中文摘要

在統計學上，我們常使用皮爾森相關係數(Pearson’s Correlation Coefficient)來表達兩變數間線性關係的強度，同時也表達出關係之方向。傳統之相關係數所處理的資料都是明確的實數值，但是當資料是模糊數時，並不適合使用傳統的方法來計算模糊相關係數。而本研究探討區間模糊樣本資料值求得模糊相關係數，首先將區間型模糊資料分爲離散型和連續型，提出區間模糊相關係數定義，並提出廣義誤差公式，將相關係數作合理的調整，使所求的出相關係數更加精確。在第三章我們以影響數學成就評量的因素，作實證研究分析，得出合理的分析。而此相關係數定義和廣義誤差公式也能應用在兩資料值爲實數或其中一筆資料值爲實數的情況，可以解釋更多在實務上所發生的相關現象。

關鍵字：模糊相關係數、區間資料、數學成就評量

ABSTRACT

In the statistic research, we usually express the magnitude of linear relation between two variables by means of Pearson's Correlation Coefficient, which is also used to convey the direction of such relation. Traditionally, correlation coefficient deals with data which consist of specific real numbers. But when the data are composed of fuzzy numbers, it is not feasible to use this traditional approach to figure out the fuzzy correlation coefficient. The present study investigates the fuzzy samples of interval data to find out the fuzzy correlation coefficient. First, we categorize the fuzzy interval data into two types: discrete and continuous. Second, we define fuzzy correlation with interval data and propose broad formulas of error in order to adjust the coefficient more reasonably and deal with it more accurately. In Chapter Three, we conduct empirical research by the factor which affects the evaluation of mathematical achievement to acquire reasonable analysis. By doing so, broad definition of coefficient and formulas of error can also be applied to the conditions of either both values of the data are real number or one value of the data is real number, and can explain more related practical phenomenon.

Keywords：Fuzzy correlation，interval data，evaluation of mathematical achievement

目錄

1.前言

人類思維主要是來自於對自然現象和社會現象的認知意識，而人類的知識語言也會因本身的主觀意識、時間、環境和研判事情的角度不同而具備模糊性，故吳柏林(2005)提出模糊理論的產生即是參考人類思維方式對環境所用的模糊測度與分類原理，給予較穩健的描述方式，以處理多元複雜的曖昧和不確定現象。

模糊集合理論(fuzzy set theory)的概念最早是由 Lotfi A. Zadeh (1965)提出，以模糊邏輯(fuzzy logic)為基礎的理論，利用此邏輯測度並使用模糊統計來代替傳統統計；而此集合基本理論可參考Klir與Folger (1988)或Zimmermann (1991)之著作。此理論將傳統數學之二元邏輯加以延伸，不再只有是非或對錯的二分法。元素和集合間不再只有屬於或不屬於的二元關係，而是容許部分隸屬的存在。例如：某人感覺今天的天氣可能有一點點屬於涼爽，又有一點點屬於潮溼，但又大部分屬於晴朗。使用隸屬度(membership)的概念，可表示一事件"屬於各集合的程度"為何。事情之所以模糊，往往在於其多重隸屬的關係，而不是隨機性。所以事情發展的可能性無法以單一的狀況來考慮。這增加了預測上的困難，但也因為考量各種情形，所以增加了其準確性及可信度。

如果我們想了解X 與Y 兩個現象之間的關係程度，最直接的方法就是先把(X, Y)的資料散布圖畫出來。到底 X 與 Y 這兩變數之間呈現何種程度的關係，由資料散布圖我們便可約略看出它們之間的相關性。事實上，任兩個變數之間必定有關係存在，包括正相關、負相關、或統計無關。因此測量關係程度的大小，才是我們所感興趣的。

而在統計學上，我們使用皮爾森相關係數(Pearson's correlation coefficient)來表達兩變數間線性關係的強度，同時也表達出關係之方向。傳統之相關係數所處理的資料都是明確的實數值，但是當資料是模糊數時，並不適合使用傳統的方法來計算模糊相關係數(fuzzy correlation coefficient)。林原宏(2004)提出模糊相關係數即針對模糊性資料，衡量其類似性(similarity)和相關性(correlation)的係數。而

Ragin (2000)和Smithson (1987)也提出模糊理論近年來應用於社會科學與日俱增，若欲就蒐集而得的資料，計算資料的類似性和相關性，變成為一個重要的課題。類似性是計算兩個模糊數(或模糊集合)的類似程度，相關性係計算一組模糊樣本中，每個模糊樣本點的兩個模糊數之相關性。模糊相關係數仍有待發展，文獻上也有許多不同的公式。

針對類似性，有Yu (1993)就兩個三角形模糊數，提出類似性之相關係數公式，而針對Yu所提出的公式不理想之處，後來有Hung與Wu (2001)和Chaudhuri與Bhattacharya (2001)各提出衡量類似性的相關係數公式，後續所改進的公式較為合理適切。而針對相關性，有Liu與Kao (2002)提出一個衡量n個樣本點模糊資料的相關性之相關係數公式。Liu與Kao (2002)認為模糊數 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 的相關係數應該也是模糊數，而非明確值，且在不同 α 截集($\alpha - cut$)水準下，能表示出相關係數的可能性(possibility)，所以傳統機率觀點的相關係數為其一特例。

而本研究將針對區間模糊樣本資料值求得模糊相關係數，將區間型模糊資料分為離散型和連續型，並依據Liu與Kao (2002)所提出相關係數方法先求得模糊相關係數，提出廣義誤差公式，將相關係數作合理的調整，能使所求出相關係數更加精確，而此公式也能應用在兩資料值為實數或其中一筆資料值為實數的情況，可以解釋更多在實務上所發生的相關現象。

2.研究方法

本章先在 2.1 模糊統計量中，引用一些常用的模糊統計量，並介紹區間模糊數及其轉換方法，以說明模糊統計方法如何處理模糊資料。在 2.2 節中介紹傳統皮爾森線性相關係數，定義模糊線性相關係數及廣義誤差公式。而在 2.3 中提出模糊線性相關係數的性質，最後在 2.4 節整理當遇到區間樣本時區間樣本的演算法。

2.1 模糊數性質

模糊集合是一種人類的思考與語言量化的新理論，對生活上的各種不確定性，以更合理的方式去分析，預期能更接近、合乎人性與智慧。在許多科學的研究過程中，資料會因人類本身主觀意識、時間差異與環境的影響，而具備模糊性，爲了建立合理的數學模式，方有模糊理論的產生。

在傳統的集合論中，元素對於集合的關係，只有屬於與不屬於該集合的觀念，以二元集合以特徵函數(characteristic function)來表達，即為

$$X_A(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\in A\\ 0, & \text{若 } x\notin \mathrm{A}\end{cases}$$

若將此集合關係應用於描述某些實務現象時，常發現不合理的情形。因爲某些現象並不一定存在非此即彼的關係，而模糊集合理論及打破傳統的二元集合論，而採取軟計算(soft computing)來表示元素與集合之間的隸屬程度，我們稱爲隸屬度函數(membership function)。

隸屬度函數是模糊理論的基礎，用來表達元素對於集合之間的隸屬程度。但是對於不同的事件，要建立一個適當的隸屬度函數，卻是一件不容易的事情，雖然隸屬度代表這對事物客觀的屬性，但其中隱含個人主觀意識的因素。

隸屬度函數可分爲離散型(discrete type)與連續型(continuous type)兩種。離散型的隸屬度函數是直接給予有限集合內每個元素的隸屬度，並以向量形式表現出來，定義如下：

定義 2.1　隸屬度函數(吳柏林，2005)

設在論域U上給定映射μ，即$\mu:U\rightarrow[0,1]$，則說$\mu:U\rightarrow[0,1]$確定了U上一個模糊(Fuzzy)集合$\tilde{A}$，$\mu_{\tilde{A}}$叫做$\tilde{A}$的隸屬度函數，$\mu_{\tilde{A}}(u)$叫做u對$\tilde{A}$的隸屬度，它表示u屬於$\tilde{A}$的程度。

