} + b_{kj} : k = 1, 2, \ldots, n\}$, 對於任意 $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$。如同古典的線性代數, $A \odot x$ 除了以上的定義外, 也可以用

$$x_1 \odot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \oplus x_2 \odot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus x_n \odot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

來得到相同的結果。

範例 2.6:
若 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, 則 $A \odot x = \begin{bmatrix} 2 \odot 4 \oplus 4 \odot 6 \\ 1 \odot 4 \oplus 5 \odot 6 \end{bmatrix} = 4 \odot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus 6 \odot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\{2+4, 4+6\} \\ \max\{1+4, 5+6\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$。

在熱帶運算下, 一般矩陣應有的性質, 都與古典的矩陣運算幾乎一樣只是換成熱帶運算。

備註 2.7:
對於任意給定的矩陣 $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{T})$, $B \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{T})$, $C \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{T})$, 則

$$(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)。$$

證明: 給定 $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$, 則

$$
\begin{aligned}
((A \odot B) \odot C)_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{r} (A \odot B)_{ik} \odot C_{kj} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{r} (\bigoplus_{l=1}^{q} A_{il} \odot B_{lk}) \odot C_{kj} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{r} \bigoplus_{l=1}^{q} (A_{il} \odot B_{lk} \odot C_{kj}) \\
&= \bigoplus_{l=1}^{q} \bigoplus_{k=1}^{r} (A_{il} \odot B_{lk} \odot C_{kj}) \\
&= \bigoplus_{l=1}^{q} A_{il} \odot (\bigoplus_{k=1}^{r} B_{lk} \odot C_{kj}) \\
&= \bigoplus_{l=1}^{q} A_{il} \odot (B \odot C)_{lj} \\
&= (A \odot (B \odot C))_{ij} \text{。}
\end{aligned}
$$

因此, $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$。 □

備註 2.8:

對於任意給定的矩陣 $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{T})$, $B, C \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{T})$, 則

$$A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C) \text{。}$$

證明: 給定 $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, 則

$$
\begin{aligned}
(A \odot (B \oplus C))_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{q} A_{ik} \odot (B \oplus C)_{kj} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{q} A_{ik} \odot (B_{kj} \oplus C_{kj}) \\
&= \bigoplus_{k=1}^{q} (A_{ik} \odot B_{kj}) \oplus (A_{ik} \odot B_{kj}) \\
&= \bigoplus_{k=1}^{q} (A_{ik} \odot B_{kj}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{q} (A_{ik} \odot B_{kj}) \\
&= ((A \odot B) \oplus (A \odot C))_{ij} \text{。}
\end{aligned}
$$

因此, $A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$。 □

定義 2.9:

若 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\overline{\mathbb{T}})$, 則 $A^* \coloneqq (-a_{ji})$, 即 $A^* = -A^t$。在此稱 A^* 為 A 的共軛矩

陣。其中, $\overline{\mathbb{T}}$ 表示 $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\},\oplus,\odot,\oplus',\odot')$, $\odot$ 與 $\odot'$ 差別在於 $-\infty\odot\infty=-\infty$ 而 $-\infty\odot'\infty=\infty$。

在 $\overline{\mathbb{T}}$ 上, 矩陣乘法符合底下的性質:

性質 2.10:

對於給定的矩陣 U, V, W 佈於 $\overline{\mathbb{T}}$, 滿足

$$(U\odot' V)\odot W \le U\odot'(V\odot W), \tag{2.1}$$

$$U\odot(U^*\odot' W)\le W, \tag{2.2}$$

$$U\odot(U^*\odot'(U\odot W)) = U\odot W。 \tag{2.3}$$

證明: 對於 (2.1) 中, 左式中的每個位置

$$\begin{aligned}
((U\odot' V)\odot W_{ij} &= \max_k\{(U\odot' V)_{ik}+W_{kj}\}\\
&= \max_k\{\min_l\{U_{il}+V_{lk}\}+W_{kj}\}\\
&= \max_k\{\min_l\{U_{il}+V_{lk}+W_{kj}\}\}\\
&:= U_{il^*}+V_{l^*k^*}+W_{k^*j}\\
&\le U_{il}+V_{lk^*}+W_{k^*j}, \text{對於任意給定的 } l。
\end{aligned}$$

同理右式中的每個位置

$$\begin{aligned}
(U\odot'(V\odot W))_{ij} &= \min_l\{\max_k\{U_{il}+V_{lk}+W_{kj}\}\}\\
&:= U_{il'}+V_{l'k'}+W_{k'j}。
\end{aligned}$$

因此, $((U\odot' V)\odot W_{ij}\le U_{il'}+V_{l'k^*}+W_{k^*j}\le (U\odot'(V\odot W))_{ij}$。

在 (2.2) 中, $(U\odot(U^*\odot' W))_{ij}=\max_l\{\min_k\{U_{il}-U_{kl}+W_{kj}\}\}\le\max_l\{U_{il}-U_{il}+W_{ij}\}=W_{ij}$。

在 (2.3) 中, 顯然 $U\odot(U^*\odot'(U\odot W))\le U\odot W$, 故只須證明 $U\odot(U^*\odot'(U\odot W))\ge U\odot W$。

$$\begin{aligned}
U\odot(U^*\odot'(U\odot W))_{ij} &= \max_l\{\min_s\{\max_k\{U_{il}-U_{sl}+U_{sk}+W_{kj}\}\}\}\\
&\ge \min_s\{\max_k\{U_{ik}-U_{sk}+U_{sk}+W_{kj}\}\}\\
&= \min_s\{\max_k\{U_{ik}+W_{kj}\}\}\\
&= \max_k\{U_{ik}+W_{kj}\}\\
&= (U\odot W)_{ij}。
\end{aligned}$$

$\square$

性質 2.11:
對於給定的矩陣 A, B 佈於 $\mathbb{T}$, 滿足

$$(A \odot B)^* = B^* \odot' A^*, \tag{2.4}$$

$$(A \odot' B)^* = B^* \odot A^*\text{。} \tag{2.5}$$

證明: 在等式 (2.4) 中,

$$\begin{aligned}(A \odot B)^*_{ij} &= -(A \odot B)_{ji} \\ &= -\max_k\{A_{jk} + B_{ki}\} \\ &= \min_k\{-A_{jk} - B_{ki}\} \\ &= (B \odot' A)_{ij}\text{。}\end{aligned}$$

因此, $(A \odot B)^* = B^* \odot' A^*$。
由等式 (2.4), 可以得知

$$\begin{aligned}(A \odot' B)^* &= ((B^* \odot A^*)^*)^* \\ &= (B^* \odot A^*)\text{。}\end{aligned}$$

因此, 等式 (2.5) 成立。 $\square$

第三章　熱帶線性系統 $A \odot x = b$

給定矩陣 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, $b \in \mathbb{T}^m$, 我們目標將是希望求出所有的 $x \in \mathbb{T}^n$, 滿足 $A \odot x = b$, 即

$$\max\{a_{ij} + x_j : j = 1, 2, \ldots, n\} = b_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, m。$$

從觀察我們可以知道, 在熱帶線性系統當中, 若 $A \odot x = b$ 要有解, 則對於每一個 i 列中, 必有某一個 j 使得 $a_{ij} + x_j$ 恰好是最大值並且等於 b_i, 由 $a_{ij} + x_j = b_i$, 我們可以求出 $x_j = b_i - a_{ij}$。因此, 整個求解 x 的過程, 最主要是要確定哪些 A 矩陣的元素 a_{ij} 會使的 $a_{ij} + x_j$ 可能得到 b_i。所以, 以下將透過對 A 進行運算來求解線性系統。

第一節　問題求解

給定矩陣 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, $b \in \mathbb{T}^m$, 我們希望求出所有的 $x \in \mathbb{T}^n$, 滿足 $A \odot x = b$。

首先我們定義一些記號:

- $[n] = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$。
- 以符號 $A_{(i)}$ 表示矩陣 A 的第 i 列, $i \in [m]$。
- 以符號 $A^{(j)}$ 表示矩陣 A 的第 j 行, $j \in [n]$。
- $e_i = [0_{\mathbb{T}}, \ldots, 1_{\mathbb{T}}, \ldots, 0_{\mathbb{T}}]^t = [-\infty, \ldots, 0, \ldots, -\infty]^t$, 其中除了第 i 個分量為 $1_{\mathbb{T}}$, 其他皆為 $0_{\mathbb{T}}$。
- $\Omega = \{j \in [n] : x_j = -\infty\}$。

定理 3.1:
若存在 $b_i = 0_{\mathbb{T}} = -\infty$, 則對於 $A_{(i)}$ 中非 $-\infty$ 所對應的行若為 $A^{(j)}$, 其所對應的變量 x_j 必須為 $-\infty$。

證明: 因為 $b_i=-\infty$ 且 $A\odot x=b$, 等式右邊同乘上 e_i^t, 得到 $e_i^t\odot(A\odot x)=(e_i^t\odot A)\odot x=e_i^t\odot b$, 即 $A_{(i)}\odot x=\max\{a_{ij}+x_j\colon j\in[n]\}=b_i=-\infty$。因此, 對於任何的 $a_{ij}\neq-\infty$, 由 $a_{ij}+x_j=-\infty$, 得到 $x_j=-\infty$。 □

- 從上述定理, 我們可以假設 b 向量中的每個元素都是有限。否則, 若 $b_i=-\infty$, 則我們可以確定哪些變量 $x_j=-\infty$, 除此之外, 第 i 列將變為 $-\infty=-\infty$, 因此, 可以直接刪除 $A_{(i)}$ 及 b_i, 此時 m 將降為 $m-1$。且因為 $x_j=-\infty$, $x_j\odot A^{(j)}\leq b$, 因此, 可以直接去掉 $A^{(j)}$ 及變數 x_j, 此時 n 將降為 $n-1$。

- 若 $A^{(j)}=-\infty$ 則對於任意的 $x_j\in\mathbb{T}$ 都有 $x_j\odot A^{(j)}\leq b$, 即變數 x_j 並不影響最後的結果, 它可以是任意數。同理我們可以直接去除 $A^{(j)}$ 及變數 x_j, 此時 n 將降為 $n-1$。

- 由於 b 的每個分量都假設為有限, 因此, 對於每一列 $A_{(i)}\odot x=b_i$, 兩邊做熱帶乘法乘上 b_i^{-1}. 得到, $A_{(i)}\odot x\odot b_i^{-1}=(A_{(i)}\odot b_i^{-1})\odot x=b_i\odot b_i^{-1}=0$。所以, 我們之需要考慮 $A\odot x=1_{\mathbb{T}}=0$, 這樣的線性系統。

由以上幾點的討論, 我們將只針對 $A\odot x=0$ 且 $A^{(j)}\neq-\infty$ 這樣的熱帶線性系統進行求解。

首先觀察熱帶線性系統 $A\odot x=0$, 展開可以得到

$$\begin{array}{rcl}
\max\{a_{11}+x_1,\quad a_{12}+x_2,\quad a_{13}+x_3,\quad \dots\quad ,a_{1n}+x_n\} & = & 0\\
\max\{a_{21}+x_1,\quad a_{22}+x_2,\quad a_{23}+x_3,\quad \dots\quad ,a_{2n}+x_n\} & = & 0\\
\max\{a_{31}+x_1,\quad a_{32}+x_2,\quad a_{33}+x_3,\quad \dots\quad ,a_{3n}+x_n\} & = & 0\\
\vdots\qquad\qquad \vdots\qquad\qquad \vdots\qquad\quad \ddots\qquad \vdots & & \vdots\\
\max\{a_{m1}+x_1,\quad a_{m2}+x_2,\quad a_{m3}+x_3,\quad \dots\quad ,a_{mn}+x_n\} & = & 0
\end{array}$$

由縱向觀察可以得知, 對於每個 $j\in[n]$, $\max\{a_{ij}+x_j\colon i\in[m]\}\leq 0$, 即若 x 是熱帶線性方程 $A\odot x=0$ 的解則

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}-\max\{a_{i1}\colon i\in[m]\}\\-\max\{a_{i2}\colon i\in[m]\}\\-\max\{a_{i3}\colon i\in[m]\}\\\vdots\\-\max\{a_{in}\colon i\in[m]\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\min\{0-a_{i1}\colon i\in[m]\}\\\min\{0-a_{i2}\colon i\in[m]\}\\\min\{0-a_{i3}\colon i\in[m]\}\\\vdots\\\min\{0-a_{in}\colon i\in[m]\}\end{bmatrix}=A^*\odot' 0\in\mathbb{R}^n。$$

事實上, $A^*\odot'0$ 為 $A\odot x\leq 0$ 的最大解, 即 x 為 $A\odot x\leq 0$ 的解若且唯若 $x\leq A^*\odot'0$。

定理 3.2:

熱帶線性系統 $A \odot x = 0$ 在 $\mathbb{T}^n$ 有解若且唯若 $A^* \odot' 0$ 滿足 $A \odot x = 0$。

證明: 假設 s 為 $A \odot x = 0$ 的一個解則 $s \leq A^* \odot' 0$, 所以可以得知 $0 = A \odot s \leq A \odot (A^* \odot' 0) \leq 0$。因此, $A^* \odot' 0$ 滿足 $A \odot x = 0$。 □

定義 3.3:

對於給定的熱帶線性系統 $A \odot x = 0$, 若 A 中每一行 $A^{(j)}$ 除了最大元素外均為 $-\infty$, 則我們稱之為標準型(*standard form*)。

由於 $A \odot x = 0$ 的解 x_j 只跟 $\max\{a_{ij} \colon i \in [m]\}$ 有關, 故對於每一個 $A^{(j)}$ 若 $a_{ij} \neq \max\{a_{ij} \colon i \in [m]\}$, 我們可以令 $a_{ij} = -\infty$ 並不會改變 $A \odot x = 0$ 的解。從此, A 可以考慮每一行除了最大元素外均為 $-\infty$, 即對於給定的熱帶線性系統 $A \odot x = 0$, 我們將先進行標準化才開始求解。

由以上假設之下, 對於每一個 $i \in [m]$, 令 $I_i = \{j \in [n] \colon a_{ij} \neq -\infty\}$。由於 $A \odot x = 0$ 有解意思是對於每一列均有某一個 $a_{ij} + x_j = 0$, 因此有以下定理。

定理 3.4:

熱帶線性系統 $A \odot x = 0$ 在 $\mathbb{T}^n$ 有解若且唯若 $I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m \neq \emptyset$。(即, A 的每一列包含一個行最大的元素)

對於每一個元素 $(j_1, j_2, \ldots, j_m) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m$, 定義 $|(j_1, j_2, \ldots, j_m)| = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, 而 $|I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m| = \{|(j_1, j_2, \ldots, j_m)| \colon (j_1, j_2, \ldots, j_m) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m\}$。其中我們稱每一個 $(j_1, j_2, \ldots, j_m) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m$ 為一個勝序列(*win sequence*)。

對於每一個元素 $I \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_m$, 都對應一組解。形式如下:

$$x_j = \min\{0 - a_{ij} \colon i \in [m]\}, \text{對於任意 } j \in |I|$$
$$x_j \leq \min\{0 - a_{ij} \colon i \in [m]\}, \text{對於任意 } j \in [n] \setminus |I|。$$

第二節　演算法及例子

我們用以下方式來求解幾個熱帶線性系統 $A \odot x = b$ 的例子。

- 步驟一: 給定 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{T}), b \in \mathbb{T}^m$, 若 b 中有 $-\infty$ 元素, 則由 A 判斷哪些 x 的分量為 $-\infty$, 並將它的索引值加入 Ω, 並且記錄是否有無窮行, 即哪些 x 的分量不受限制。

- 步驟二: 去除已知的變量, 將無效的方程去除。
- 步驟三: 將 b 的分量由 A 的列中扣除, 使 b 變為 0。
- 步驟四: 將 A 的每行最大元素保留, 其餘都改為 $-\infty$。
- 步驟五: 求出勝序列並求出通解。

範例 3.5:

求解 $A \odot x = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & -\infty \\ 6 & 7 & -\infty & -\infty \\ 1 & 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 13 \end{bmatrix}。$$

由 $A^{(4)} = -\infty$ 得知 x_4 可以為任意 $\mathbb{T}$ 中的元素，去除 $A^{(4)}$ 及 x_4, 變成

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 6 & 7 & -\infty \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 13 \end{bmatrix}。$$

再將等式右邊化為 0, 得到

$$\begin{bmatrix} -12 & -8 & -16 \\ -12 & -11 & -\infty \\ -12 & -13 & -12 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

找出每行的最大值, 其他改為 $-\infty$, 得到熱帶線性系統

$$\begin{bmatrix} -12 & -8 & -\infty \\ -12 & -\infty & -\infty \\ -12 & -\infty & -12 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

因此，得到熱帶線性系統的解為

$$x = \begin{bmatrix} 12 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \text{其中} \begin{cases} x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 12 \\ x_4 \in \mathbb{T} \end{cases}。$$

範例 3.6:

求解 $A \odot x = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & 10 & 6 & -\infty & 4 & -\infty & 6 & -\infty \\ 1 & 0 & 10 & 5 & -10 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10 & -\infty & 3 & -\infty & -5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10 & -\infty & -\infty & -2 & -10 & -10 & 0 & -\infty \\ -7 & -2 & -\infty & 3 & -\infty & -\infty & -1 & 3 \\ 10 & -\infty & 9 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\infty \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

在這個例子當中, $b_{(1)} = -\infty$, 因此, $x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = -\infty$。所以可以先簡化為

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -\infty & -\infty \\ 10 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10 & -2 & -10 & -\infty \\ -7 & 3 & -\infty & 3 \\ 10 & -\infty & -\infty & -7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

將 b 化為 0, 得到以下系統

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -\infty & -\infty \\ 9 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 9 & -3 & -11 & -\infty \\ -8 & 2 & -\infty & 2 \\ 9 & -\infty & -\infty & -8 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

除了每行的最大元素以外, 均改為 $-\infty$, 得到以下熱帶線性系統

$$\begin{bmatrix} -\infty & 4 & -\infty & -\infty \\ 9 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 9 & -\infty & -11 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 \\ 9 & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

因此，得到熱帶線性系統的解為

$$x = \begin{bmatrix} -9 & -\infty & -\infty & -4 & -\infty & x_6 & -\infty & -2 \end{bmatrix}^t, \text{其中 } x_6 \leq 11。$$

最大解為

$$x^{\#} = \begin{bmatrix} -9 & -\infty & -\infty & -4 & -\infty & 11 & -\infty & -2 \end{bmatrix}^t。$$

第四章　雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$

對於雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$, 其中, $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{T}), B \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{T}), x \in \mathbb{T}^p, y \in \mathbb{T}^q$, 顯然的 $x = -\infty, y = -\infty$ 是一個解, 稱為零解(*triviall solution*)。對於這類熱帶線性系統, 我們主要目標是希望知道是否具有實數解, 即 $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$。對於這樣的線性系統求通解, 需要較繁雜的計算過程, 因此, 我們以 MATLAB 作為輔助。

第一節　問題求解

為了簡化問題, 我們可以假設 A, B 不具有無窮行及無窮列, 即對於任意 $i = 1, \ldots, m$, $A_{(i)} \neq -\infty, B_{(i)} \neq -\infty$, 且對於任意 $j = 1, \ldots, p, k = 1, \ldots, q$, $A^{(j)} \neq -\infty$, $B^{(k)} \neq -\infty$。因為, 當 A 的第 j 行為 $-\infty$ 則 x_j 將是 $\mathbb{T}$ 中的任意數。而如果 A 的第 i 列為 $-\infty$ 則當 $B_{ik} \neq -\infty$ 時 y_k 將是 $-\infty$。除了這些訊息之外, 對於其他 x, y 的分量求解將不賦與其他訊息, 也就是在這些情況下, 我們將可以簡化問題成我們預先假設的形式。

定義 4.1:
對於一個給定的矩陣 A, 若每一行與每一列都至少有一個有限元素, 則我們在此稱 A 為 $\mathfrak{N}$ 類矩陣。

性質 4.2:
給定任兩個 $\mathfrak{N}$ 類矩陣 A, B,則 $A \odot B$ 依然是一個 $\mathfrak{N}$ 類矩陣。

證明: 欲證明這個性質, 首先我們考慮 $A \odot B$ 的第 i^* 列是否有有限元素。因為 A 是 $\mathfrak{N}$ 類矩陣, 所以必存在 k^* 使得 $A_{i^*k^*} \neq -\infty$, 又因為 B 也是 $\mathfrak{N}$ 類矩陣, 因此, 存在 j^* 使得 $B_{k^*j^*} \neq -\infty$, 所以 $A \odot B$ 的第 i^* 列中 $(A \odot B)_{i^*j^*} = \max_k\{A_{i^*k} + B_{kj^*}\} \geq A_{i^*k^*} + B_{k^*j^*} \in \mathbb{R}$。由於 i^* 任意的且對於列也是同樣的情況, 因此得證 $A \odot B$ 是 $\mathfrak{N}$ 類

矩陣。 □

備註 4.3:
一個向量 $x \in \mathbb{T}^n$ 是 $\mathfrak{N}$ 類矩陣若且唯若 $x \in \mathbb{R}^n$。

推論 4.4:
$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ 是 $\mathfrak{N}$ 類矩陣, x 屬於 $\mathbb{R}^n$, 則 $A \odot x$ 屬於 $\mathbb{R}^n$。

證明: 直接由備註 4.3 得證。 □

在 [6] 的文章中提到一個利用迭代方式來收斂到解的方法, 稱為交錯法(*alternating method*), 以下先做簡要介紹:

- 步驟一: 先給定一個實數向量 $x(0) \in \mathbb{R}^p$。
- 步驟二: 求解 $A \odot x(0) \geq B \odot y$ 的最大解 $y(0)$, 即 $y(0) = B^* \odot' (A \odot x(0))$。
- 步驟三: 求解 $A \odot x \leq B \odot y(0)$ 的最大解 $x(1)$, 即 $x(1) = A^* \odot' (B \odot y(0))$。
- 步驟四: 依此步驟 $y(k) = B^* \odot' (A \odot x(k)), x(k+1) = A^* \odot' (B \odot y(k))$。
- 步驟五: 若收斂, 則 $(x(k), y(k))$ 會收斂到 $A \odot x = B \odot y$ 的一個解。

由性質 2.11 與推論 4.4 可以得知, 上面過程中 $x(k), y(k)$ 都是有限, 並能證明具有單調性質, 除此之外在文章 [6] 中並證明有以下定理:

定理 4.5:
對於任意給定的 $x(0)$, 序列 $(x(k), y(k))$ 收斂若且唯若雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 有解。[6]

因此有關於雙邊齊次熱帶線性系統的解存在性問題, 大致已經有所了解。在此我們的目標將是希望得到 $A \odot x = B \odot y$ 的一般解。

要求解 $A \odot x = B \odot y$, 意思是對應每一個 $i \in [m]$, 求 x, y 使得 $\max_j\{a_{ij} + x_j\} = \max_k\{b_{ik} + y_k\}$。

我們先從一個簡單的例子開始。

範例 4.6:
求解雙邊齊次熱帶線性系統 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$。

在這個例子當中, 等式要成立必定每一列的左式與右式都會有一項達到最大值, 我們將從這進行討論。

由於可能的選擇有很多, 所以我們先就單一情況做討論如下:

$$\begin{cases} 1+x_1 &= 6+y_2 \\ 3+x_1 &= 8+y_1 \\ 2+x_2 &\leq 1+x_1 \\ 5+y_1 &\leq 6+y_2 \\ 4+x_2 &\leq 3+x_1 \\ 7+y_2 &\leq 8+y_1 \end{cases}$$

