國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

以雙射函數探討四元數列

A Study of Bijective Functions on Quaternary Sequences

碩專班學生：張維格撰

指導教授：李陽明博士

中 華 民 國 一 百 年 八 月 十 八 日

謝辭

很感謝在我的求學與工作上，遇上了許多貴人，讓我一路走來更為順利，尤其是政大讀書的這幾年；首先要感謝政大應數系的老師們，開闊了我的視野、我的知識，每位老師課堂上的諄諄教誨，猶言在耳，讓我懷念不已；再者是讀書的同學們，每個人都有專長，分工合作，讓每個挑戰都能迎刃而解，課堂後的活動，也給了我美好的回憶；當然還有我的妻子以及即將出世的孩子，你們給了我精神上無比的支持，也給了我自信與動力，讓我無後顧之憂的向前走；最後，特別感謝我的指導老師李陽明老師，他像慈父，也是嚴師，在我遇到困難的時候，不辭辛勞的給予我最大的幫助，他的認真、嚴謹、充滿幹勁，都深深影響著我；而我能有如此多的貴人在旁相助，套句作家陳之藩先生「謝天」中的兩句話：「需要感謝的人太多了，就感謝天吧」，這也正是我此刻的心情。

完成了碩士學業，期望自己能將所學應用在教學上，讓更多的學生受惠，不僅是學業上的知識，也有觀念的傳承，讓未來的學生在求學與工作上也能走得更順遂，以表達我對系上的感謝。

摘要

本篇論文的主題是藉由討論長度為n的四元數列中，控制一種(0)、兩種(0,1)、三種(0,1,2)數字出現偶數次(或奇數次)的個數，以較為簡潔的 1 對 1 且映成的對應算出其數量；而將此種對應推廣至長度為n的k元數列中，控制一種(0)、兩種(0,1)、三種(0,1,2)數字出現偶數次(或奇數次)的個數；更進一步猜測長度為n的k元數列中，控制t種數字$(0,1,2,\ldots,(t-1))$出現偶數次(或奇數次)的個數通式。

Abstract

This paper uses bijective functions to obtain the number of quaternary sequences of length n with 0 or (0,1) or (0,1,2) being even and/or odd by establishing a system of linear equations and solving it using matrices.

Finally,we generalize it to k-nary sequences of length n.

目錄

第一章　緒論

中華民國身分證字號一共有 10 碼，包括起首 1 個大寫的英文字母與接續的 9 個阿拉伯數字。

而身分證字號規則如下：英文字母是以初次登記的戶籍地來區分編號的，

字母 ABCDEFGHJKLMNPQRSTUVXYWZIO 分別對應一組二位數(10~35)，

令其十位數為 a_1 ，個位數為 a_2 ；(例如：A→ $a_1 = 1, a_2 = 0$ ；B→ $a_1 = 1, a_2 = 1 \ldots\ldots$)，

$a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}$ 分別代表著緊接而來的 9 個號碼。

而首位數字則是拿來區分性別，男性為 1、女性為 2，第 3 碼至第 10 碼為一串數字，其滿足條件如下，

定義函數 $f(a_1a_2 \ldots a_{11}) = a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} + a_{11}$ ，

當 $10 | f(a_1a_2 \ldots a_{11})$ ，那這組身分證字號就是可以使用的。

例如：A123456789，我們可以將它寫為 10123456789，則

$f(10123456789) = 1 + 9\times0 + 8\times1 + 7\times2 + 6\times3 + 5\times4 + 4\times5 + 3\times6 + 2\times7 + 1\times8 + 9 = 130$ ，

130 是 10 的倍數，也就是說這 1 組是可以使用的。

再舉 1 個例子：B284793817，我們可以將它寫為 11284793817，這也是可以用的，身分證製造機便是使用上述規則亂數產生號碼。

仔細看看函數值， $a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} + a_{11} \equiv 0 \pmod{10}$ ，也就是說 $a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} \equiv 10 - a_{11} \pmod{10}$ ，所以 a_{11} 可視為檢查碼。

例如：R123456532，身分證字號的規則中，R 對應的二位數為 25，則

$f(25123456532) = 2 + 9\times5 + 8\times1 + 7\times2 + 6\times3 + 5\times4 + 4\times5 + 3\times6 + 2\times5 + 1\times3 + 2 = 160$ ，但運算較麻煩，亦可檢查 $2 + 9\times5 + 8\times1 + 7\times2 + 6\times3 + 5\times4 + 4\times5 + 3\times6 + 2\times5 + 1\times3 \equiv 8 \pmod{10}$ ，

$8 + 2 \equiv 0 \pmod{10}$ ，那麼這 1 組身分證字號也是可以使用的。

由身分證字號最後一位的檢查碼，可讓使用者本身在填寫自己的身分證字號時，容易的判別自己是否填錯，有偵錯的功能。

另外編碼理論中的「奇偶校驗位」是一個表示給定位數的二元數列中，「1」的個數是奇數還是偶數的二元數；奇偶校驗位也是一種最簡單的錯誤檢測碼。

奇偶校驗位有兩種類型：偶校驗位與奇校驗位。如果一組給定數據「1」的個數是奇數，那麼偶校驗位就置為 1，從而使得「1」的總個數是偶數。如果給定一組數據「1」的個數是偶數，那麼奇校驗位就置為 1，使得「1」的總個數是奇數。

例如：

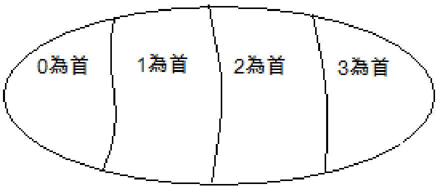
7 位數據 (1 的個數)	帶有校驗位的位元組	
	偶	奇
1010001	10100011	10100010
1011001	10110010	10110011

綜合上述兩者，可發現當訊息傳遞或密碼設計時，其檢查碼可設計為多種數字成對出現，一來數字組較不容易被人所利用，二來設計者可容易分辨其真偽，進行偵錯，對戰時的電報傳送有很大的幫助；另外台灣大約 2300 萬組身分證字號中，每個縣市區域所代表的大寫字母及第 9 位數字檢查碼扣除後，剩下 8 位數字是足夠且剛好的，因為中間的 8 位數字共可組成 10^8 個號碼，對最多人口的台北市來說，也是足夠的，但若少 1 位，卻是不足的，多 1 位，卻是浪費的，所以希望針對長度為 n 的四元數列中，控制一種(0)，兩種數字(0,1)，三種數字(0,1,2)出現偶數次的個數方法及通式加以深入討論，再推廣至長度為 n 的 k 元數列中，控制一種(0)，兩種數字(0,1)，三種數字(0,1,2)出現偶數次的個數方法及通式，最後再猜測長度為 n 的 k 元數列中，控制 t 種數字 $(0,1,2,\dots,(t-1))$ 出現偶數次的個數方法及通式，而求個數的目的是希望藉由個數通式反推訊息或密碼設計時的位數，而達到最大的效益。

第二章　雙射函數的建立

一、『長度為n的四元數列中，「0」出現偶數次的個數』。

1.方法一：分為四類(0 為首，1 為首，2 為首，3 為首)



設長度為n的四元數列中，「0」出現偶數次的個數為A_n，

可寫出遞迴關係式：$A_n=(4^{n-1}-A_{n-1})+A_{n-1}+A_{n-1}+A_{n-1}=2A_{n-1}+4^{n-1}$，$n\in N,n\geq 1,A_0=1$