定義 2.2　模糊數(吳柏林，2005)

設U為一個論域，令$\{A_1,A_2,A_3......,A_n\}$為論域$U$的因子集。$\mu$為一對應到$[0,1]$間的實數函數，即$\mu:U\rightarrow[0,1]$。假若佈於論域$U$之一述句X其相對於因子集的隸屬度函數以$\{\mu_1(X),\mu_2(X),........\mu_n(X)\}$表示，

則在離散的情形下，述句X的模糊數可表示成：

$$\mu_U(X)=\frac{\mu_1(X)}{A_1}+\frac{\mu_2(X)}{A_2}+..........\frac{\mu_n(X)}{A_n}$$

(其中”＋”是或的意思，$\frac{\mu_i(X)}{A_i}$表示述句X隸屬於因子集A_i的程度)

則U為連續時，述句X的模糊數可表示成：

$$\mu(X)=\int_{x\in X}\frac{\mu_i(X)}{A_i}$$

例2.1　民眾對河川惡臭感覺的模糊數表示

假設X＝淡水河沿岸民眾對河川惡臭的感覺。以模糊數表示為$\mu_U(X)$。假設論域$U=\{$1=很嚴重，2=嚴重，3=普通，4=輕度，5=無影響$\}$。若X＝淡水河沿岸民眾對河川惡臭的感覺的隸屬度函數為

$$\{\mu_1(X)=0.25,\mu_2(X)=0.4,\mu_3(X)=0.2,\mu_4(X)=0.15,\mu_5(X)=0\}$$

亦可表示模糊數表示為：

$$\mu_U(X)=\frac{0.25}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.15}{4}+\frac{0}{5}$$

區間模糊數的概念在日常生活中是常見的，因爲在某些情況下現有資訊無法使我們確定真正的值爲何，故在定義 2.3 我們定義出區間模糊數。

定義 2.3　區間型模糊數(吳柏林，2005)

區間型糊模數為一具有均勻隸屬度函數的模糊數，以閉區間的符號”[ ]”來表示。若 $a,b \in R$ 且 $a < b$，則 $[a,b]$ 表一區間型模糊數，a 稱為 $[a,b]$ 的下界，b 稱為 $[a,b]$ 的上界；若 $a = b$，則 $[a,b]=[a,a]=[b,b]=a=b$ 表一實數 a（或 b）。同樣的，一實數 k 亦可表示為 $[k,k]$。

若 $[a,b]$ 為一區間型模糊數，設 $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$，$s_0 = \dfrac{b-a}{2}$ 分別表示其中心及半徑，我們也可將一區間型模糊數表示成：$[c_0;s_0] \Rightarrow [c_0 - s_0, c_0 + s_0] = [a,b]$。而 $\ell = b - a$，代表該區間的長度。

例 2.2　區間型模糊數的應用

每年六、七月研究生畢業，都會有一波求職潮，而每位畢業生對薪資期望都有所不同，例如某畢業生對於薪資期望大約在 35000，但是若價錢再低一點也可接受，所以要求薪資不是確切數字，而是一個範圍，此畢業生希望薪資在 $[32000,40000]$ 這個區間內，考慮 $[32000,40000]$ 這個區間，會比考慮某一價錢更加明確，更可以提供急需求才的公司主管們參考。

在定義 2.3 根據吳柏林(2005)已定義出區間模糊數，在區間模糊數中是均勻分配的，由於人的喜好是複雜的，在於可接受範圍可細分在不同的模糊區間，故本文新定義出離散等距尺度區間模糊數，定義如 2.4，更能貼近人類多元且複雜的想法

定義 2.4　離散型等距尺度區間模糊數

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_n\}$為佈於論域U上的 n 個等距區間變數，μ為一對應到$[0,1]$間的實數函數，即$\mu : U \to [0,1]$。假若佈於論域U之一述句X其相對於因子集的隸屬度函數以$\{\mu_1(X), \mu_2(X), ...\mu_n(X)\}$表示，

則在離散的情形下，述句X的模糊數可表示成：

$$\mu_U(X) = \frac{\mu_1(X)}{L_1} + \frac{\mu_2(X)}{L_2} + ...\frac{\mu_n(X)}{L_n}$$

而等距尺度所代表每個區間中區間長度皆相等，意即$L_1 = [a_0, a_1]$、$L_2 = [a_1, a_2]$、……、$L_n = [a_{n-1}, a_n]$，而$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = ... = a_n - a_{n-1}$。

例2.3　學生一週上網時間用模糊數表示

假設X為國中學生一週上網幾個小時，以模糊數表示$\mu_u(X)$來表示，論域($[0,1]$代表 0 小時~1 小時之間)，5 位學生對一週上網時間模糊數的隸屬度函數如下表 2.1：

表 2.1　學生一週上網時間隸屬度函數

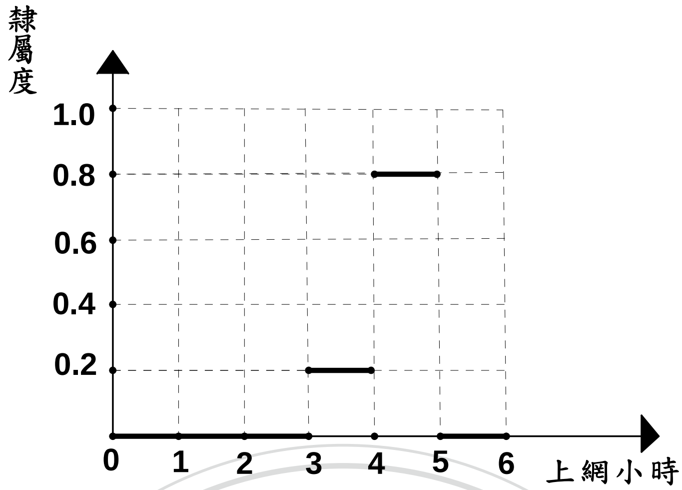
學生	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]	[5,6]
A			0.2	0.5	0.3	
B		0.6	0.4			
C			0.7	0.3		
D				0.2	0.8	
E		0.3	0.3	0.4		

其中 D 學生一週上網時間隸屬度函數用模糊數表示為：

$$\mu_D(X) = \frac{0}{[0,1]} + \frac{0}{[1,2]} + \frac{0}{[2,3]} + \frac{0.2}{[3,4]} + \frac{0.8}{[4,5]} + \frac{0}{[5,6]}$$

以直角坐標圖表示如圖 2.1：

圖 2.1 學生一週上網時間隸屬度函數



傳統統計學中，算術平均數不僅可以對資料的大小情形有個大略的了解，在計算統計量時，更是不可或缺的統計量，而模糊平均數在模糊統計中，也同樣扮演十分重要的角色，本文將針對連續型區間模糊數和離散型區間模糊數做樣本均數的定義。

定義 2.5　連續型區間模糊數樣本均數(樣本為連續區間型且均勻分配)

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_k\}$為佈於論域U上的k個等距尺度變數，$\{x_i = [a_i, b_i], i = 1,2......., n\}$為論域$U$的一組模糊樣本，則模糊樣本均數為：

$F\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i + b_i}{2}$ 。

例2.4　畢業生對薪資期望的樣本均數

在我們對於今年畢業生求職潮中，調查下列五位研究所畢業生對薪資期望的一組模糊樣本為[2 萬元, 3 萬元]，[3 萬元, 4 萬元]，[4 萬元, 6 萬元]，[5 萬元, 8 萬元]，[4 萬元, 7 萬元]，則根據定義 2.5，其模糊樣本均數

$$F\bar{x} = \frac{1}{5}(\frac{2+3}{2} + \frac{3+4}{2} + \frac{4+6}{2} + \frac{5+8}{2} + \frac{4+7}{2}) = 4.6\text{萬元}$$