可以發現我們要解的系統可以化為特殊形式古典等式系統 S 與不等式系統 T, 每一個等式與不等式中只含有兩個變量。我們將等式與不等式分開處理。

$$S\colon \begin{cases} 1+x_1 &= 6+y_2 \\ 3+x_1 &= 8+y_1 \end{cases}$$

$$T\colon \begin{cases} 2+x_2 &\leq 1+x_1 \\ 5+y_1 &\leq 6+y_2 \\ 4+x_2 &\leq 3+x_1 \\ 7+y_2 &\leq 8+y_1 \end{cases}$$

對於等式 S 的部份我們以高斯-喬登消去法處理, 可以得到

$$S\colon \begin{cases} x_1 & & -y_2 & -5 & = & 0 \\ & -y_1 & +y_2 & & = & 0 \end{cases}$$

代入 T 可以得到

$$T\colon \begin{cases} x_2 & -y_2 & -4 & \leq & 0 \\ & & -1 & \leq & 0 \\ x_2 & -y_2 & -4 & \leq & 0 \\ & & -1 & \leq & 0 \end{cases}$$

去除無作用的方程式並簡化可以得知

$$T\colon\ x_2 \quad -y_2 \quad -4 \ \leq\ 0$$

即對應的解為

$$\begin{cases} x_1 &= y_2+5 \\ y_1 &= y_2 \\ x_2 &\leq y_2+4 \end{cases} 。$$

這是解的一部分, 另外一組解為

$$\begin{cases} x_2 &= & y_2+4 \\ y_1 &= & y_2 \\ x_1 &\leq & y_2+5 \end{cases} 。$$

為了簡化符號, 我們將雙邊齊次熱帶線性系統寫成增廣矩陣的形式

$$M=[A|B], M\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{T}), n=p+q,$$

如同一般熱帶線性系統, 若解存在, 則每一列左式與右式都會有一項達到最大值並且相等, 在 M 中分別對應到兩個位置, 這樣的序對在此我們稱為勝數對(*winning pair*)。

定義 4.7:
令 $WA(i)=\{j\in\{1,\dots,p\}: a_{ij}\neq-\infty\}$, $WB(i)=\{p+j\in\{p+1,\dots,n\}: b_{ij}\neq-\infty\}$, 則我們稱 $\mathrm{win}(i)=WA(i)\times WB(i)$ 中的元素每一個元素為勝數對。

備註 4.8:
考慮 $i\in[m]$, 若 $I=(j,k)\in\mathrm{win}(i)$ 為一個勝數對, 令符號

$$\bar{l}:=\begin{cases} l & ,\text{當 } l\in\{1,\dots,p\} \\ l-p & ,\text{當 } l\in\{p+1,\dots,n\} \end{cases},$$

則 $m_{ij}+x_{\bar{j}}=m_{ik}+y_{\bar{k}}$, 即 $a_{i\bar{j}}+x_{\bar{j}}=b_{i\bar{k}}+y_{\bar{k}}$。並且 $m_{il}+x_{\bar{l}}\leq m_{ij}+x_{\bar{j}}$, 對於任意 $l\in\{1,\dots,p\}\setminus|I|$, $m_{il}+y_{\bar{l}}\leq m_{ij}+x_{\bar{j}}$, 對於任意 $l\in\{p+1,\dots,n\}\setminus|I|$。

定義 4.9 (熱帶行列式值(*tropical determinant*)):
給定一個方陣 $M\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{T})$, 定義一個矩陣 M 的熱帶行列式值為

$$\mathrm{tropdet}(M)=|M|_{\mathrm{trop}}:=\bigoplus_{\sigma\in S_n} m_{1\sigma(1)}\odot m_{2\sigma(2)}\odot\cdots\odot m_{n\sigma(n)}。$$

範例 4.10:
給定矩陣

$$M=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 8 & -4\end{bmatrix}$$

則

$$\mathrm{tropdet}(M)=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 8 & -4\end{vmatrix}_{\mathrm{trop}}=\max\{5-4,7+8\}=15。$$

定理 4.11:
令 $M = [A|B]$, $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{T})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{T})$, M 中的兩列 $i_1, i_2 \in [m], i_1 < i_2$, 對應的勝數對為 $I_1 = (j_1, k_1) \in \mathrm{win}(i_1), I_2 = (j_2, k_2) \in \mathrm{win}(i_2)$。若雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 有解, 則

$$m_{i_1j_1} + m_{i_2j_2} \geq m_{i_1j_2} + m_{i_2j_1}, \tag{4.1}$$

$$m_{i_1j_1} + m_{i_2k_2} \geq m_{i_1k_2} + m_{i_2j_1}, \tag{4.2}$$

$$m_{i_1k_1} + m_{i_2j_2} \geq m_{i_1j_2} + m_{i_2k_1}, \tag{4.3}$$

$$m_{i_1k_1} + m_{i_2k_2} \geq m_{i_1k_2} + m_{i_2k_1} \text{。} \tag{4.4}$$

證明: 當我們考慮 $M = [A|B]$ 中的兩列 $i_1, i_2 \in [m], i_1 < i_2$, 對應的勝數對為 $I_1 = (j_1, k_1) \in \mathrm{win}(i_1), I_2 = (j_2, k_2) \in \mathrm{win}(i_2)$。依據勝數對的意義, 必須滿足以下八個式子:

$$m_{i_1j_1} + x_{\overline{j_1}} \geq m_{i_1j_2} + x_{\overline{j_2}}, \tag{4.5}$$

$$m_{i_1j_1} + x_{\overline{j_1}} \geq m_{i_1k_2} + y_{\overline{k_2}}, \tag{4.6}$$

$$m_{i_1k_1} + y_{\overline{k_1}} \geq m_{i_1j_2} + x_{\overline{j_2}}, \tag{4.7}$$

$$m_{i_1k_1} + y_{\overline{k_1}} \geq m_{i_1k_2} + y_{\overline{k_2}}, \tag{4.8}$$

$$m_{i_2j_2} + x_{\overline{j_2}} \geq m_{i_2j_1} + x_{\overline{j_1}}, \tag{4.9}$$

$$m_{i_2j_2} + x_{\overline{j_2}} \geq m_{i_2k_1} + y_{\overline{k_1}}, \tag{4.10}$$

$$m_{i_2k_2} + y_{\overline{k_2}} \geq m_{i_2j_1} + x_{\overline{j_1}}, \tag{4.11}$$

$$m_{i_2k_2} + y_{\overline{k_2}} \geq m_{i_2k_1} + y_{\overline{k_1}}, \tag{4.12}$$

因此, 可以得知:

$$m_{i_1j_1} + m_{i_2j_2} \geq m_{i_1j_2} + m_{i_2j_1} (\text{由 } (4.5),(4.9) \text{ 式}),$$

$$m_{i_1j_1} + m_{i_2k_2} \geq m_{i_1k_2} + m_{i_2j_1} (\text{由 } (4.6),(4.11) \text{ 式}),$$

$$m_{i_1k_1} + m_{i_2j_2} \geq m_{i_1j_2} + m_{i_2k_1} (\text{由 } (4.7),(4.10) \text{ 式}),$$

$$m_{i_1k_1} + m_{i_2k_2} \geq m_{i_1k_2} + m_{i_2k_1} (\text{由 } (4.8),(4.12) \text{ 式})\text{。}$$

□

定義 4.12 (相容性(*compatibility*)):
若 $i_1, i_2 \in [m], i_1 < i_2$, 且 $I_1 \in \mathrm{win}(i_1), I_2 \in \mathrm{win}(i_2)$ 滿足 (4.1) $\sim$ (4.4), 則稱 I_1, I_2 相容(*compatible*)。

備註 4.13:
假設 $i_1, i_2 \in [m], i_1 < i_2$, 且 $I_1 \in \mathrm{win}(i_1), I_2 \in \mathrm{win}(i_2)$, 若 I_1, I_2 相容, 則

$$\begin{vmatrix} m_{i_1l_1} & m_{i_1l_2} \\ m_{i_2l_1} & m_{i_2l_2} \end{vmatrix}_{trop} = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} m_{i_1l_1} & m_{i_1l_2} \\ m_{i_2l_1} & m_{i_2l_2} \end{bmatrix}\right), \text{對於任意} l_1 \in |I_1|, l_2 \in |I_2| \text{。}$$