可解出$A_n=\dfrac{4^n+2^n}{2}$

2.方法二：由指數型生成函數可知$\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n=\frac{e(x)+e(-x)}{2}\times[e(x)]^3=\frac{e(4x)+e(2x)}{2}$

$$=\frac{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(4x)^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(2x)^n}{2}=\sum_{n\geq 0}\frac{\frac{4^n+2^n}{2}}{n!}x^n$$，可解出$A_n=\dfrac{4^n+2^n}{2},n\in N,n\geq 0$

3.方法三：可想成n個座位中選$2i$個位置給「0」，其他位置給「1」或「2」或「3」的方法數，

即為$\displaystyle A_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2i}^n 3^{n-2i}=C_0^n 3^n+C_2^n 3^{n-2}+C_4^n 3^{n-4}+\ldots\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^n 3^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}$

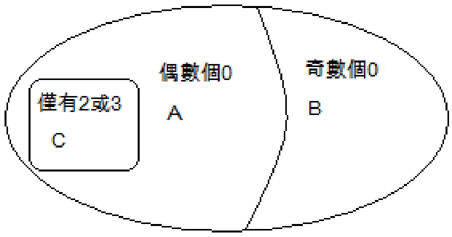
已知$(x+1)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}+C_2^n x^{n-2}+\ldots\ldots+C_{n-1}^n x+C_n^n$

$$\Rightarrow C_0^n 3^n+C_1^n 3^{n-1}+C_2^n 3^{n-2}+\ldots\ldots+C_n^n=(3+1)^n=4^n$$

$$C_0^n 3^n-C_1^n 3^{n-1}+C_2^n 3^{n-2}-\ldots\ldots+(-1)^n C_n^n=(3-1)^n=2^n$$

$$\Rightarrow A_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2i}^n 3^{n-2i}=C_0^n 3^n+C_2^n 3^{n-2}+C_4^n 3^{n-4}+\ldots\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^n 3^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}=\frac{4^n+2^n}{2}$$

4.方法四：



若$a_1a_2...a_i...a_n$為此長度為n的四元數列的表示法；

令集合 A：偶數個 0，集合 B：奇數個 0；令C:只有2或3的集合，則$C \subset A$ ，$B \cap C = \phi$。

明顯的① $|A| + |B| = 4^n$

② $|A| = |B| + 2^n$

設一函數$f: A \to B + C$，其中$\begin{cases} f(a_1a_2...a_i...a_n) = a_1a_2...(1-a_i)...a_n, a_i\text{為第一個0或1} \\ f(a_1a_2...a_i...a_n) = a_1a_2...a_i...a_n, a_1 \sim a_n\text{皆不為0或1} \end{cases}$，

則函數f為 1 對 1 且映成。

證明：

「$1-1$」:

(1) a_i為第一個0或1

若$f(a_1a_2...a_i...a_n) = f(a_1'a_2'...a_i'...a_n')$，則$a_1a_2...(1-a_i)...a_n = a_1'a_2'...(1-a_i')...a_n'$

$\Rightarrow a_1 = a_1', a_2 = a_2',...1-a_i = 1-a_i',...a_n = a_n' \Rightarrow a_1 = a_1', a_2 = a_2',...a_i = a_i',...a_n = a_n'$

(2) $a_1 \sim a_n$皆不為0或1

若$f(a_1a_2...a_i...a_n) = f(a_1'a_2'...a_i'...a_n')$，則$a_1a_2...a_i...a_n = a_1'a_2'...a_i'...a_n'$

$\Rightarrow a_1 = a_1', a_2 = a_2',...a_i = a_i',...a_n = a_n'$

由(1)(2)，則f為 1 對 1。

「映成」:

(1) b_i為第一個0或1

任意$b_1b_2...b_i...b_n \in B \Rightarrow b_1b_2...(1-b_i)...b_n \in A$

若b_i為第一個0，則$1-b_i = 1 \Rightarrow$少一個 0

若b_i為第一個1，則$1-b_i=0 \Rightarrow$ 多一個 0

(2) $b_1 \sim b_n$皆不為0或1

任意$b_1b_2...b_i...b_n \in C \Rightarrow b_1b_2...b_i...b_n \in A$

$\because$ 0 不多不少

由(1)(2)，則f 為映成。

由上述二式可得二元一次方程組$\begin{cases}|A|+|B|=4^n \\ |A|-|B|=2^n\end{cases}$，解出$|A|=\dfrac{4^n+2^n}{2}, |B|=\dfrac{4^n-2^n}{2}$

即找到一個雙射函數$f:A\to B+C$，其中$\begin{cases} f(a_1a_2...a_i...a_n)=a_1a_2...(1-a_i)...a_n, a_i\text{為第一個0或1} \\ f(a_1a_2...a_i...a_n)=a_1a_2...a_i...a_n, a_1\sim a_n\text{皆不為0或1}\end{cases}$

發現「 0 」出現偶數次的個數=「 0 」出現奇數次的個數$+2^n$。

實例：長度為 2 的四元數列中，「0」出現偶數次的整數對應如下：

集合 A(偶數個 0)：00,11,12,13,21,22,23,31,32,33

集合 B(奇數個 0)：01,02,03,10,20,30

集合 C(只有 2 或 3)：22,23,32,33

$f(00)=10, f(11)=01, f(12)=02, f(13)=03, f(21)=20, f(31)=30$

$f(22)=22, f(23)=23, f(32)=32, f(33)=33 \Rightarrow f:A\to B+C$ 為 1 對 1 且映成。

$\Rightarrow \begin{cases}|A|+|B|=16 \\ |A|-|B|=4\end{cases} \Rightarrow |A|=10, |B|=6$。

在討論『長度為n的四元數列中，「0」與「1」出現偶數次的個數』前，

我們定義『長度為n的四元數列中，「〝0〞 + 〝1〞 + 〝2〞 +...+ 〝$m-1$〞」出現偶數次』的意思為「0」與「1」與「2」與...與「$m-1$」等連續m種整數出現的次數總和為偶數次。

同理『長度為n的四元數列中，「〝0〞 + 〝1〞 + 〝2〞 +...+ 〝$m-1$〞」出現奇數次』的意思為「0」與「1」與「2」與...與「$m-1$」等連續m種整數出現的次數總和為奇數次。

二、『長度為n的四元數列中，「0」與「1」出現偶數次的個數』。

1.方法一：設長度為n的四元數列中，「0」與「1」出現偶數次的個數為A_n

由指數型生成函數可知$\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^2\times[e(x)]^2=\frac{e(2x)+2e(0)+e(-2x)}{4}\times(e(x))^2$

$$=\frac{e(4x)+2e(2x)+1}{4}=\frac{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(4x)^n+2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(2x)^n+1}{4}=\sum_{n\geq 0}\frac{\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}}{n!}x^n+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{n\geq 1}\frac{\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}}{n!}x^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}}{n!}x^n=\frac{A_0}{0!}+\sum_{n\geq 1}\frac{A_n}{n!}x^n\ ,$$

可解出$A_0=1, A_n=\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}, n\in N, n\geq 1$