這個資訊能提供給急需求才的公司主管們參考，以了解目前一般研究所畢業

生他們所希望的薪資。

定義 2.6　離散型等距尺度區間模糊樣本均數

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_k\}$為佈於論域U上的k個等距尺度變數，$\{x_1, x_2, ...x_n\}$為一組模糊樣本，且每個樣本x_i對應變數L_j之隸屬度為m_{ij}，其中$\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1$。令$M_j$為$L_j$的組中點，若$F\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} M_j = M$，我們定義模糊樣本$\{x_1, x_2, ...x_n\}$之模糊樣本均數$F\bar{x} = M$。

例 2.5　客戶可接受摩托車價錢的模糊樣本均數

因為摩托車在市面上的價格不一，而客戶會因為價錢、需求、品牌作為選擇摩托車的依據，因此訪問五位客戶可接受價錢之隸屬度，並將整理如下表 2.2：

表 2.2　客戶可接受摩托車價錢之隸屬度選擇

客戶	[4萬,4.5萬]	[4.5萬,5萬]	[5萬,5.5萬]	[5.5萬,6萬]	[6萬,6.5萬]
A	0.2	0.6	0.2		
B			0.6	0.4	
C		0.3	0.7		
D			0.8	0.2	
E		0.4	0.5	0.1	

由於客戶對價錢考量不一，每個客戶對各區間接受程度又所差異，若要從此樣本得到適合的價錢，又要忠實反映樣本的資訊，那麼使用模糊樣本均數是不錯的方法。計算如下：

令M_j為價錢區間的組中點：{4.25，4.75，5.25，5.75，6.25}

$F\bar{x}$ =（0.2×4.25+0.6×4.75+0.2×5.25+0.6×5.25+0.4×5.75+0.3×4.75+0.7×5.25

+0.8×5.25+0.2×5.75+0.4×4.75+0.5×5.25+0.1×5.75）/5

=（4.75+5.45+5.1+5.35+5.1）/5

= 5.15

由以上可得：客戶對摩托車價錢模糊樣本均數為 5.15 萬，也就是說參考 5 位客戶的意見之後，可做出客戶平均應該在 5.15 萬上下。

爲了將離散型區間樣本轉換成更適合模糊區間數，本研究須先將離散型區間樣本反模糊化，以取得模糊數值之重心。茲將離散模糊數的反模糊化值定義如下：

定義 2.7　離散型等距尺度區間樣本的反模糊化值

設 X 為一模糊數，等距尺度變數 $\{L_i; i=1,2,......,k\}$ 為論域 U 中有序的數列，$\mu_{L_i}(X)=m_i$ 為模糊樣本 X 相對於 L_i 的隸屬度，而 M_i 為 L_i 的組中點，則 $x_f=\sum_{i=1}^{k} m_i M_i$ 為模糊數 X 的反模糊化值。

例 2.6　民眾對等候公車時間長短可接受程度的反模糊化值

訪問台北市五位民眾，他們對於等候公車時間長短的可接受程度的隸屬度，並將結果整理如下表:

表 2.3　民眾對於等候公車時間長短的可接受程度的隸屬度

民眾	[0,5]	[5,10]	[10,15]	[15,20]	[20,25]	[25,30]
A	0.2	0.4	0.4			
B		0.6	0.3	0.1		
C		0.3	0.4	0.2	0.1	

D			0.5	0.5		
E		0.2	0.7	0.1		

單位:分鐘

則民眾 B 的等候公車時間反模糊化值為：

$$0.6\times7.5+0.3\times12.5+0.1\times17.5=10$$

則民眾 C 的等候公車時間反模糊化值為：

$$0.3\times7.5+0.4\times12.5+0.2\times17.5+0.1\times22.5=13$$ 。

將等距離散型區間型模糊數反模糊化，取得模糊數值重心後，爲了得到更適合的模糊區間，必須決定模糊區間的長度，本研究將區間型模糊數之模糊標準差定義如下：

定義 2.8　離散型等距尺度區間樣本之模糊標準差

設 U 為一個論域，令 $\{L_1, L_2, ..., L_k\}$ 為佈於論域 U 上的 k 個等距尺度變數，述句 X 的等距尺度模糊數為：

$$\mu_U(X)=\frac{m_1}{L_1}+\frac{m_2}{L_2}+.......+\frac{m_k}{L_K}\text{（且}\sum_{i=1}^{k}m_i=1\text{）}$$

根據定義 2.7 可求得等距尺度模糊數 X 的反模糊化值 $x_f=\sum_{i=1}^{k}m_iM_i$，則區間型等距尺度模糊數之模糊標準差定義為：

$$F\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}m_i(M_i-x_f)^2}$$

例 2.7：民眾對等候公車時間長短可接受程度的模糊標準差

根據表 2.2:，我們能知道民眾對於等候公車時間長短的可接受程度的隸屬度。

則民眾 B 的等候公車時間反模糊化值為：

$$X_{fB}=0.6\times7.5+0.3\times12.5+0.1\times17.5=10$$

則民眾 B 的等候公車時間模糊標準差為：

$$F\sigma_B = \sqrt{0.6(7.5-10)^2 + 0.3(12.5-10)^2 + 0.1(17.5-10)^2} = 3.35$$

則民眾 E 的等候公車時間反模糊化值為：

$$0.2\times 7.5 + 0.7\times 12.5 + 0.1\times 17.5 = 12$$

則民眾 E 的等候公車時間模糊標準差為：

$$F\sigma_E = \sqrt{0.2(7.5-12)^2 + 0.7(12.5-12)^2 + 0.1(17.5-10)^2} = 3.14$$

根據定義 2.8 可得離散型等距尺度區間模糊標準差，但因本文求離散型等距尺度區間模糊相關係數，必須使用廣義誤差公式(2.2)調整其相關係數，故依使用者所區分之等距區間，用以下性質 2.1 求出最大模糊標準差，作為調整之工具。

性質 2.1　離散型等距尺度區間模糊數的最大模糊標準差

設 U 為一個論域，令 $\{L_1, L_2, ..., L_k\}$ 為佈於論域 U 上的 k 個等距尺度變數，每個等距尺度變數為 $\{L_i = [a_i, a_{i+1}], i = 1,2,.......k\}$，則離散區間型模糊數最大標準差為 $\max F\sigma = \dfrac{a_k + a_{k+1} - a_1 - a_2}{4}$。

證明: 離散型區間數最大離散度時，

述句 X 的模糊數可表示成 $\mu_U(X) = \dfrac{0.5}{L_1} + \dfrac{0}{L_2} + \dfrac{0}{L_3} .... + \dfrac{0.5}{L_k}$

反模糊化值 $0.5\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right) + 0.5\left(\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) = \dfrac{a_1 + a_2 + a_k + a_{k+1}}{4}$

模糊標準差

$$\sqrt{0.5\left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_k + a_{k+1}}{4}\right)\right]^2 + 0.5\left[\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_k + a_{k+1}}{4}\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_k + a_{k+1}}{4}\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a_k + a_{k+1} - a_1 - a_2}{4}\right)^2} = \frac{a_k + a_{k+1} - a_1 - a_2}{4}$$

定義 2.9　三角形隸屬度函數(吳柏林，2005)

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_k\}$為佈於論域U上的k個語言變數，分別賦予$r = \{r_1, r_2, ..., r_k\}$之權重數值，當k點量表中第$L_i$等距尺度變數被勾選時，則其三角隸屬度函數為：

$$\mu(x) = \max\left\{1 - \frac{|x - r_i|}{s}, 0\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