在求解的過程中必須先知道每一列勝數對可能選取有哪些, 並且勝數對必須兩兩相容, 這樣的勝數對序列, 我們稱之為勝序列。

定義 4.14:
令 $\Upsilon = (I_1, \ldots, I_m)$, 其中, $I_h \in \mathrm{win}(h)$, 對於任意 $h \in [m]$。若對於任意給定 $i_1, i_2 \in [m]$, I_{i_1}, I_{i_2} 均相容, 則我們稱 Υ 為一個勝序列(*win sequence*)。

範例 4.15:
我們使用範例 4.6 作為例子,

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \end{array}\right]$$

對應的 $WA(1) = WA(2) = \{1,2\}, WB(1) = WB(2) = \{3,4\}, \mathrm{win}(1) = \mathrm{win}(2) = \{(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)\}$。

因此, 最多的會有 16 組勝序列, 但實際上並不是每一組都相容。如 $((1,3),(1,3))$ 不是一個勝序列。因為,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}_{trop} = 1+3, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}_{trop} \neq 5+3, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}_{trop} = 1+8, \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}_{trop} = 5+8 \text{。}$$

而 $((1,4),(1,3))$ 則是一個勝序列, 因為,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}_{trop} = 1+3, \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}_{trop} = 6+3, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}_{trop} = 1+8, \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}_{trop} = 6+8 \text{。}$$

依此步驟, 我們將得到全部共 4 組勝序列分別為 $\Upsilon_1 = ((1,4),(1,3))$, $\Upsilon_2 = ((1,4),(2,3))$, $\Upsilon_3 = ((2,4),(1,3))$, $\Upsilon_4 = ((2,4),(2,3))$。

當我們知道勝序列之後, 對應每一個勝序列求解, 我們將分為兩個部分等式系統 S 與不等式系統 T(忽視無效的方程與不等式, 例如: $-\infty \leq a$ 這種形式), 表示成矩陣形式時我們以 C 與 D 分別表示。

範例 4.16:
接續我們先前的例子, 對於勝序列 $((1,4),(1,3))$。 對應可以得到等式系統

$$S: \begin{cases} 1 + x_1 = 6 + y_2 \\ 3 + x_1 = 8 + y_1 \end{cases}$$

與不等式系統

$$T: \begin{cases} 2+x_2 & \leq & 1+x_1 \\ 5+y_1 & \leq & 1+x_1 \\ 4+x_2 & \leq & 3+x_1 \\ 7+y_2 & \leq & 3+x_1 \end{cases} 。$$

對應的我們以矩陣

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

以及

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

分別表示 S 與 T。

在求解雙邊齊次熱帶線性系統時, 我們希望求解 x, y 佈於 $\mathbb{R}$, 滿足 $A \odot x = B \odot y$。我們將它轉換為古典的線性系統與不等式系統。對於等式的部分我們可以使用高斯-喬登消去法(*Gauss–Jordan elimination*)來簡化為化簡列梯式(*reduced row echelon form*), 代入不等式中, 我們將能夠減少不等式部分的變數個數。對於不等式的部分我們將進一步使用類似高斯-喬登消去法的列運算來達成化簡的目的, 當然這樣的運算必須要能夠保解才具有意義, 我們將會以次特殊化(*sub-specialize*)來稱呼這樣的過程, 而得到化簡後的矩陣稱作次特殊矩陣(*sub-special matrix*)。

在簡化 D 的過程我們允許的列運算如下:

1. 任意交換兩列。
2. 若 D 的其中兩列, 為 $r = (r_1, \ldots, r_n, a)$ 與 $s = (r_1, \ldots, r_n, b)$, 且 $a \leq b$ 則可以移除 r。
3. 任意相加 D 中的任意兩列得到 s, 若 s 與其他 D 中某列 r 滿足 $r = (r_1, \ldots, r_n, a)$, $s = (r_1, \ldots, r_n, b)$ 且 $a \leq b$, 則以 s 取代 r。
4. 若 D 中的任意兩列相差一個負號, 則將其中一列增加到 C 中, 並從 D 中移除此兩列。

透過以上四種運算, 且 D 有解, 我們將能夠將 D 化為以下定義的矩陣, 稱之為次特殊矩陣。

定義 4.17:

令 $G \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{T})$, G' 為 G 刪去最後一行。若 G 滿足以下條件:

1. G' 的每一列為 $(1,-1,0,\ldots,0)$ 的一種排列。

2. G' 中的任兩列兩兩互異, 且 G 中任兩列不能相差一個負號。

3. 若存在 $i_1 < i_2$ 使得 $G'_{(i_1)} = -G'_{(i_2)}$, 則 $i_2 = i_1 + 1$, $g_{i_1(n+1)} + g_{i_2(n+1)} < 0$, 且 $G'_{(i_1)}$ 為

$$(\overbrace{0,\ldots,0}^{j-1},1,\overbrace{0,\ldots,0}^{l-1},-1,0,\ldots,0),\ j,l \in [n]$$

   這種形式。

4. 若存在 $i \in [m]$ 使得 $G'_{(i)} \neq -G'_{(i+1)}$, 此兩列不為 0 元素所對應的行數數對分別為 $(j_{11},j_{12}),(j_{21},j_{22})$, 此兩數對滿足字母次序(數字小者優先)。(例如: 若 G' 中有兩列分別為 $(0,0,1,0,-1)$ 與 $(0,0,1,-1,0)$, 則 $(0,0,1,-1,0)$ 在 G' 中的列數將較前。)

則我們稱 G 是一個次特殊矩陣。

範例 4.18:

我們一樣接續前例, 將 C 化為化簡列梯式

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

代入 D, 得

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

次特殊化得到 $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$。

而得到對應勝序列 $((1,4),(1,3))$ 的解,

$$\begin{cases} x_1 &=& y_2 + 5 \\ y_1 &=& y_2 \\ x_2 &\leq& y_2 + 4 \end{cases}。$$

同理對應勝序列 $((1,4),(1,3))$ 的解為

$$\begin{cases} x_1 &=& y_2 + 5 \\ x_2 &=& y_2 + 4 \\ y_1 &=& y_2 \end{cases},$$

對應勝序列 $((2,4),(1,3))$ 的解為

$$\begin{cases} x_1 &= y_2+5 \\ x_2 &= y_2+4 \\ y_1 &= y_2 \end{cases},$$

對應勝序列 $((2,4),(2,3))$ 的解為

$$\begin{cases} x_2 &= y_2+4 \\ y_1 &= y_2 \\ x_1 &\leq y_2+5 \end{cases}。$$

第二節　演算法及例子

我們以下描述整個求解的過程。

- 步驟一: 給定 $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{T}), B \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{T})$, 令 $M=[A|B]$, 對於每一個 $i \in [m]$ 計算出勝數對存成三維陣列 $W(r$ 列, 2 行, m 頁), 每一頁 i 儲存可能的勝數對, 不足的地方以 0 取代。
- 步驟二: 計算出所有勝序列存入三維陣列 $WS(m$ 列, 2 行, p 頁, 其中 $0 \leq p \leq r^m)$, 每一頁保留符合相容性條件的勝數對序列。若 WS 為空矩陣, 則跳過以下步驟 x, y 無實數解。
- 對於每一個勝序列 Υ 執行步驟三~步驟六: (以 $\mathrm{sol}_{C_\Upsilon}$ 與 $\mathrm{sol}_{D_\Upsilon}$ 分別表示 $C_\Upsilon\begin{bmatrix}x^t & -y^t & 1\end{bmatrix}^t=0$ 與 $D_\Upsilon\begin{bmatrix}x^t & -y^t & 1\end{bmatrix}^t \leq 0$ 的解)
  - 步驟三: 求出對應的 C_Υ, D_Υ。
  - 步驟四: 將 C_Υ 化為化簡列梯式, 代入 D_Υ 中。
  - 步驟五: 對 D_Υ 進行次特殊化若可化為次特殊矩陣, 則繼續進行步驟, 否則 $\mathrm{sol}_\Upsilon=\emptyset$。過程中若 C_Υ 的列數有新增(第4種列運算), 則重新回到步驟四。
  - 步驟六: 對應 Υ 的解為 $\mathrm{sol}_\Upsilon=\mathrm{sol}_{C_\Upsilon}\cap\mathrm{sol}_{D_\Upsilon}$。
- 步驟七: 雙邊齊次熱帶線性系統的解為 $\bigcup_{\Upsilon\in WS}\mathrm{sol}_\Upsilon$。