2.方法二：可想成n個座位中選$2i$個位置給「0」，再由$n-2i$個座位中選$2j$個位置給「1」，其他位置給「2」或「3」的方法數，即為$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2i}^{n}C_{2j}^{n-2i}2^{n-2i-2j}$

$$=C_0^n(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2j}^{n}2^{n-2j})+C_2^n(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}C_{2j}^{n-2}2^{n-2-2j})+\ldots+C_{2k}^n(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2k}{2}\right]}C_{2j}^{n-2k}2^{n-2k-2j})\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}(\sum_{j=0}^{0}C_{2j}^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]})$$

$$\because\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2i}^{n}2^{n-2i}=\frac{(2+1)^n+(2-1)^n}{2}=\frac{3^n+1}{2}$$

$\therefore$上式可寫為$=C_0^n(\frac{3^n+1}{2})+C_2^n(\frac{3^{n-2}+1}{2})+\ldots+C_{2k}^n(\frac{3^{n-2k}+1}{2})\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}(\frac{3^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}+1}{2})$

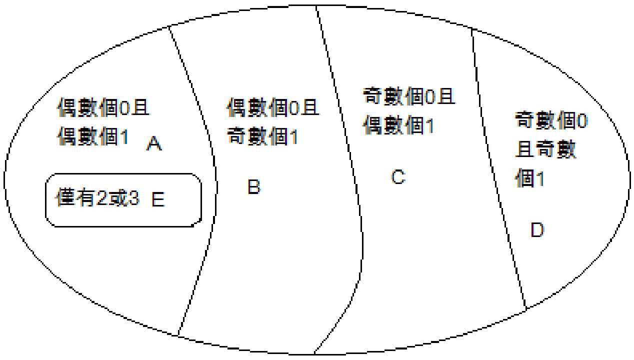
$$=\frac{1}{2}(C_0^n3^n+C_2^n(3^{n-2})+\ldots+C_{2k}^n(3^{n-2k})\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}(3^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}))+\frac{1}{2}(C_0^n+C_2^n+\ldots+C_{2k}^n+\ldots+C_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^{n})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{(3+1)^n+(3-1)^n}{2})+\frac{1}{2}(\frac{(1+1)^n+(1-1)^n}{2})=\frac{4^n+2\times 2^n}{4}=\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}$$

3.方法三：

令集合A:偶數個0且偶數個1，集合B:偶數個0且奇數個1，

集合C:奇數個0且偶數個1，集合D:奇數個0且奇數個1。



其中明顯的① $|A|+|B|+|C|+|D|=4^n$

② $|A|+|B|=|C|+|D|+2^n$

令 E : 只有2或3的集合，則 $E \subset A$ ， $D \cap E = \phi$

如同「0」出現偶數次的求法中，「0」出現偶數次的個數=「0」出現奇數次的個數 $+2^n$

設 $f: A+B \to C+D+E$ ，其中 $\begin{cases} f(a_1a_2...a_i...a_n)=a_1a_2...(1-a_i)...a_n, a_i\text{為第一個0或1} \\ f(a_1a_2...a_i...a_n)=a_1a_2...a_i...a_n, a_1 \sim a_n\text{皆不為0或1} \end{cases}$ ，

則 f 為 1 對 1 且映成。

證明：

「$1-1$」:

(1) a_i為第一個0或1

若 $f(a_1a_2...a_i...a_n)=f(a_1'a_2'...a_i'...a_n')$ ，則 $a_1a_2...(1-a_i)...a_n = a_1'a_2'...(1-a_i')...a_n'$

$\Rightarrow a_1=a_1', a_2=a_2',...1-a_i=1-a_i',...a_n=a_n' \Rightarrow a_1=a_1', a_2=a_2',...a_i=a_i',...a_n=a_n'$

(2) $a_1 \sim a_n$皆不為0或1

若 $f(a_1a_2...a_i...a_n)=f(a_1'a_2'...a_i'...a_n')$ ，則 $a_1a_2...a_i...a_n = a_1'a_2'...a_i'...a_n'$

$\Rightarrow a_1=a_1', a_2=a_2',...a_i=a_i',...a_n=a_n'$

由(1)(2)，則 f 為 1 對 1。

「映成」:

(1) b_i為第一個0或1

任意 $b_1b_2...b_i...b_n \in D \Rightarrow b_1b_2...(1-b_i)...b_n \in A$

若b_i為第一個0，則$1-b_i=1\Rightarrow$少一個 0，多一個 1

若b_i為第一個1，則$1-b_i=0\Rightarrow$多一個 0，少一個 1

(2) $b_1\sim b_n$皆不為0或1

任意$b_1b_2......b_n\in E\Rightarrow b_1b_2......b_n\in A$，$\because 0$，1 皆不多不少

由(1)(2)，則f為映成。

$\therefore |A|+|B|=|C|+|D|+|E|\Rightarrow |A|+|B|=|C|+|D|+2^n$

③ $|B|=|C|$(很明顯的各數是彼此對稱的)

設$g:B\to C$，其中$g(a_1a_2...a_j...a_n)=a_1a_2...(1-a_j)...a_n, a_j$為第一個1，則$g$為 1 對 1 且映成。

證明：

「$1-1$」：

若$g(a_1a_2...a_i...a_n)=g(a_1'a_2'...a_i'...a_n')$，則$a_1a_2...(1-a_i)...a_n=a_1'a_2'...(1-a_i')...a_n'$

$\Rightarrow a_1=a_1',a_2=a_2',...,1-a_i=1-a_i',...,a_n=a_n'\Rightarrow a_1=a_1',a_2=a_2',...,a_i=a_i',...,a_n=a_n'$

，則g為 1 對 1。

「映成」：

若b_i為第一個0，任意$b_1b_2...b_i...b_n\in C\Rightarrow b_1b_2...(1-b_i)...b_n\in B$

$\because b_i$為第一個0，$\therefore 1-b_i=1\Rightarrow$少一個 0，多一個 1 ，則$g$為映成。

$\therefore |B|=|C|$

④ $|A|+|D|=|B|+|C|$

設$h:A+D\to B+C$，其中$h(a_1a_2...a_n)=(3-a_1)a_2...a_n$，則$h$為 1 對 1 且映成。

證明：

先證「well-defined」：

(1)若$a_1=0$，則$3-a_1=3$

(2)若$a_1=1$，則$3-a_1=2$

(3)若$a_1 = 2$，則$3 - a_1 = 1$

(4)若$a_1 = 3$，則$3 - a_1 = 0$

「$1-1$」:

若$h(a_1 a_2 ......a_n) = h(a_1' a_2' ......a_n') \Rightarrow (3-a_1)a_2......a_n = (3-a_1')a_2'......a_n'$

$\Rightarrow 3 - a_1 = 3 - a_1', a_2 = a_2', ..., a_n = a_n' \Rightarrow a_1 = a_1', a_2 = a_2', ...a_i = a_i', ...a_n = a_n'$，則$h$為 1 對 1。

「映成」:

任意$b_1 b_2 ...b_i ...b_n \in B + C \Rightarrow (3-b_1)b_2......b_n \in A + D$

(1)若$b_1 = 0$，則$3 - b_1 = 3 \Rightarrow$少一個 0

(2)若$b_1 = 1$，則$3 - b_1 = 2 \Rightarrow$少一個 1

(3)若$b_1 = 2$，則$3 - b_1 = 1 \Rightarrow$多一個 1

(4)若$b_1 = 3$，則$3 - b_1 = 0 \Rightarrow$多一個 0

$\therefore h((3-b_1)b_2......b_n) = (3-(3-b_1))b_2......b_n = b_1 b_2......b_n$，則$h$為映成。