其中s是三角形的分布半徑。

例 2.8　數學教科書評選之三角形隸屬度函數

台北市某國中舉行數學教科書評選，五位評選教師對第二家出版社之教科書的滿意程度，整理如表 2.4：

表 2.4　評選教師對教科書的滿意程度

評選教師	非常不滿意	不滿意	普通	滿意	非常滿意
A				○	
B				○	
C			○		
D					○
E					○

我們分別賦予五個語言變數的滿意程度權重為：

L_1 = 非常不滿意=0　　L_2 = 不滿意=0.25　　L_3 = 普通=0.5

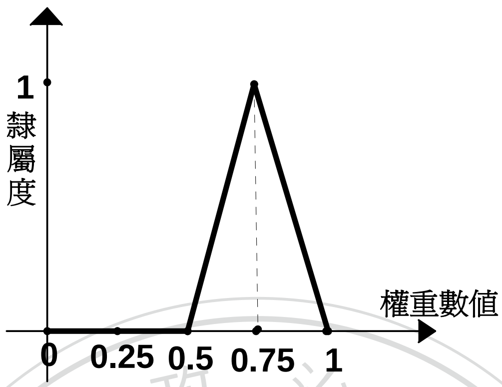
L_4 = 滿意=0.75　　L_5 = 非常滿意=1

則第一位評選教師對第二家出版社之教科書的滿意三角形隸屬度函數為：

$$\mu(x) = \max\left\{1 - \frac{|x - 0.75|}{s}, 0\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

若取s=0.25，以直角座標圖表示如圖 2.2：

圖 2.2 評選教師對教科書的滿意程度之三角形隸屬度函數



定義 2.10　離散型等距尺度區間隸屬函數轉換成三角形隸屬度函數

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_k\}$為佈於論域 U 上的k個等距尺度變數，當等距尺度模糊數$\mu_U(X) = \frac{m_1}{L_1} + \frac{m_2}{L_2} + ... + \frac{m_k}{L_k}$，而$X_f$為等距尺度模糊數的反模糊化值，而$F\sigma$為等距尺度模糊數的標準差。

則其三角隸屬度函數為

$$\omega(x) = \max\left\{1 - \frac{|x - x_f|}{2F\sigma}, 0\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

例 2.9　民眾等候公車時間可接受程度之隸屬度函數轉換成三角形隸屬度函數

民眾 B 的等候公車時間反模糊化值為：

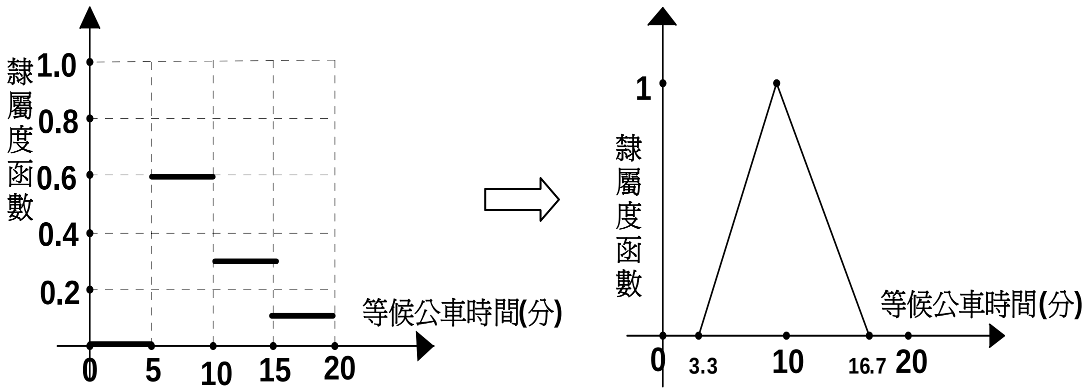
$$X_{f_B} = 0.6 \times 7.5 + 0.3 \times 12.5 + 0.1 \times 17.5 = 10$$

則民眾 B 的等候公車時間模糊標準差為：

$$F\sigma_B = \sqrt{0.6(7.5-10)^2 + 0.3(12.5-10)^2 + 0.1(17.5-10)^2} = 3.35$$

則將原先區間型模糊數轉換成三角形隸屬度函數。轉換如圖 2.3：

圖 2.3 民眾等候公車時間隸屬度函數轉換成三角形隸屬度函數



分解理論與擴張理論是模糊集合中的重要觀念。而兩個理論都需要用到α截集($\alpha - cut$)的觀念。本研究處理三角形隸屬度函數之模糊數時，則使用α截集($\alpha - cut$)的觀念，以取得模糊資料之模糊區間。

定義 2.11　隸屬度函數在α截集下的模糊區間(吳柏林，2005)

設U為一個論域，令$\{L_1, L_2, ..., L_k\}$為佈於論域U上的k個語言變數，則模糊數隸屬度函數之α截集為

$$A_\alpha = \{x \mid \omega(x) \ge \alpha\} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

設$x_{Li,\alpha} = \min(A_\alpha)$，$x_{Ui,\alpha} = \max(A_\alpha)$，則$Ix_{i,\alpha} = [x_{Li,\alpha}, x_{Ui,\alpha}]$為此模糊數在$\alpha$截集下的模糊區間。

例 2.10　民眾等候公車時間之三角型隸屬度函數的α截集

在例 2.9 中學生 B 對公車等候時間的三角模糊隸屬度函數為：

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ,\mathrm{x} \le 3.3, \mathrm{x} \ge 16.7 \\ \dfrac{16.7 - \mathrm{x}}{6.7} & ,10 \le \mathrm{x} < 16.7 \\ \dfrac{x - 3.3}{6.7} & ,3.3 < x \le 10 \end{cases}$$

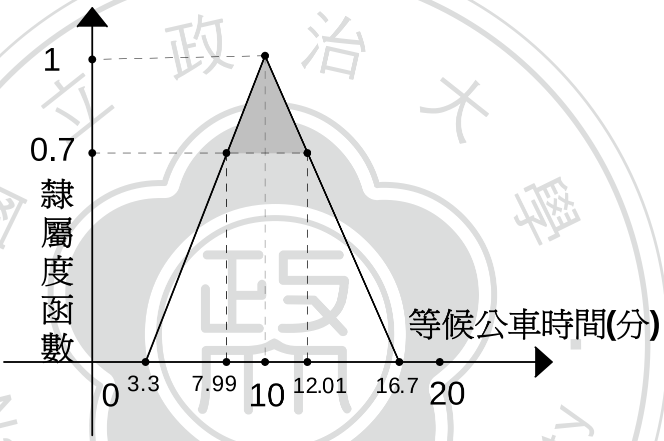
因為 $\frac{16.7-x}{6.7}=0.7 \Rightarrow x=12.01$，$\frac{x-3.3}{6.7}=0.7 \Rightarrow x=7.99$

則學生 B 對等候公車時間三角模糊隸屬度函數，則在 $\alpha=0.7$ 截集下的模糊區間為

$$Ix_{i,0.7}=[7.99,12.01]$$

以直角座標圖表示如圖 2.4：

圖 2.4 民眾等候公車時間之三角型隸屬度函數的 α=0.7 時的截集



2.2 區間相關係數

而依據 x_i 與 y_i 的性質，本研究將針對區間模糊數相關係數做合適的定義，以取得其相關係數。

首先，將其分成下列兩種情形：(1) x_i 與 y_i 均為實數(皮爾森相關係數)。(2) x_i 與 y_i 均為區間模糊數。

(1) x_i 與 y_i 均為實數

此情況為傳統的線性相關係數，一般以 ρ 表示，代表兩個變數 X 及 Y 的相關程度。它的定義為

$$相關係數\ \rho = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

當$\rho > 0$時，我們稱X與Y之間爲直線正相關；當$\rho < 0$，則稱X與Y之間爲直線負相關；若是$\rho = 0$，則稱X與Y爲之間沒有線性相關存在，或說統計相關。

不過要求相關係數，必須要得知它們的變異數$\sigma_X{}^2$、$\sigma_Y{}^2$和它們之間的共變異數$Cov(X,Y)$。但是在實務應用上，常常並不容易得到。因此，我們用樣本相關係數r_{xy}來估計ρ，即