最後我們以一個較繁雜的例子說明。

範例 4.19:

設

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

求解雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$。

由 [6] 我們可以知道, 這樣的線性系統解存在, 即交錯法收斂。在此我們希望求出通解。

寫成矩陣形式

$$M = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -\infty & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -\infty & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

對應的勝數對為 $WA(1) = \{1,3\}$, $WA(2) = \{1,2,3\}$, $WA(3) = \{2,3\}$, $WB(1) = WB(2) = WB(3) = \{4,5\}$。

可能的勝序列有 $\Upsilon_1 = ((1,4),(2,4),(2,4))$, $\Upsilon_2 = ((1,4),(2,4),(3,4))$, $\Upsilon_3 = ((3,4),(2,4),(2,4))$, $\Upsilon_4 = ((3,4),(2,4),(3,4))$, $\Upsilon_5 = ((1,5),(2,4),(2,4))$, $\Upsilon_6 = ((1,5),(2,4),(3,4))$, $\Upsilon_7 = ((1,5),(2,5),(2,4))$, $\Upsilon_8 = ((1,5),(2,5),(3,4))$, $\Upsilon_9 = ((3,5),(2,4),(2,4))$, $\Upsilon_{10} = ((3,5),(2,4),(3,4))$, $\Upsilon_{11} = ((3,5),(2,5),(2,4))$, $\Upsilon_{12} = ((3,5),(2,5),(3,4))$, 共 12 組。

對勝序列 $\Upsilon_1 = ((1,4),(2,4),(2,4))$, 可以得到等式系統

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

與不等式系統

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

將 C 化為化簡列梯式並帶入 D 得,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

對 D 進行化簡成為次特殊矩陣得

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

因此對應勝序列 Υ_1 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_1}: \begin{cases} x_1 & = & y_1 - 2 \\ x_2 & = & y_1 + 2 \\ x_3 & \leq & y_1 + 1 \\ y_2 & \leq & y_1 \end{cases} 。$$

其餘不同的解列出如下:

對應勝序列 Υ_3 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_3}: \begin{cases} x_2 & = & y_1 + 2 \\ x_3 & = & y_1 + 1 \\ x_1 & \leq & y_1 - 2 \\ y_2 & \leq & y_1 \end{cases} ,$$

對應勝序列 Υ_5 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_5}: \begin{cases} x_1 & = & y_2 - 2 \\ x_2 & = & y_1 + 2 \\ x_3 & \leq & y_1 + 1 \\ x_3 & \leq & y_2 + 1 \\ y_1 & \leq & y_2 \\ y_2 & \leq & y_1 + 1 \end{cases} ,$$

對應勝序列 Υ_6 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_6}: \begin{cases} x_1 &= y_2 - 2 \\ x_2 &= y_1 + 2 \\ x_3 &= y_1 + 1 \\ y_1 &\leq y_2 \\ y_2 &\leq y_1 + 1 \end{cases},$$

對應勝序列 Υ_7 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_7}: \begin{cases} x_1 &= y_2 - 2 \\ x_2 &= y_2 + 1 \\ y_1 &= y_2 - 1 \\ x_3 &\leq y_2 \end{cases},$$

對應勝序列 Υ_8 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_8}: \begin{cases} x_1 &= y_2 - 2 \\ x_2 &= y_2 + 1 \\ x_3 &= y_2 \\ y_1 &= y_2 - 1 \end{cases},$$

對應勝序列 Υ_9 的解為

$$\mathrm{sol}_{\Upsilon_9}: \begin{cases} x_2 &= y_2 + 2 \\ x_3 &= y_2 + 1 \\ y_1 &= y_2 \\ x_1 &\leq y_2 - 2 \end{cases}。$$

第五章　結論

由前面各章節的討論, 我們對這兩大類型的熱帶線性系統的求解給出了相對應的算法。對於熱帶線性系統 $A \odot x = b$, 我們將 b 中出現 $-\infty$ 元素的部分優先處理, 使得最終只需要處理 $A \odot x = 0$ 這種形式的問題。接著化為標準型後, 利用勝序列的概念, 我們容易的可以算出原先要求的熱帶線性系統 $A \odot x = b$ 的解。

對於雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 這類的問題, 首先我們試著找出所有可能的勝數對, 考慮由勝數對所構成的所有長度 m 的序列中, 用相容性條件我們可以得到符合相容性條件的勝序列。對應每一個勝序列構造對應的等式系統 $S\colon C[x^t \ -y^t\ 1]^t = 0$ 與不等式系統 $T\colon D[x^t \ -y^t\ 1]^t \le 0$, 對於等式系統 S 進行高斯-喬登消去法, 不等式系統 T 進行次特殊化, 不斷交替進行運算直到不再變動, 最終我們將可以得到雙邊次熱帶線性系統的解。

由前述的過程, 我們已能透過勝序列的概念, 來求熱帶線性系統 $A \odot x = b$ 在 $\mathbb{T}^n$ 下的解, 以及雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 在 $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 中的求解, 並且利用演算法能夠清楚得到他們通解的形式, 而非只是求得特解。當然, 還有部分尚未被解決的問題, 如雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 在 $\mathbb{T}^p, \mathbb{T}^q$ 中的求解, 在我們前述的討論中, 我們並沒有考慮解有部分 $-\infty$ 的情形, 在此狀況下求解, 會添加很大的複雜程度, 對於此問題還可以繼續深入的探討。

另外, 對於使用的程式方面, 我們使用的是 MATLAB(R2011b) 這一套軟體, 關於這套軟體可以參考軟體網頁 [9] 或相關的書籍 [10]。它主要常被用來進行數值計算, 較不善於用在代數計算上。在此我使用它來作為工具只是對於 MATLAB 較為熟悉, 以免造成計算時程式設計上的疏忽。在這方面, 可以考慮使用其他用在代數運算的軟體來做為取代。對於演算法的部分, 未來相信可以尋求到更快速的演算法來求得通解, 是我們未來可以繼續深入探討的方向。

附 錄

A1. 求解熱帶線性系統 $A \odot x = b$ 的主程式碼

```
function [maxsol,UBD,ARB,remain,A1]=STLS(A,b)
% 求解熱帶線性系統  A x = b
[m n]=size(A);
UBD=[]; % 負無窮變數
ARB=[]; % 不受限制的變數
ridx=1:m;
cidx=1:n;
if m~=length(b)
    maxsol='no solution';
    UBD='no solution';
    ARB='no solution';
else
    for i=ridx(b==-inf)
        UBD=union(UBD,cidx(A(i,:)~=-inf));
    end
    ARB=union(ARB,cidx(all(A==-inf,1)));
    remain=setdiff(setdiff(cidx,UBD),ARB);
    A=A(ridx(b~=-inf),remain);
    b=b(b~=-inf);
    for i=1:size(A,1)
        A(i,:)=A(i,:)-b(i);
    end
    W=max(A,[],1);
    A(A~=ones(size(A,1),1)*W)=-inf;
    if any(all(A==-inf,2),1)
        maxsol='no solution';
        UBD='no solution';
        ARB='no solution';
    else
```

```
        maxsol=-max(A,[],1)';
    end
    A1=A;
end
```