$\therefore |A| + |D| = |B| + |C|$

由上述四式可得四元一次方程組$\begin{cases} |A| + |B| + |C| + |D| = 4^n \\ |A| + |B| - |C| - |D| = 2^n \\ \quad\;\; |B| - |C| \qquad\quad = 0 \\ |A| - |B| - |C| + |D| = 0 \end{cases}$，

更進一步由$|B| = |C|$，可更簡捷的列出三元一次方程組$\begin{cases} |A| + 2|B| + |D| = 4^n \\ |A| \qquad\;\; - |D| = 2^n \\ |A| - 2|B| + |D| = 0 \end{cases}$

可得$|A| = \dfrac{4^n}{4} + \dfrac{2^n}{2}$，$|B| = |C| = \dfrac{4^n}{4}$，$|D| = \dfrac{4^n}{4} - \dfrac{2^n}{2}$。

即找到三個雙射函數$f: A \to B + C$，其中$\begin{cases} f(a_1 a_2 ...a_i ...a_n) = a_1 a_2 ...(1-a_i)...a_n, a_i\text{為第一個0或1} \\ f(a_1 a_2 ...a_i ...a_n) = a_1 a_2 ...a_i ...a_n, a_1 \sim a_n\text{皆不為0或1} \end{cases}$

$g: B \to C$，其中$g(a_1 a_2 ...a_j ...a_n) = a_1 a_2 ...(1-a_j)...a_n, a_j$為第一個1

$h: A + D \to B + C$，其中$h(a_1 a_2 ...a_n) = (3-a_1)a_2 ...a_n$

發現「 0 」出現偶數次的個數=「 0 」出現奇數次的個數$+2^n$

及「〝0〞 + 〝1〞」出現偶數次的個數=「〝0〞 + 〝1〞」出現奇數次的個數。

實例：長度為 2 的四元數列中，「0」與「1」出現偶數次的整數對應如下：

集合 A(偶數個 0 且偶數個 1)：00,11,22,23,32,33

集合 B(偶數個 0 且奇數個 1)：12,13,21,31

集合 C(奇數個 0 且偶數個 1)：02,03,20,30

集合 D(奇數個 0 且奇數個 1)：01,10

集合 E(只有 2 或 3)：22,23,32,33

$f(00)=10, f(11)=01, f(22)=22, f(23)=23, f(32)=32, f(33)=33$

$f(12)=02, f(13)=03, f(21)=20, f(31)=30 \Rightarrow f: A+B \to C+D+E$ 為 1 對 1 且映成。

$g(12)=02, g(13)=03, g(21)=20, g(31)=30 \Rightarrow g: B \to C$ 為 1 對 1 且映成。

$h(00)=30, h(11)=21, h(22)=12, h(23)=13, h(32)=02, h(33)=03, h(01)=31, h(10)=20$

$\Rightarrow h: A+D \to B+C$ 為 1 對 1 且映成。

$$\Rightarrow \begin{cases} |A|+2|B|+|D|=4^2 \\ |A| \qquad -|D|=2^2 \\ |A|-2|B|+|D|=0 \end{cases} \Rightarrow |A|=6, |B|=4, |C|=4, |D|=2$$

三、『長度為 n 的四元數列中，「0」與「1」與「2」出現偶數次的個數』。

我們省略上述一、二、中的其他種方法，以本文的重點方法為主

可由「0」與「1」與「2」的個數奇偶性分類為以下 8 個集合

令集合 A: 偶數個 0 且偶數個 1 且偶數個 2，集合 B_1: 奇數個 0 且偶數個 1 且偶數個 2，

集合 B_2: 偶數個 0 且奇數個 1 且偶數個 2，集合 B_3: 偶數個 0 且偶數個 1 且奇數個 2，

集合 C_1: 偶數個 0 且奇數個 1 且奇數個 2，集合 C_2: 奇數個 0 且偶數個 1 且奇數個 2，

集合 C_3: 奇數個 0 且奇數個 1 且偶數個 2，集合 D: 奇數個 0 且奇數個 1 且奇數個 2。

8 個未知數需要 8 個方程式來解聯立，但明顯的 $|B_1|=|B_2|=|B_3|$，$|C_1|=|C_2|=|C_3|$

可由前例看出，只需 4 個未知數，解 4 個方程式即可。

其中明顯的 $|A|+|B_1|+|B_2|+|B_3|+|C_1|+|C_2|+|C_3|+|D|=4^n$

$\Rightarrow$ ① $|A|+3|B_1|+3|C_1|+|D|=4^n$

② $|A|+|B_1|-|C_1|-|D|=2^n$

由「0」出現偶數次的個數=「0」出現奇數次的個數$+2^n$

$\Rightarrow |A|+|B_2|+|B_3|+|C_1|=|B_1|+|C_2|+|C_3|+|D|+2^n \Rightarrow |A|+|B_1|-|C_1|-|D|=2^n$

③ $|A|-|B_1|-|C_1|+|D|=0$

由「〝0〞＋〝1〞」出現偶數次的個數=「〝0〞＋〝1〞」出現奇數次的個數

$\Rightarrow |A|+|B_3|+|C_3|+|D|=|B_1|+|B_2|+|C_1|+|C_2| \Rightarrow |A|-|B_1|-|C_1|+|D|=0$

④ $|A|-3|B_1|+3|C_1|-|D|=(-2)^n$

由「3」出現偶數次的個數=「3」出現奇數次的個數$+2^n$，可知

(1) $n=2k$

「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現偶數次的個數=「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現奇數次的個數$+2^n$

(2) $n=2k+1$

「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現偶數次的個數=「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現奇數次的個數-2^n

$\Rightarrow$「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現偶數次的個數=「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞」出現奇數次的個數$+(-2)^n$

$\Rightarrow |A|+|C_1|+|C_2|+|C_3|=|B_1|+|B_2|+|B_3|+|D|+(-2)^n \Rightarrow |A|-3|B_1|+3|C_1|-|D|=(-2)^n$

由上述四式可得四元一次方程組$\begin{cases} |A|+3|B_1|+3|C_1|+|D|=4^n \\ |A|+|B_1|-|C_1|-|D|=2^n \\ |A|-|B_1|-|C_1|+|D|=0 \\ |A|-3|B_1|+3|C_1|-|D|=(-2)^n \end{cases}$

可得$|A|=\dfrac{4^n+3\times 2^n+(-2)^n}{8}$，

$|B_1|=|B_2|=|B_3|=\dfrac{4^n+2^n-(-2)^n}{8}$，

$|C_1|=|C_2|=|C_3|=\dfrac{4^n-2^n+(-2)^n}{8}$，

$|D|=\dfrac{4^n-3\times 2^n-(-2)^n}{8}$。

第三章　方程組的建立

由 1 對 1 且映成的對應方法已無法面對較多限制條件的情況，因此在針對「長度為 n 的 k 元數列」前，可由前一章方程式的常數項係數中，觀察得出一個性質，

即『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現偶數次的個數』與

『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現奇數次的個數』

有一規則性關係，如下所述。

性質：『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現偶數次的個數』等於『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞+〝1〞+〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現奇數次的個數』$+(k-2m)^n$。

證明：

「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現偶數次的個數等於

$$C_0^n(k-m)^n + C_2^n m^2 (k-m)^{n-2} + C_4^n m^4 (k-m)^{n-4} + \ldots\ldots = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{2i}^n m^{2i} (k-m)^{n-2i}$$