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

其中$(x_{i,}y_i)$爲第i對樣本值，$i = 1,2,3........,n$；$\bar{x}$及$\bar{y}$分別爲其樣本平均數。

(2) x_i與y_i均爲區間模糊數

當處理的兩變數均爲模糊數時。利用以下兩種定義來求相關係數。

定義 2.12　模糊相關係數(取區間中心點的方法)

將區間型模糊數分兩種情形，(1)連續型區間模糊數(區間內均勻分配)(2)離散型等距尺度區間模糊數。

(1)當模糊數為連續型模糊數(區間內均勻分配)，分別對兩變數X,Y取各樣本區間中心點x_i、y_i為代表值。

(2)當模糊數為離散等距尺度區間型模糊數，用定義 2.7 分別對兩變數X,Y取各樣本的反模糊化值，得模糊數的重心值x_i、y_i當作代表值。

根據上述方法，取得區間中心點當代表值後，再將此代入以下相關係數公式。

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (2.1)$$

其中$(x_{i,}y_i)$為第i對代表值，$i=1,2,3........,n$；$\bar{x}$及$\bar{y}$分別為其樣本平均數。

得到相關係數值r_{xy}後，有可能連續區間模糊數長度不一樣，或離散區間隸屬度不同，但因中心點或反模糊化值相同，所以有相同代表值。離散程度不同，卻會算出相同相關係數，這樣的相關數是不合理的，為了修正更正確的相關係數，本研究用以下廣義誤差公式(2.2)來調整誤差，並得到更具代表性相關係數成R_{xy}。廣義誤差公式(2.2)如下：

	(x_i)連續型	(x_i)離散型
(y_i)連續型	$r_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{\ell_{x_i}}{\max\ell_x}-\frac{\ell_{y_i}}{\max\ell_y}\right\rvert})$	$r_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{\ell_{x_i}}{\max\ell_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right\rvert})$
(y_i)離散型	$r_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{\ell_{y_i}}{\max\ell_y}\right\rvert})$	$r_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right\rvert})$

當$r_{xy}>0$時，±號取－號，當$r_{xy}<0$時，±號取＋號。β值依使用者選擇來調整誤差。公式來由因$1-e^{-\frac{1}{10}}$約略等於 0.1，故當$\beta=1$時，最大調整誤差為 0.1。

連續樣本

ℓ_{x_i}：連續區間樣本x_i的長度。
ℓ_{y_i}：連續區間樣本y_i的長度
$\max\ell_x$：所有x_i樣本中最大長度(自訂)
$\max\ell_y$：所有y_i樣本中最大長度(自訂)

離散樣本

$F\sigma_{x_i}$：離散區間樣本x_i的模糊標準差
$F\sigma_{y_i}$：離散區間樣本y_i的模糊標準差
$\max F\sigma_x$：樣本x_i的最大模糊標準差(性質 2.1)
$\max F\sigma_y$：樣本y_i的最大模糊標準差(性質 2.1)

例 2.11 調查 3 位評審給予三位歌唱大賽選手的評分的相關係數

大學某社團辦歌唱大賽，找來 3 位音樂系的評審 A、B、C，對三位晉級總決賽的參賽選手評分，評分最高分 10 分，最低分 0 分，而三位評審皆給予模糊給分。A 評審給予連續區間給分，而 B、C 評審給予離散區間給分。下表為三位評審給分內容，並根據定義 2.12 求代表值、區間長度、模糊標準差。如下表 2.5、2.6、2.7：

表 2.5 A 評審給予各選手分數的區間數

選手	分數	代表值	區間長度(ℓ)
1 號選手	[7,7]	$A_1=7$	0
2 號選手	[7,9]	$A_2=8$	2
3 號選手	[8,10]	$A_3=9$	2

表 2.6 B 評審給予各選手分數的隸屬度函數

分數 / 選手	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[6,7]	[7,8]	反模糊化值	模糊標準差
1 號選手	0.5				0.5	$\mathrm{B}_1=5.5$	$F\sigma_{B_1}=2$
2 號選手	0.2			0.8		$\mathrm{B}_2=5.9$	$F\sigma_{B_2}=1.2$
3 號選手		0.4		0.6		$\mathrm{B}_3=5.7$	$F\sigma_{B_3}=0.98$

表 2.7 C 評審給予各選手分數的隸屬度函數

分數 / 選手	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[6,7]	[7,8]	反模糊化值	模糊標準差
1 號選手		0.2	0.8			$C_1=5.3$	$F\sigma_{C_1}=0.4$

2號選手			0.7	0.3		$C_2=5.8$	$F\sigma_{C_2}=0.46$
3號選手		0.1	0.9			$C_3=5.4$	$F\sigma_{C_3}=0.3$

根據上表算出三組樣本均值：$\overline{A}=8$，$\overline{B}=5.7$，$\overline{C}=5.5$，再用公式(2.1)算出來修正前的相關係數。如下表2.8：

表2.8　未修正前評審間給予分屬的相關係數 r

	A評審	B評審	C評審
A評審	1	0.5	0.19
B評審		1	0.94
C評審			1

A評審給的區間樣本最大長度訂為 $\max \ell=10$，B、C評審給的離散樣本最大標準差為 $\max F\sigma=4.5$。則利用(2.2)廣義誤差公式。結果如下:

(1)A為連續區間樣本，B為離散區間樣本，得 $R_{AB}=0.5-0.018\beta$

(2)A為連續區間樣本，C為離散區間樣本，得 $R_{AC}=0.19-0.011\beta$

(3)B為離散區間樣本，C為離散區間樣本，得 $R_{BC}=0.94-0.022\beta$

表2.9　當 $\beta=1$ 的修正相關係數 R

	A評審	B評審	C評審
A評審	1	0.482	0.179
B評審		1	0.918
C評審			1

表2.10 當 $\beta=2$ 的修正相關係數 R

	A評審	B評審	C評審
A評審	1	0.464	0.168
B評審		1	0.896
C評審			1

由上表可得知 B 評審和 C 評審給的分數相關程度較高，所以他們看法較接近而 A 評審和 C 評審給的分數相關程度較低，看法落差較大。

根據定義 2.12，取區間中心點的方法作出的相關係數值 R_{xy}，使 $-1 \le R_{xy} \le 1$，並將模糊樣本反模糊化得到一實數，而非模糊數，但以模糊觀點來說，希望得到相關係數爲一模糊數，因此本研究將模糊相關係數作另一定義，取得合適的模糊相關區間。

定義 2.13　模糊相關係數(以端點及四分位數為主的相關係數)

將區間型模糊數分兩種情形(1)連續型區間模糊數(均勻分配)(2)離散型區間模糊數。

(1)當模糊數為連續型模糊數(均勻分配)，分別對兩變數 X,Y 取各樣本的模糊區間，取左右兩端點(x_{Li},x_{Ri})、(y_{Li},y_{Ri})及四分位數(x_{i1},x_{i2},x_{i3})、(y_{i1},y_{i2},y_{i3})當代表值。

(2)當模糊數為離散型模糊數，用定義 2.7 分別對兩變數 X,Y 中各樣本反模糊化值，取得模糊數的重心值 x_i、y_i，再用定義 2.8 取得模糊標準差，並用定義 2.10 轉換成三角形模糊數，使用 α 截集方式取得模糊區間，再從各組模糊區間中取左右兩端點(x_{Li},x_{Ri})、(y_{Li},y_{Ri})及四分位數(x_{i1},x_{i2},x_{i3})、(y_{i1},y_{i2},y_{i3})當代表值。

根據上述方法，取得端點和四分位數當代表值後，再將其五個變數代入以下相關係數公式。

$$\hat{r}_{xy} = [(r_{xy})_{L,\alpha}, (r_{xy})_{U,\alpha}] \quad (2.3)$$

$$(r_{xy})_{U,\alpha}=\max\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$(r_{xy})_{L,\alpha}=\min\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