A2. 求解雙邊齊次熱帶線性系統 $A \odot x = B \odot y$ 的主程式碼

```
function []=tshtls(A,B)
% 求解雙邊齊次熱帶線性系統 A x = B y
% 其中 A,B 無負無窮行,負無窮列
tic
if size(A,1)~=size(B,1)
    return
end
M=[A B];
WA=[A~=-inf logical(zeros(size(B)))];
WB=[logical(zeros(size(A))) B~=-inf];
[m n]=size(M);
% 計算所有 winnig pairs
W=[];col=1:n;
for i=1:m
    lengthWA=length(findelt(col,WA(i,:)));
    lengthWB=length(findelt(col,WB(i,:)));
    sz=lengthWA*lengthWB;
    W(1:sz,1:2,i)=cartprod(findelt(col,WA(i,:)),...
        findelt(col,WB(i,:)));
end
W;
% 計算所有 win sequence
[r,~,m]=size(W);
WS=zeros(m,2,r^m);
P=possiblecase(r,m);
for i=1:r^m
    for j=1:m
        WS(j,:,i)=W(P(i,j),:,j);
    end
end
temp=[];
ind=1;
for k=1:r^m
    tf=[];
    for i=1:m
        if (WS(i,1,k)~=0)&(WS(i,2,k)~=0)
            tf=[tf 1];
        else
```

```
            tf=[tf 0];
        end
    end
    if tf==ones(1,m)
        temp(1:m,1:2,ind)=WS(1:m,1:2,k);
        ind=ind+1;
    else
    end
end
WS=temp;
[m,~,p]=size(WS);
temp=[];
ind=1;
for k=1:p
    tf=[];
    for i=1:m-1
        for j=i+1:m
            chk=[WS(i,:,k);WS(j,:,k)];
            tf1=[];
            for i1=1:2
                for j1=1:2
                    tf1=[tf1 tropical2det([M(i,chk(1,i1)),...
                        M(i,chk(2,j1));
                        M(j,chk(1,i1)),M(j,chk(2,j1))])==...
                        M(i,chk(1,i1))+M(j,chk(2,j1))];
                end
            end
            if tf1==ones(1,4)
                tf=[tf 1];
            else
                tf=[tf 0];
            end
        end
    end
    if and(max(tf)==1,min(tf)==1)
        temp(1:m,1:2,ind)=WS(1:m,1:2,k);
        ind=ind+1;
    else
    end
```

```
end
WS=temp;
[m,~,p]=size(WS);
WS
numsol=0;
% 對應每一個 win sequence, 找出對應的解
for k=1:p
    display('------------------------------------------')
    k
    next=0;
    Y=WS(:,:,k)
    C=[];
    D=[];
    for i=1:m
        C(i,Y(i,1))=1;
        C(i,Y(i,2))=-1;
        C(i,n+1)=M(i,Y(i,1))-M(i,Y(i,2));
    end
    ind=1;
    for i=1:m
        for j=1:n
            if M(i,j)==-inf
            elseif (j~=Y(i,1))&(j~=Y(i,2))
                D(ind,Y(i,1))=-1;
                D(ind,j)=1;
                D(ind,n+1)=M(i,j)-M(i,Y(i,1));
                ind=ind+1;
            else
            end
        end
    end
    C;
    D;
    C1=C(:,1:end-1);
    if rank(C)~=rank(C1)
        continue
    end
    E=[];
    do=1;
```

```
while do==1
    do=0;
    C=[C;E];
    C=rref(C);
    C=C(1:rank(C),:);
    C1=C(:,1:end-1);
    WY=zeros(size(C,1),2);
    for i=1:size(WY,1)
        WY(i,:)=col(C1(i,:)~=0);
    end
    Set=unique(WY(:));
    c=0;
    CL=[];
    while ~isempty(Set)
        c=c+1;
        ind=[];
        temp=Set(1);
        for i=1:size(WY,1)
            if ismember(Set(1),WY(i,:))
                temp=union(temp,WY(i,:));
                ind=[ind i];
            end
        end
        WY(ind,:)=[];
        count=1;
        while count>0
            count=0;
            for i=temp
                ind=[];
                for l=1:size(WY,1)
                    if ismember(i,WY(l,:));
                        temp=union(temp,WY(l,:));
                        ind=[ind l];
                        count=count+1;
                    end
                end
                WY(ind,:)=[];
            end
        end
```

```
        Set=setdiff(Set,temp);
        CL(c,1:length(temp))=temp;
    end
    c;
    CL;
    % 代換
    total=CL(CL~=0);
    total=total(:);
    C1=C(:,1:end-1);
    D1=D(:,1:end-1);
    dontrm=col(any((C1==-1),1));
    replace=setdiff(total,dontrm);
    for i=1:size(C1,1)
        rp=col(C1(i,:)==1);
        dr=col(C1(i,:)==-1);
        for j=1:size(D1,1)
            if D(j,rp)==1
                D(j,rp)=0;
                D(j,dr)=D(j,dr)+1;
                D(j,end)=D(j,end)-C(i,end);
            elseif D(j,rp)==-1
                D(j,rp)=0;
                D(j,dr)=D(j,dr)-1;
                D(j,end)=D(j,end)+C(i,end);
            end
        end
    end
    D;
    D1=D(:,1:end-1);
    % 去除多餘的部分
    if ~isempty(D)
        D((all((D1==0)')&((D(:,end))'<=0)),:)=[];
    end
    D;
    % sub-specialization
    E=[];
    N=D;
    count=1;
    while count>0
```

```
count=0;
i=1;
while i<size(N,1)
    j=i+1;
    while j<=size(N,1)
        N1=N(:,1:end-1);
        ida=find(N1(i,:));
        idb=find(N1(j,:));
        [c, ia, ib]=intersect(ida,idb);
        if length(c)==1
            if N1(i,ida(ia))==-N1(j,idb(ib))
                temp=N(i,:)+N(j,:);
                for l=1:size(N,1)
                    if (temp(1:end-1)==N(l,1:end-1))&...
                            (temp(end)>N(l,end))
                        N(l,:)=temp;
                        count=count+1;
                    else
                    end
                end
            else
            end
        else
        end
        j=j+1;
    end
    i=i+1;
end
i=1;
cut=[];
while i<size(N,1)
    j=i+1;
    while j<=size(N,1)
        N1=N(:,1:end-1);
        if N1(i,:)==N1(j,:)
            count=count+1;
            if N(i,end)<N(j,end)
                N(i,end)=N(j,end);
                cut=[cut j];
```

```
                        else
                            cut=[cut j];
                        end
                    else
                    end
                    j=j+1;
                end
                i=i+1;
            end
            N(cut,:)=[];
            i=1;
            while i<size(N,1)
                j=i+1;
                while j<=size(N,1)
                    if N(i,:)==-N(j,:)
                        temp=N(i,:);
                        count=count+1;
                        ind=[];
                        for l=1:size(N,1)
                            if N(l,:)==temp
                                N(l,:)=zeros(1,size(N,2));
                                ind=[ind l];
                            elseif N(l,:)==-temp
                                N(l,:)=zeros(1,size(N,2));
                                ind=[ind l];
                            else
                            end
                        end
                        N(ind,:)=[];
                        E=[E;temp];
                    else
                    end
                    j=j+1;
                end
                i=i+1;
            end
        end
        E;
        % sub-specialization
```

```
        temp=[];
        L=nchoose2(n);
        N1=N(:,1:end-1);
        if ~isempty(N)
            if any(all((N1==0)')&(N(:,end)'>0))
                next=1;
                break;
            else
                N(all((N1==0)'),:)=[];
            end
        end
        N1=N(:,1:end-1);
        for l=1:size(L,1)
            temp1=[];
            for i=1:size(N1,1)
                if (find(N1(i,:))==L(l,:))
                    if N1(i,L(l,1))==1
                        temp1=[N(i,:);temp1];
                    else
                        temp1=[temp1;N(i,:)];
                    end
                else
                end
            end
            temp=[temp;temp1];
        end
        N=temp;
        D=N;
        if isempty(E)
            do=0;
        else
            do=1;
        end
    end
    CL
    C
    D
    if next==1
        continue
```

```
end
numsol=numsol+1;
for i=1:size(A,2)
    eval(['syms x_',int2str(i);])
end
for i=size(A,2)+1:n
    eval(['syms y_',int2str(i-size(A,2));])
end
disp('The solution set are');
for i=1:size(C,1)
    C1=C(:,1:end-1);
    l=find(C1(i,:)==1);
    r=find(C1(i,:)==-1);
    if l<=size(A,2)
        if r<=size(A,2)
            eval(['disp(''x_',int2str(l),' = x_',...
                int2str(r),' + (',...
                int2str(-C(i,end)),')'')']);
        else
            eval(['disp(''x_',int2str(l),' = y_',...
                int2str(r-size(A,2)),...
                ' + (',int2str(-C(i,end)),')'')']);
        end
    else
        if r<=size(A,2)
            eval(['disp(''y_',int2str(l-size(A,2)),' = x_',...
                int2str(r),...
                ' + (',int2str(-C(i,end)),')'')']);
        else
            eval(['disp(''y_',int2str(l-size(A,2)),' = y_',...
                int2str(r-size(A,2)),' + (',...
                int2str(-C(i,end)),')'')']);
        end
    end
end
for i=1:size(D,1)
    D1=D(:,1:end-1);
    l=find(D1(i,:)==1);
    r=find(D1(i,:)==-1);
```

```
        if l<=size(A,2)
            if r<=size(A,2)
                eval(['disp(''x_',int2str(l),' \leq x_',...
                    int2str(r),' + (',...
                    int2str(-D(i,end)),')'')']);
            else
                eval(['disp(''x_',int2str(l),' \leq y_',...
                    int2str(r-size(A,2)),...
                    ' + (',int2str(-D(i,end)),')'')']);
            end
        else
            if r<=size(A,2)
                eval(['disp(''y_',int2str(l-size(A,2)),' \leq x_',...
                    int2str(r),...
                    ' + (',int2str(-D(i,end)),')'')']);
            else
                eval(['disp(''y_',int2str(l-size(A,2)),' \leq y_',...
                    int2str(r-size(A,2)),' + (',...
                    int2str(-D(i,end)),')'')']);
            end
        end
    end
    display('-------------------------------------------')
end
numsol
toc
```