「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現奇數次的個數等於

$$C_1^n m^1 (k-m)^{n-1} + C_3^n m^3 (k-m)^{n-3} + C_5^n m^5 (k-m)^{n-5} + \ldots\ldots = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{2i+1}^n m^{2i+1} (k-m)^{n-(2i+1)}$$

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{2i}^n m^{2i} (k-m)^{n-2i} = \frac{[(k-m)+m]^n}{2} + \frac{[(k-m)-m]^n}{2} = \frac{k^n + (k-2m)^n}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{2i+1}^n m^{2i+1} (k-m)^{n-(2i+1)} = \frac{[(k-m)+m]^n}{2} - \frac{[(k-m)-m]^n}{2} = \frac{k^n - (k-2m)^n}{2}$$

由此可知：

『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現偶數次的個數』等於

『長度為 n 的 k 元數列中，「〝0〞+〝1〞+〝2〞+…+〝$m-1$〞」出現奇數次的個數』$+(k-2m)^n$。

以下便針對「長度為 n 的 k 元數列」探討「控制 t 種數字 $(0,1,2,...,(t-1))$ 出現偶數次的個數」方法及通式。

一、『長度為n的k元數列中，「0」出現偶數次的個數』。

同理，令集合 A：偶數個 0，集合 B：奇數個 0。

則滿足

① $|A|+|B|=k^n$

② $|A|-|B|=(k-2)^n$

由性質可知，「0」出現偶數次的個數＝「0」出現奇數次的個數$+(k-2)^n$

由上述二式可得二元一次方程組$\begin{cases} |A|+|B|=k^n \\ |A|-|B|=(k-2)^n \end{cases}$，解出$|A|=\dfrac{k+(k-2)^n}{2},|B|=\dfrac{k^n-(k-2)^n}{2}$。

二、『長度為n的k元數列中，「0」與「1」出現偶數次的個數』。

同理，令集合A:偶數個 0 且偶數個 1，集合B_1:偶數個 0 且奇數個 1，

集合B_2:奇數個 0 且偶數個 1，集合C:奇數個 0 且奇數個 1。

則滿足

① $|A|+2|B_1|+|C|=k^n$

② $|A|-|C|=(k-2)^n$

由性質可知，「0」出現偶數次的個數＝「0」出現奇數次的個數$+(k-2)^n$

③ $|A|-2|B_1|+|C|=(k-4)^n$

由性質可知，「〝0〞 + 〝1〞」出現偶數次的個數＝「〝0〞 + 〝1〞」出現奇數次的個數$+(k-4)^n$

由上述三式可得三元一次方程組$\begin{cases} |A|+2|B_1|+|C| = k^n \\ |A| \qquad -|C|=(k-2)^n \\ |A|-2|B_1|+|C|=(k-4)^n \end{cases}$，可得

$|A|=\dfrac{k^n+2(k-2)^n+(k-4)^n}{4}$，

$|B_1|=|B_2|=\dfrac{k^n-(k-4)^n}{4}$，

$|C|=\dfrac{k^n-2(k-2)^n+(k-4)^n}{4}$。

三、『長度為n的k元數列中，「0」與「1」與「2」出現偶數次的個數』。

同理，令集合A:偶數個 0 且偶數個 1 且偶數個 2，集合B_1:奇數個 0 且偶數個 1 且偶數個 2，

集合B_2:偶數個 0 且奇數個 1 且偶數個 2，集合B_3:偶數個 0 且偶數個 1 且奇數個 2，

集合C_1:偶數個 0 且奇數個 1 且奇數個 2，集合C_2:奇數個 0 且偶數個 1 且奇數個 2，

集合C_3:奇數個 0 且奇數個 1 且偶數個 2，集合D:奇數個 0 且奇數個 1 且奇數個 2。

則滿足

① $|A|+3|B_1|+3|C_1|+|D|=k^n$

② $|A|+|B_1|-|C_1|-|D|=(k-2)^n$

由性質可知，「0」出現偶數次的個數 =「0」出現奇數次的個數 $+(k-2)^n$

③ $|A|-|B_1|-|C_1|+|D|=(k-4)^n$

由性質可知，「〝0〞+〝1〞」出現偶數次的個數 =「〝0〞+〝1〞」出現奇數次的個數 $+(k-4)^n$

④ $|A|-3|B_1|+3|C_1|-|D|=(k-6)^n$

由性質可知，

「〝0〞+〝1〞+〝2〞」出現偶數次的個數 =「〝0〞+〝1〞+〝2〞」出現奇數次的個數 $+(k-6)^n$

由上述四式可得四元一次方程組$\begin{cases} |A|+3|B_1|+3|C_1|+|D|=k^n \\ |A|+|B_1|-|C_1|-|D|=(k-2)^n \\ |A|-|B_1|-|C_1|+|D|=(k-4)^n \\ |A|-3|B_1|+3|C_1|-|D|=(\mathrm{k}-6)^{\mathrm{n}} \end{cases}$，可得

$|A|=\dfrac{k^n+3(k-2)^n+3(k-4)^n+(k-6)^n}{8}$，

$|B_1|=|B_2|=|B_3|=\dfrac{k^n+(k-2)^n-(k-4)^n-(k-6)^n}{8}$，

$|C_1|=|C_2|=|C_3|=\dfrac{k^n-(k-2)^n-(k-4)^n+(k-6)^n}{8}$，

$|D|=\dfrac{k^n-3(k-2)^n+3(k-4)^n-(k-6)^n}{8}$。

以此類推，……

四、『長度為n的k元數列中，「0」與「1」與「2」與……「$t-1$」($t \le k$)出現偶數次的個數』。

可分成$t+1$類集合，如下：

令集合A_t:「0」與「1」與「2」與……與「$t-1$」等t種數皆為偶數個，

集合A_{t-1}:某$t-1$種數有偶數個，其餘一種數有奇數個，

集合A_{t-2}:某$t-2$種數有偶數個，其餘二種數有奇數個，

集合A_{t-3}:某$t-3$種數有偶數個，其餘三種數有奇數個，

⋮

集合A_j:某j種數有偶數個，其餘$t-j$種數有奇數個，

⋮

集合A_2:某兩種數有偶數個，其餘$t-2$種數有奇數個，

集合A_1:某一種數有偶數個，其餘$t-1$種數有奇數個，

集合A_0:「0」與「1」與「2」與……與「$t-1$」等t種數皆為奇數個。

則滿足

⓪ $C_t^t|A_t|+C_{t-1}^t|A_{t-1}|+C_{t-2}^t|A_{t-2}|+\ldots+C_j^t|A_j|+\ldots+C_0^t|A_0|=k^n$

① $C_{t-1}^{t-1}|A_t|+(C_{t-2}^{t-1}-C_{t-1}^{t-1})|A_{t-1}|+(C_{t-3}^{t-1}-C_{t-2}^{t-1})|A_{t-2}|+\ldots+(C_{j-1}^{t-1}-C_j^{t-1})|A_j|+\ldots-C_0^{t-1}|A_0|=(k-2)^n$

$\because$由「0」出現偶數次的個數=「0」出現奇數次的個數$+(k-2)^n$

$\Rightarrow (C_{t-1}^{t-1}|A_t|+C_{t-2}^{t-1}|A_{t-1}|+C_{t-3}^{t-1}|A_{t-2}|+\ldots+C_{j-1}^{t-1}|A_j|+\ldots+C_0^{t-1}|A_1|)=$