而 $x_i=(x_{Li},x_{i1},x_{i2},x_{i3},x_{Ri})$，$y_i=(y_{Li},y_{i1},y_{i2},y_{i3},y_{Ri})$，即必須把這五組代表值分五次代入，找出極大值和極小值。

其中 $(x_{i,}y_i)$ 為第 i 對代表值，$i=1,2,3........,n$；$\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 分別為其樣本平均數。

依據上述方法，用區間等分法求得模糊相關區間 $\widehat{r}_{xy}$，本研究再利用以下廣義誤差公式，得到更準確的模糊相關區間 $\widehat{R}_{xy}$。

廣義誤差公式(2.4)如下：

X \ Y	(x_i) 連續型	(x_i) 離散型
(y_i) 連續型	$\widehat{r}_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{\ell_{x_i}}{\max\ell_x}-\frac{\ell_{y_i}}{\max\ell_y}\right\rvert})$	$\widehat{r}_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{\ell_{x_i}}{\max\ell_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right\rvert})$
(y_i) 離散型	$\widehat{r}_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{\ell_{y_i}}{\max\ell_y}\right\rvert})$	$\widehat{r}_{xy}\pm\beta(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right\rvert})$

其中$\widehat{R}_{xy}=\left[(r_{xy})_{L,\alpha}\pm\beta(x,y),(r_{xy})_{U,\alpha}\pm\beta(x,y)\right]$，當$r_{xy}>0$時，±號取－號，當$r_{xy}<0$時，±號取＋號。β值依使用者選擇來調整誤差。其它符號和定義 2.12 相同。

2.3 區間模糊線性相關係數的性質

在 2.2 節中，我們將離散型區間資料轉換成三角形模糊數，且定義了模糊相關係數公式，此模糊相關係數有以下特性：

性質 2.2 區間模糊相關係數與傳統線性相關係數相同，也會介於-1 與 1 之間，當$\widehat{R}_{xy}>0$或$R>0$時，我們稱X與Y之間為正相關；當$\widehat{R}_{xy}<0$或$R<0$時，我們稱X與Y之間為負相關，若是$\widehat{R}_{xy}=0$或$R=0$，則稱X與Y之間為沒有關係存在，或說統計無關。

性質 2.3 當區間相關係數利用定義 2.12 找區間中點的方法取得相關係數，模糊數變退化為實數，與傳統相關係數相同。

性質 2.4 當離散區間型樣本轉化成三角形模糊數，用定義 2.11 取得α截集下的模糊區間，若α取為 1，則此模糊區間之模糊半徑為 0，則用定義 2.13 求相關係數將退化成實數，和直接利用定義 2.12 求相關係數結果一樣。

證明：定義 2.12 求區間模糊相關係數，是以反模糊化值當代表值，而定義 2.13 求區間模糊相關區間，是以反模糊化值當中心，兩個模糊標準差為區間半徑，再用α截集取適當區間半徑，若α取 1，則代表值即為反模糊化值一點，故依定義 2.13 求出五等分點皆為反模糊化值，所求出模糊區間退化成一實數，即和定義 2.12 求區間模糊相關係數相同。

性質 2.5 同一筆模糊資料，利用定義 2.12 求區間模糊相關係數 R_{xy} 必定落在利用定義 2.13 求得模糊區間內，意即 $R_{xy} \in \hat{R}_{xy}$ 。

證明：定義 2.12 求區間模糊相關係數 R_{xy} ，是取各樣本的反模糊化值當代表值，而定義 2.13 是以反模糊化值為中心，兩個模糊化值為區間半徑，再取 α 截集，再由五等分點為代表值，故反模糊化值為五個代表值之中心點，故 R_{xy} 一定落在五等分點求出的模糊區間 $\hat{R}_{xy}$ 內。(廣義誤差公式對區間內各實數皆同時向上或向下平移，故原先 $r_{xy} \in \hat{r}_{xy}$ ，則 $R_{xy} \in \hat{R}_{xy}$)

性質 2.6 當兩組模糊資料相關性過低時，利用定義 2.13 求得的模糊係數，可能會產生模糊線性相關係數 $\hat{R}_{xy} = [(R_{xy})_{L,\alpha},(R_{xy})_{U,\alpha}]$ 的區間下界 $(R_{xy})_{L,\alpha}$ 小於 0，而上界 $(R_{xy})_{L,\alpha}$ 卻大於 0 的情況。

性質 2.7 當兩變數 X,Y 中所有樣本皆為實數時，即區間距離為 0，則利用定義 2.12 和定義 2.13 求模糊相關係數的方法，將退化和皮爾森相關係數相同。

說明：若 X,Y 中所有樣本皆為實數時，則公式(2.1)和(2.3)和皮爾森相關係數相同，而廣義誤差公式中沒有標準差或區間長度為 0，故調整誤差值為 0，故退化成皮爾森相關係數。

性質 2.8 當兩變數 X,Y 其中之一組為模糊數，另一組為實數，則定義 2.12 和定義 2.13 求模糊相關係數方法依然適用。

性質 2.9 當兩變數 X,Y 皆為區間模糊數，兩變數 X,Y 區間範圍(離散程度)愈大，則用廣義誤差公式，調整相關係數量較小。兩變數 X,Y 區間範圍(離散程度)

愈小，則利用廣義誤差公式，調整相關係數值量較小。兩變數 X,Y 區間範圍(離散程度)其中一變數大，另一變數小，則利用廣義誤差公式，調整相關係數量較大。

例 2.12 三組連續型區間變數的相關係數比較

有三組連續模糊區間變數 a、b、c

表 2.6　三組連續區間變數樣本

變數	第一組樣本	第二組樣本	第三組樣本	樣本平均
a	$a_1=[7,7]$	$a_2=[7,9]$	$a_3=[8,10]$	$\bar{a}=8$
b	$b_1=[5,9]$	$b_2=[6,10]$	$b_3=[6,12]$	$\bar{b}=8$
c	$c_1=[9,11]$	$c_2=[8,10]$	$c_3=[10,18]$	$\bar{c}=11$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a-\bar{a}\ )^2}=\sqrt{2}$ ， $\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(b_i-\bar{b})^2}=\sqrt{2}$ ， $\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(c_i-\bar{c})^2}=\sqrt{14}$

利用定義 2.12 未修正相關係數 $r_{ac}=0.756$ ， $r_{bc}=0.756$

代入修正誤差公式得 $R_{ac}=0.756-0.0264\beta$ ， $R_{bc}=0.756-0.02\beta$

由上例，可看到 b 和 c 離散程度皆大，調整誤差量小。而 a 離散程度小，c 離散程度大，故調整誤差量大。

性質 2.10 當兩組變數用定義 2.13 求出模糊相關區間 $\hat{r}_{xy}$ ，再用廣義誤差公式 (2.4)所得區間 $\hat{R}_{xy}$，無論 β 為任何數，其相關區間上界減相關區間下界皆相同。

證明: 任意兩組變數若根據定義 2.13 求出模糊相關區間 $\hat{r}_{xy}=[a,b]$，再根據(2.4)求出模糊相關區間 $\hat{R}_{xy}=[a\pm\beta k,b\pm\beta k]$ ，而 $k=(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_X}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_Y}\right|})$

，當兩組變數決定時，k 值固定，而±號的決定，區間上界和區間下界皆相同，故 $(b \pm \beta k) - (a \pm \beta k) = b - a$ ，無論 β 值為任何數。