A3. 計算笛卡爾積的程式碼 [11]

```
function X = cartprod(varargin)
%CARTPROD Cartesian product of multiple sets.
%
%    X = CARTPROD(A,B,C,...) returns the cartesian product of the sets
%    A,B,C, etc, where A,B,C, are numerical vectors.
%
%    Example: A = [-1 -3 -5];   B = [10 11];   C = [0 1];
%
%    X = cartprod(A,B,C)
%    X =
%
%      -5    10     0
%      -3    10     0
%      -1    10     0
%      -5    11     0
%      -3    11     0
%      -1    11     0
%      -5    10     1
%      -3    10     1
%      -1    10     1
%      -5    11     1
%      -3    11     1
%      -1    11     1
%
%    This function requires IND2SUBVECT,
%    also available (I hope) on the MathWorks
%    File Exchange site.


numSets = length(varargin);
for i = 1:numSets,
    thisSet = sort(varargin{i});
    if ~isequal(prod(size(thisSet)),length(thisSet)),
        error('All inputs must be vectors.')
    end
    if ~isnumeric(thisSet),
        error('All inputs must be numeric.')
    end
```

```
    if ~isequal(thisSet,unique(thisSet)),
        error(['Input set' ' ' num2str(i) ' ' ...
            'contains duplicated elements.'])
    end
    sizeThisSet(i) = length(thisSet);
    varargin{i} = thisSet;
end

X = zeros(prod(sizeThisSet),numSets);
for i = 1:size(X,1),

    % Envision imaginary n-d array with dimension "sizeThisSet" ...
    % = length(varargin{1}) x length(varargin{2}) x ...

    ixVect = ind2subVect(sizeThisSet,i);

    for j = 1:numSets,
        X(i,j) = varargin{j}(ixVect(j));
    end
end
```

A5. 計算笛卡爾積工程中必須用到的子程式 [12]

```
function X = ind2subVect(siz,ndx)
%IND2SUBVECT Multiple subscripts from linear index.
%   IND2SUBVECT is used to determine the equivalent subscript values
%   corresponding to a given single index into an array.
%
%   X = IND2SUBVECT(SIZ,IND) returns the matrix X = [I J] containing the
%   equivalent row and column subscripts corresponding to the index
%   matrix IND for a matrix of size SIZ.
%
%   For N-D arrays, X = IND2SUBVECT(SIZ,IND) returns matrix X = [I J ...]
%   containing the equivalent N-D array subscripts equivalent to IND for
%   an array of size SIZ.
%
%   See also IND2SUB.  (IND2SUBVECT makes a one-line change to IND2SUB so
%   as to return a vector of N indices rather than retuning N individual
%   variables.)%IND2SUBVECT Multiple subscripts from linear index.
%   IND2SUBVECT is used to determine the equivalent subscript values
%   corresponding to a given single index into an array.
%
%   X = IND2SUBVECT(SIZ,IND) returns the matrix X = [I J] containing the
%   equivalent row and column subscripts corresponding to the index
%   matrix IND for a matrix of size SIZ.
%
%   For N-D arrays, X = IND2SUBVECT(SIZ,IND) returns matrix X = [I J ...]
%   containing the equivalent N-D array subscripts equivalent to IND for
%   an array of size SIZ.
%
%   See also IND2SUB.  (IND2SUBVECT makes a one-line change to IND2SUB so
%   as to return a vector of N indices rather than returning N individual
%   variables.)


% All MathWorks' code from IND2SUB, except as noted:

n = length(siz);
k = [1 cumprod(siz(1:end-1))];
ndx = ndx - 1;
for i = n:-1:1,
```

```
  X(i) = floor(ndx/k(i))+1;       % replaced "varargout{i}" with "X(i)"
  ndx = rem(ndx,k(i));
end
```

A4. 求解雙邊齊次熱帶線性系統過程中用到的子程式

```
function y=findelt(v,tf)
% v 為一個向量, tf 代表真假值(0,1 向量), v 和 tf 必須有相同的長度
% findelt 找出 v 中對應真假值為 1 的元素
y=(v(logical(tf)));
```

A6. 求解雙邊齊次熱帶線性系統過程中用到的子程式

```
function L=nchoose2(n)
% 列出所有可能選擇
L=[];
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        L=[L;i,j];
    end
end
```

A7. 求解雙邊齊次熱帶線性系統過程中用到的子程式

```
function y=nptime(M,n,p)
% 輔助計算 win sequence 的選取
v=[];
[r c]=size(M);
for i=1:r
    v=[v;ones(n,1)*M(i,:)];
end
y=[];
for i=1:p
    y=[y;v];
end
```

A8. 求解雙邊齊次熱帶線性系統過程中用到的子程式

```
function y=possiblecase(n,m)
% 計算所有可能 win sequence
y=[];
for i=1:m
    y=[y,nptime((1:n)',n^(m-i),n^(i-1))];
end
```

A9. 計算熱帶行列式值

```
function y=tropical2det(A)
% 2*2 矩陣行列式值
y=max(A(1,1)+A(2,2),A(1,2)+A(2,1));
```

參考文獻

[1] François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder, and Jean Pierre Quadrat. Synchronization and linearity-an algebra for discrete event systems, 1992. 1

[2] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. Introduction to tropical geometry, Nov 2009. 1

[3] Grigory Mikhalkin. Tropical geometry and its applications, May 2006. 1

[4] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry, Dec 2003. 1

[5] David Speyer and Bernd Sturmfels. Tropical mathematics, Aug 2004. 1

[6] P. Butkovič and R.A. Cuninghame-Green. The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over $(\max, +)$. *Theoretical Computer Science*, 293(1):3 – 12, Feb 2003. 1, 3, 16, 24

[7] E. Lorenzo and M. J. de la Puente. An algorithm to describe the solution set of any tropical linear system $A \odot x = B \odot x$, jul 2010. 1, 3

[8] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. Linear algebra, Jul 2003. 3

[9] MathWorks. http:// www. mathworks. com/ products/ matlab/. 27

[10] 張智星. Matlab 程式設計與應用, Sep 2000. 27

[11] David Fass. http:// www. mathworks. com/ matlabcentral/ fileexchange/ 5475-cartprod-cartesian-product-of-multiple-sets, Jul 2004. 40

[12] David Fass. http:// www. mathworks. com/ matlabcentral/ fileexchange/ 5476-ind2subvect-multiple-subscript-vector-from-linear-index, Jul 2004. 42