$(C_{t-1}^{t-1}|A_{t-1}|+C_{t-2}^{t-1}|A_{t-2}|+\ldots+C_j^{t-1}|A_j|+\ldots+C_1^{t-1}|A_1|+C_0^{t-1}|A_0|)+(k-2)^n$

② $C_{t-2}^{t-2}|A_t|+(C_{t-3}^{t-2}-C_1^2C_{t-2}^{t-2})|A_{t-1}|+(C_{t-4}^{t-2}+C_{t-2}^{t-2}-C_1^2C_{t-3}^{t-2})|A_{t-2}|+\ldots+(C_{j-2}^{t-2}+C_j^{t-2}-C_1^2C_{j-1}^{t-2})|A_j|+\ldots$

$+C_0^{t-2}|A_0|=(k-4)^n$

由「〝0〞 + 〝1〞」出現偶數次的個數=「〝0〞 + 〝1〞」出現奇數次的個數$+(k-4)^n$

⋮

⋮

ⓘ $C_{t-i}^{t-i}\left|A_t\right| + (C_{t-i-1}^{t-i} - C_1^i C_{t-i}^{t-i})\left|A_{t-1}\right| + (C_{t-i-2}^{t-i} + C_2^i C_{t-i}^{t-i} - C_1^i C_{t-i-1}^{t-i})\left|A_{t-2}\right| + \dots$

$+[(C_0^i C_{j-i}^{t-i} + C_2^i C_{j-i+2}^{t-i} + C_4^i C_{j-i+4}^{t-i} + \dots) - (C_1^i C_{j-i+1}^{t-i} + C_3^i C_{j-i+3}^{t-i} + C_5^i C_{j-i+5}^{t-i} + \dots)]\left|A_j\right| + \dots$

$+(-1)^i C_i^i C_0^{t-i}\left|A_0\right| = (k-2i)^n$

由「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$i-1$″」出現偶數次的個數=

「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$i-1$″」出現奇數次的個數$+(k-2i)^n$

⋮

ⓣ $C_t^t\left|A_t\right| - C_{t-1}^t\left|A_{t-1}\right| + C_{t-2}^t\left|A_{t-2}\right| + \dots + (-1)^{t-j} C_j^t\left|A_j\right| \dots + (-1)^t C_0^t\left|A_0\right| = (k-2t)^n$

由「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$t-1$″」出現偶數次的個數=

「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$t-1$″」出現奇數次的個數$+(k-2t)^n$

由上述$t+1$式可得$t+1$元一次方程組

$$\begin{cases} C_t^t\left|A_t\right| + C_{t-1}^t\left|A_{t-1}\right| + \dots + C_j^t\left|A_j\right| + \dots + C_0^t\left|A_0\right| = k^n \\ C_{t-1}^{t-1}\left|A_t\right| + (C_{t-2}^{t-1} - C_{t-1}^{t-1})\left|A_{t-1}\right| + \dots + (C_{j-1}^{t-1} - C_j^{t-1})\left|A_j\right| + \dots - C_0^{t-1}\left|A_0\right| = (k-2)^n \\ C_{t-2}^{t-2}\left|A_t\right| + (C_{t-3}^{t-2} - 2C_{t-2}^{t-2})\left|A_{t-1}\right| + \dots + (C_{j-2}^{t-2} + C_j^{t-2} - 2C_{j-1}^{t-2})\left|A_j\right| + \dots + C_0^{t-2}\left|A_0\right| = (k-4)^n \\ \vdots \\ C_0^t\left|A_t\right| - C_1^t\left|A_{t-1}\right| + \dots + (-1)^{t-j} C_{t-j}^t\left|A_j\right| \dots + (-1)^t C_t^t\left|A_0\right| = (k-2t)^n \end{cases}$$

令第ⓘ式的$\left|A_j\right|$係數為$a_{ij}\,(0 \le i \le t, 0 \le j \le t)$，

其中a_{ij}為「j種數有偶數個，其餘$t-j$種數有奇數個」的情形下，「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$i-1$″」出現偶數次的個數減去「〝0″ + 〝1″ + 〝2″ +…+ 〝$i-1$″」出現奇數次的個數。

$$\Rightarrow \text{可利用矩陣表示為} \begin{bmatrix} a_{0t} & a_{0(t-1)} & a_{0(t-2)} & \cdots & a_{0j} & \cdots & a_{00} \\ a_{1t} & a_{1(t-1)} & a_{1(t-2)} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{10} \\ a_{2t} & a_{2(t-1)} & a_{2(t-2)} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{it} & a_{i(t-1)} & a_{i(t-2)} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{tt} & a_{t(t-1)} & a_{t(t-2)} & \cdots & a_{tj} & \cdots & a_{t0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|A_t\right| \\ \left|A_{t-1}\right| \\ \left|A_{t-2}\right| \\ \vdots \\ \left|A_j\right| \\ \vdots \\ \left|A_0\right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2i)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$$

為了符號便利且敘述簡便，可針對各種數字出現奇數個的狀況而言，而改令

集合 $B_0 = A_t$:「0」與「1」與「2」與……與「 $t-1$ 」等 t 種數皆為偶數個，

集合 $B_1 = A_{t-1}$: 某 $t-1$ 種數有偶數個，其餘一種數有奇數個，

集合 $B_2 = A_{t-2}$: 某 $t-2$ 種數有偶數個，其餘二種數有奇數個，

集合 $B_3 = A_{t-3}$: 某 $t-3$ 種數有偶數個，其餘三種數有奇數個，

$\vdots$

集合 $B_j = A_{t-j}$: 某 $t-j$ 種數有偶數個，其餘 j 種數有奇數個，

$\vdots$

集合 $B_{t-2} = A_2$: 某兩種數有偶數個，其餘 $t-2$ 種數有奇數個，

集合 $B_{t-1} = A_1$: 某一種數有偶數個，其餘 $t-1$ 種數有奇數個，

集合 $B_t = A_0$:「0」與「1」與「2」與……與「 $t-1$ 」等 t 種數皆為奇數個。

則滿足

⓪ $C_0^t|B_0| + C_1^t|B_1| + C_2^t|B_2| + \ldots + C_j^t|B_j| + \ldots + C_t^t|B_t| = k^n$

① $C_0^{t-1}|B_0| + (C_1^{t-1} - C_0^{t-1})|B_1| + (C_2^{t-1} - C_1^{t-1})|B_2| + \ldots + (C_j^{t-1} - C_{j-1}^{t-1})|B_j| + \ldots - C_{t-1}^{t-1}|B_t| = (k-2)^n$

② $C_0^{t-2}|B_0| + (C_1^{t-2} - C_1^2 C_0^{t-2})|B_1| + (C_2^{t-2} + C_0^{t-2} - C_1^2 C_1^{t-2})|B_2| + \ldots + (C_j^{t-2} + C_{j-2}^{t-2} - C_1^2 C_{j-1}^{t-2})|B_j| + \ldots$

$+ C_{t-2}^{t-2}|B_t| = (k-4)^n$

$\vdots$

ⓘ $C_0^{t-i}|B_0| + (C_1^{t-i} - C_1^i C_0^{t-i})|B_1| + (C_2^{t-i} + C_2^i C_0^{t-i} - C_1^i C_1^{t-i})|B_2| + \ldots$