2.4 區間樣本演算法

若用定義 2.12，區間樣本模糊相關係數演算法

步驟 1：模糊問卷抽樣調查。

步驟 2：利用區間中點，得反模糊化值當代表值。

步驟 3：取得代表值後利用定義 2.12，算出模糊線性相關係數 r_{xy} 。

步驟 4：決定調整誤差值 β ，調整模糊係數 r_{xy} ，得到更適當模糊相關係數 R_{xy} 。

若用定義 2.13，區間樣本模糊相關係數演算法

步驟 1：模糊問卷抽樣調查。

步驟 2：利用區間中點，求反模糊化值。

步驟 3：利用區間中點和反模糊化值，代入定義 2.8 求模糊標準差。

步驟 4：從離散等距尺度區間型模糊數轉化成三角形模糊數(反模糊化值隸屬度為 1，以兩個模糊標準差當模糊區間)根據定義 2.10，可得三角形模糊數。

步驟 5：決定隸屬度 α 值，利用 α 截集，取得適合的模糊數之模糊區間。

步驟 6：用定義 2.13 找出端點和四分位數當代表值，算出模糊線性相關區間 $\hat{r}_{xy}$ 。

步驟 7：決定調整誤差值 β ，調整模糊區間 $\hat{r}_{xy}$ ，得到更適當模糊相關區間 $\hat{R}_{xy}$ 。

3.實證分析

本章分析區間模糊數相關係數的實例應用，在 3.1 和 3.2 處理一組變數爲離散等距尺度區間模糊數，另一組變數爲實數的情形，在 3.3 處理兩組變數皆爲離散等距尺度模糊數的情形，並利用廣義誤差公式算出相關係數。

3.1 上網時間與數學成就

某校爲了解「影響數學成就因素」，調查六位學生，利用模糊問卷的方式，決定各指標的重要性，其中針對「學生一週上網時數」指標之問卷結果經整理如表：

步驟 1：模糊問卷抽樣調查。

表 3.1 學生對「一週上網時間」指標之隸屬度

上網時間 / 學生	[0,1]	[1,2]	[2,3	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[6,7]	[7,8]	14,15]	[15,16]	[16,17]	[17,18]
A	0.3	0.7										
B							0.5	0.5				
C				0.4	0.6							
D			0.8	0.2								
E									0.1	0.1	0.6	0.2
F									0.2	0.7	0.1	

步驟 2：利用區間型組中點當代表值，求反模糊化值

根據定義 2.7，可得到以下數據：

學生 A 的上網時間之反模糊化值：

$0.3\times0.5+0.7\times1.5=1.2$

學生 B 的上網時間之反模糊化值：

$0.5\times6.5+0.5\times7.5=7$

學生 C 的上網時間之反模糊化值：

$0.4\times3.5+0.6\times4.5=4.1$

學生 D 的上網時間之反模糊化值：

$0.8\times1.5+0.2\times2.5=1.7$

學生 E 的上網時間之反模糊化值：

$0.1\times14.5+0.1\times15.5+0.6\times16.5+0.2\times17.5=16.4$

學生 F 上網時間之反模糊化值：

$0.2\times14.5+0.7\times15.5+0.1\times16.5=15.4$

步驟 3：利用區間型中點和反模糊化值，求模糊標準差

根據定義 2.8，可得到以下數據：

學生 A 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.3\times(0.5-1.2)^2+0.7\times(1.5-1.2)^2}=0.46$$

學生 B 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.5\times(6.5-7)^2+0.5\times(7.5-7)^2}=0.5$$

學生 C 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.4\times(3.5-4.1)^2+0.6\times(4.5-4.1)^2}=0.49$$

學生 D 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.8\times(1.5-1.7)^2+0.2\times(2.5-1.7)^2}=0.4$$

學生 E 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.1\times(14.4-16.4)^2+0.2\times(15.5-16.4)^2+0.6\times(16.5-16.4)^2+0.2\times(17.5-16.4)^2}=0.78$$

學生 F 的上網時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.2\times(14.5-15.4)^2+0.7\times(15.5-15.4)^2+0.1\times(16.5-15.4)^2}=0.542$$