$+ [(C_0^i C_j^{t-i} + C_2^i C_{j-2}^{t-i} + C_4^i C_{j-4}^{t-i} + \ldots) - (C_1^i C_{j-1}^{t-i} + C_3^i C_{j-3}^{t-i} + C_5^i C_{j-5}^{t-i} + \ldots)]|B_j| + \ldots + (-1)^i C_i^i |B_t| = (k-2i)^n$

$\vdots$

ⓣ $C_0^t|B_0| - C_1^t|B_1| + C_2^t|B_2| + \ldots + (-1)^j C_j^t|B_j| \ldots + (-1)^t C_t^t|B_t| = (k-2t)^n$

由上述 $t+1$ 式可得 $t+1$ 元一次方程組如下：

$$\begin{cases} C_0^t|B_0|+C_1^t|B_1|+\ldots+C_j^t|B_j|+\ldots+C_t^t|B_t|=k^n \\ C_0^{t-1}|B_0|+(C_1^{t-1}-C_0^{t-1})|B_1|+\ldots+(C_j^{t-1}-C_{j-1}^{t-1})|B_j|+\ldots-C_{t-1}^{t-1}|B_t|=(k-2)^n \\ C_0^{t-2}|B_0|+(C_1^{t-2}-C_1^2C_0^{t-2})|B_1|+\ldots+(C_j^{t-2}+C_{j-2}^{t-2}-C_1^2C_{j-1}^{t-2})|B_j|+\ldots+C_{t-2}^{t-2}|B_t|=(k-4)^n \\ \vdots \\ C_0^t|B_0|-C_1^t|B_1|+\ldots+(-1)^jC_j^t|B_j|\ldots+(-1)^tC_t^t|B_t|=(k-2t)^n \end{cases}$$

令第ⓘ式的$|B_j|$係數為$b_{ij}(0\le i\le t,0\le j\le t)$，

其中b_{ij}為「$t-j$種數有偶數個，其餘j種數有奇數個」的情形下，「〝0〞+〝1〞+〝2〞+…+〝$i-1$〞」出現偶數次的個數減去「〝0〞+〝1〞+〝2〞+…+〝$i-1$〞」出現奇數次的個數。

即$b_{ij}=(C_0^iC_j^{t-i}+C_2^iC_{j-2}^{t-i}+C_4^iC_{j-4}^{t-i}+\ldots)-(C_1^iC_{j-1}^{t-i}+C_3^iC_{j-3}^{t-i}+C_5^iC_{j-5}^{t-i}+\ldots)=\sum_{k=0}^{t}(-1)^kC_k^iC_{j-k}^{t-i}$

$\Rightarrow$可表示為$\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_j| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2i)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$

則我們可知，若$\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix}$的反方陣存在，

則$\begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_j| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2i)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$。

如此的運算可用程式跑出答案，底下將介紹另一種矩陣解此方程組的方法。

第四章　矩陣解方程組

而為解方程組，發現解的係數有規則的變化，如下：

對『長度為n的k元數列中，「0」出現偶數次的個數』

所產生的二次方程組$\begin{cases} |A|+|B|=k^n \\ |A|-|B|=(k-2)^n \end{cases}$而言，

可寫成$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \end{bmatrix}$

由解$|A|,|B|$的係數發現$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k^n+(k-2)^n \\ k^n-(k-2)^n \end{bmatrix}$。

同理，對『長度為n的k元數列中，「0」與「1」出現偶數次的個數』

所產生的三次方程組$\begin{cases} |A|+2|B|+|D| = k^n \\ |A| - |D| = (k-2)^n \\ |A|-2|B|+|D| = (k-4)^n \end{cases}$而言，

可寫成$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} |A| \\ |B| \\ |D| \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} k^n+2(k-2)^n+(k-4)^n \\ k^n-(k-4)^n \\ k^n-2(k-2)^n+(k-4)^n \end{bmatrix}$$。

同理，對『長度為n的k元數列中，「0」與「1」與「2」出現偶數次的個數』

所產生的四元方程組$\begin{cases} |A|+3|B_1|+3|C_1|+|D| = k^n \\ |A|+|B_1|-|C_1|-|D| = (k-2)^n \\ |A|-|B_1|-|C_1|+|D| = (k-4)^n \\ |A|-3|B_1|+3|C_1|-|D| = (\mathrm{k}-6)^{\mathrm{n}} \end{cases}$而言，

可寫成$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B_1| \\ |C_1| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ (k-6)^n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B_1| \\ |C_1| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ (k-6)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |A| \\ |B_1| \\ |C_1| \\ |D| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ (k-6)^n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} |A| \\ |B_1| \\ |C_1| \\ |D| \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} k^n+3(k-2)^n+3(k-4)^n+(k-6)^n \\ k^n+(k-2)^n-(k-4)^n-(k-6)^n \\ k^n-(k-2)^n-(k-4)^n+(k-6)^n \\ k^n-3(k-2)^n+3(k-4)^n-(k-6)^n \end{bmatrix}$，可得

$|A|=\dfrac{k^n+3(k-2)^n+3(k-4)^n+(k-6)^n}{8}$，

$|B_1|=|B_2|=|B_3|=\dfrac{k^n+(k-2)^n-(k-4)^n-(k-6)^n}{8}$，

$|C_1|=|C_2|=|C_3|=\dfrac{k^n-(k-2)^n-(k-4)^n+(k-6)^n}{8}$，

$|D|=\dfrac{k^n-3(k-2)^n+3(k-4)^n-(k-6)^n}{8}$。

因此猜測對『長度為n的k元數列中，「0」與「1」與「2」與……「$t-1$」($t \le k$)出現偶數次的個數』所產生的$t+1$元方程組，

$$\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_j| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2i)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$$

而言，也有如下的性質：

$$\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^t & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^t & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 2^t \end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^t & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^t & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_i| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2j)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_i| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix} = \frac{1}{2^t} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2j)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$$

可得 $|B_i| = \dfrac{1}{2^t}\sum_{j=0}^{t} b_{ij}(k-2j)^n$

$$\Rightarrow |B_0| = \frac{1}{2^t}\sum_{j=0}^{t} b_{0j}(k-2j)^n = \frac{1}{2^t}\sum_{j=0}^{t} C_j^t (k-2j)^n$$

$$= \frac{C_0^t k^n + C_1^t(k-2)^n + C_2^t(k-4)^n + \ldots + C_j^t(k-2j)^n + \ldots + C_t^t(k-2t)^n}{2^t}$$ 。

例：『長度為n的十元數列中，「0」與「1」與「2」與……「9」出現偶數次的個數』。

$$\left|B_0\right|=\frac{1}{2^{10}}\sum_{j=0}^{10}C_j^{10}(10-2j)^n=\frac{C_0^{10}10^n+C_1^{10}8^n+C_2^{10}6^n+\ldots+C_5^{10}0^n+C_6^{10}(-2)^n\ldots+C_{10}^{10}(-10)^n}{2^{10}}$$

當n為奇數時，$\left|B_0\right|=0$

當n為偶數時，$\left|B_0\right|=2\times\frac{C_0^{10}10^n+C_1^{10}8^n+C_2^{10}6^n+C_3^{10}4^n+C_4^{10}2^n}{2^{10}}$

當$n=2$時，$\left|B_0\right|=2\times\frac{C_0^{10}10^2+C_1^{10}8^2+C_2^{10}6^2+C_3^{10}4^2+C_4^{10}2^2}{2^{10}}=2\times\frac{5120}{1024}=10$

列舉法可知即為 00,11,22,33,44,55,66,77,88,99，共 10 種，與公式是相呼應的。

由上例看來，猜測似乎正確，但我尚未整理出此結論的證明，也是本文可惜之處，但仍可由矩陣解方程組；至於上述公式$\left|B_i\right|=\frac{1}{2^t}\sum_{j=0}^{t}b_{ij}(k-2j)^n$，以及

$$\left|B_0\right|=\frac{C_0^t k^n+C_1^t(k-2)^n+C_2^t(k-4)^n+\ldots+C_j^t(k-2j)^n+\ldots+C_t^t(k-2t)^n}{2^t}，$$

我猜測應為真，只待以後證明。

到目前為止，本文的重點告一段落，而本文所強調的作法由下例統整呈現。

例：『長度為n的四元數列中，「0」與「1」與「2」與「3」出現偶數次的個數』。

(1)分割集合

集合B_0：「0」與「1」與「2」與「3」皆為偶數個，

集合B_1：「0」與「1」與「2」有偶數個，「3」有奇數個，

集合B_2：「0」與「1」有偶數個，「2」與「3」有奇數個，

集合B_3：「0」有偶數個，「1」與「2」與「3」有奇數個，

集合B_4：「0」與「1」與「2」與「3」皆為奇數個，

(2)建立方程組

$$\begin{cases} C_0^4B_0+C_1^4B_1+C_2^4B_2+C_3^4B_3+C_4^4B_4=4^n \\ C_0^1C_0^3B_0+(C_0^1C_1^3-C_1^1C_0^3)B_1+(C_0^1C_2^3-C_1^1C_1^3)B_2+(C_0^1C_3^3-C_1^1C_2^3)B_3-C_1^1C_3^3B_4=2^n \\ C_0^2C_0^2B_0+(C_0^2C_1^2-C_1^2C_0^2)B_1+(C_0^2C_2^2+C_2^2C_0^2-C_1^2C_1^2)B_2+(C_2^2C_1^2-C_1^2C_2^2)B_3+C_2^2C_2^2B_4=0^n \\ C_0^3C_0^1B_0+(C_0^3C_1^1-C_1^3C_0^1)B_1+(C_2^3C_0^1-C_1^3C_1^1)B_2+(C_2^3C_1^1-C_3^3C_0^1)B_3-C_3^3C_1^1B_4=(-2)^n \\ C_0^4B_0-C_1^4B_1+C_2^4B_2-C_3^4B_3+C_4^4B_4=(-4)^n \end{cases}$$

(3)建立矩陣

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^n\\2^n\\0\\(-2)^n\\(-4)^n\end{bmatrix}$$

(4)矩陣求解

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^n\\2^n\\0\\(-2)^n\\(-4)^n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}16 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 16 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 16 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 16 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^n\\2^n\\0\\(-2)^n\\(-4)^n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\1 & 2 & 0 & -2 & -1\\1 & 0 & -2 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 2 & -1\\1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^n\\2^n\\0\\(-2)^n\\(-4)^n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{(1\times 4^n+4\times 2^n+6\times 0+4\times(-2)^n+1\times(-4)^n)}{16}=\frac{4^n+4\times 2^n+4\times(-2)^n+1\times(-4)^n}{16}$$

當 n 為奇數時，$|B_0|=0$

當 n 為偶數時，$|B_0|=2\times\frac{4^n+4\times 2^n}{16}$

當 $n=2$ 時，$|B_0|=2\times\frac{4^2+4\times 2^2}{16}=2\times\frac{32}{16}=4$

列舉法可知即為 00,11,22,33，共 4 種，與結論是相同的。

當 $n=4$ 時，$\left|B_0\right| = 2\times\dfrac{4^4+4\times 2^4}{16} = 2\times\dfrac{256+64}{16} = 40$

列舉法可知即為 0000,0011,0022,0033,1111,1122,1133,2222,2233,3333，再行排列，

共 $4\times\dfrac{4!}{4!}+6\times\dfrac{4!}{2!2!} = 4+36 = 40$ 種，與結論是相同的。

$n=6$, $n=8$ ⋯⋯以此類推，

由此方法可較為快速並同時求出各種限制條件的個數，至於控制的數字變多時，目前用矩陣解方程組運算上較為麻煩，建議用程式運算跑出答案。

第五章　結論

本文主要是解決『長度為n的四元數列中，控制一種(0)，兩種數字(0,1)，三種數字(0,1,2)出現偶數次(或奇數次)的個數』，使用的方法是建立雙射函數並使用方程式組求解，是一種中學生能淺顯易懂的作法，進而推廣至『長度為n的k元數列中，控制t種數字$(0,1,2,...,(t-1))$出現偶數次(或奇數次)的個數』，使用的方法是建立矩陣$BX=C$，而得$B^2X=BC$，且若B可逆，便可得出$X=(B^2)^{-1}BC$。

其中$B=\begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0j} & \cdots & b_{0t} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{it} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{t0} & b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tj} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} |B_0| \\ |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_j| \\ \vdots \\ |B_t| \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} k^n \\ (k-2)^n \\ (k-4)^n \\ \vdots \\ (k-2i)^n \\ \vdots \\ (k-2t)^n \end{bmatrix}$，

b_{ij}:「$t-j$種數有偶數個，j種數有奇數個」的情形下，「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$i-1$〞」出現偶數次的個數減去「〝0〞＋〝1〞＋〝2〞+…+〝$i-1$〞」出現奇數次的個數，

即$b_{ij}=(C_0^iC_j^{t-i}+C_2^iC_{j-2}^{t-i}+C_4^iC_{j-4}^{t-i}+...)-(C_1^iC_{j-1}^{t-i}+C_3^iC_{j-3}^{t-i}+C_5^iC_{j-5}^{t-i}+...)=\sum_{k=0}^{t}(-1)^kC_k^iC_{j-k}^{t-i}$，

B_j:控制$t-j$種數有偶數個，j種數有奇數個的集合。

當控制的數較少時，可利用紙筆操作，當控制的數多時，可利用程式跑出答案，且各種限制條件皆可藉由此方程組的列式而一併獲得解決，這是有效率的解決各種數字出現偶數次(或奇數次)的個數的一種方法，也節省了不少時間，但仍有計算上的麻煩，因此更期待的是希望能將上一章的結論給證明，得出一般的通式，並能以較簡單的組合模型表達出答案，如此更能被中學生所接受，這也是我仍須努力的目標；另外對於控制多種數字，1 對 1 且映成的方法變的複雜，但仍有數學情境上的優勢及簡便性，希望能找到一種雙射對應對所有的t值皆成立，如此更能展現出威力，這也是我期待能獲得改善的地方。

參考文獻

[1]Alan Tucker(1994)，Applied Combinatorics(5th Edition)，John Wiley & Sons Inc。

[2]http://mathworld.wolfram.com/HammingCode.html。

[3]漢明碼 http://zh.wikipedia.org/wiki/Hamming_code。

[4]黃子嘉(2001)，離散數學(上)，鼎茂圖書出版有限公司。

[5]黃子嘉(2001)，離散數學(下)，鼎茂圖書出版有限公司。

[6]奇偶校驗位，維基百科。

[7]中華民國身分證，維基百科。