步驟 4:從離散等距尺度區間型模糊數轉化成三角形模糊數(反模糊化值隸屬度爲 1，以兩個模糊標準差當模糊區間)根據定義 2.10，可得三角形模糊數。

圖 3. 1 學生 A 上網時間離散等距區間數轉換成三角形模糊數

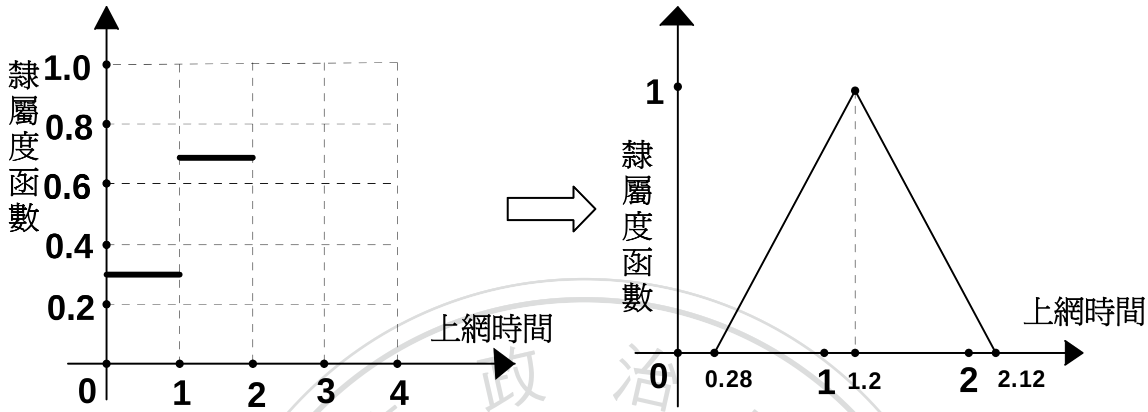


圖 3.2 學生 B 上網時間之離散等距區間轉換成三角形模糊數

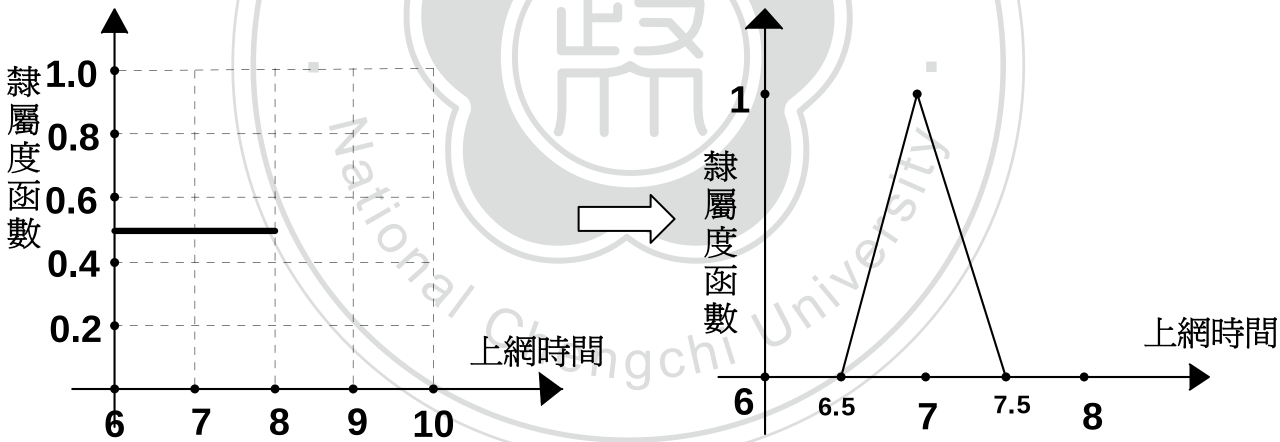


圖 3.3 學生 C 上網時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

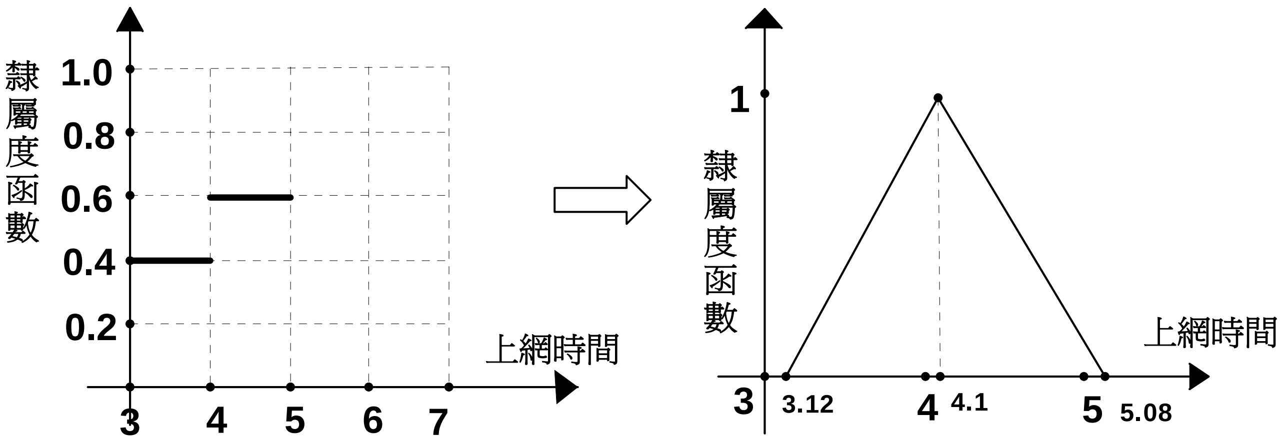


圖 3.4 學生 D 上網時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

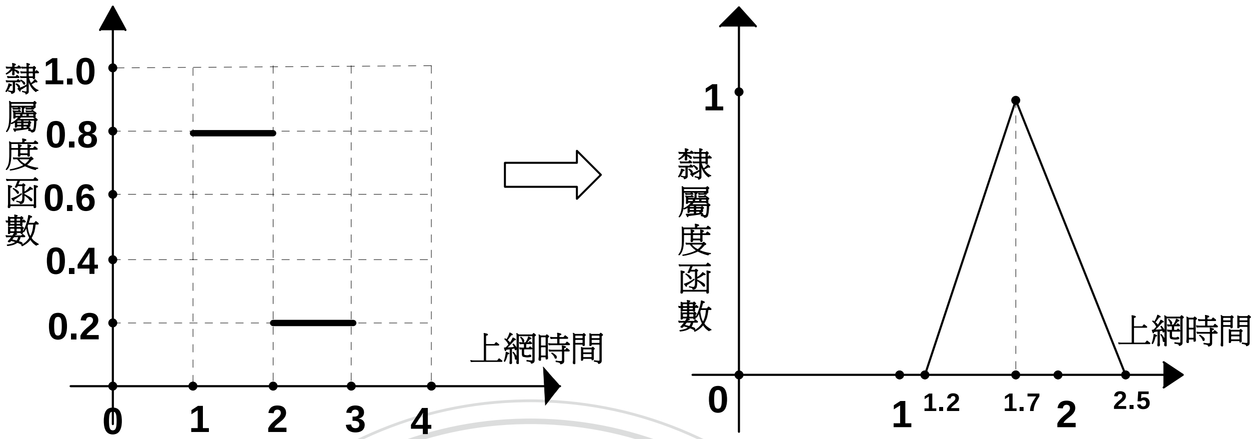


圖 3.5 學生 E 上網時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

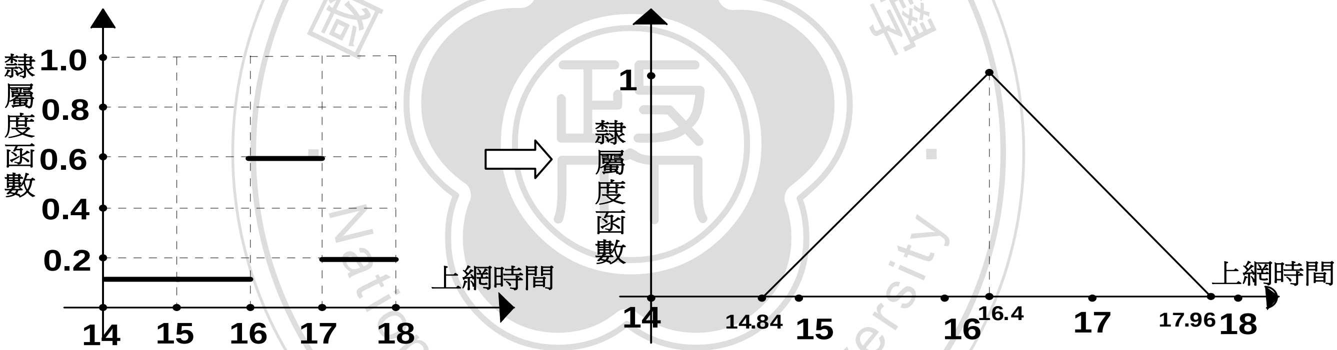
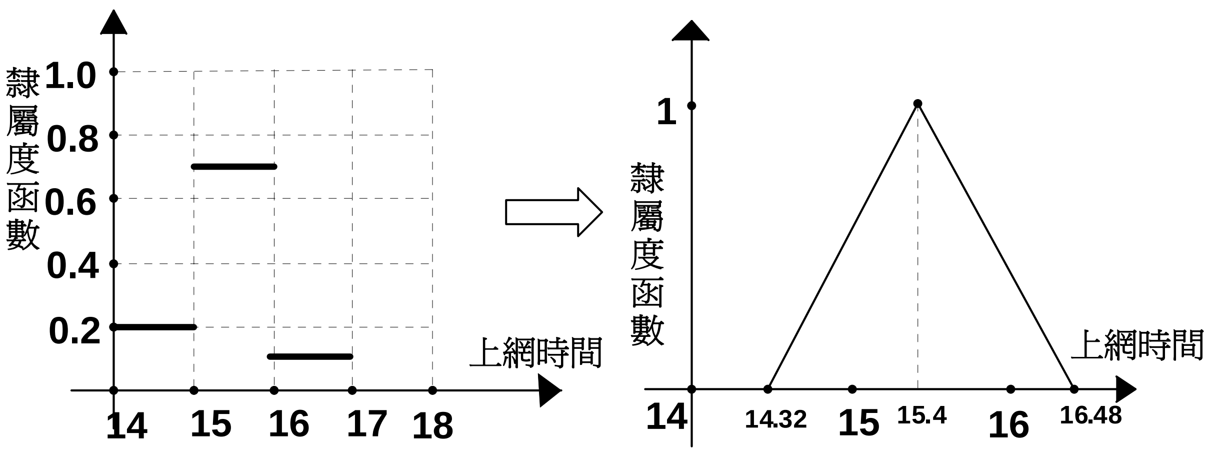


圖 3.6 學生 F 上網時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數：



步驟 5：決定隸屬度 α 值，利用 α 截集，取得適合的等距區間型模糊數之模糊區間

取 α ＝0.8，可得到每個學生的模糊區間：

學生 A 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{A,0.8} = [1.2 - 0.2 \times 0.92, 1.2 + 0.2 \times 0.92] = [1.016, 1.384]$$

學生 B 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{B,0.8} = [7 - 0.2 \times 1, 7 + 0.2 \times 1] = [6.8, 7.2]$$

學生 C 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{C,0.8} = [4.1 - 0.2 \times 0.98, 4.1 + 0.2 \times 0.98] = [3.904, 4.296]$$

學生 D 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{D,0.8} = [1.7 - 0.2 \times 0.8, 1.7 + 0.2 \times 0.8] = [1.54, 1.86]$$

學生 E 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{E,0.8} = [16.4 - 0.2 \times 1.56, 16.4 + 0.2 \times 1.56] = [16.088, 16.702]$$

學生 F 上網時間的模糊區間爲：

$$Iy_{F,0.8} = [15.4 - 0.2 \times 1.08, 15.4 + 0.2 \times 1.08] = [15.184, 15.616]$$

步驟 6：算出模糊線性相關係數

將五位學生的數學平均分數與一周上網時間的模糊區間($\alpha = 0.8$)，整理如表 3.2

表 3.2 學生的數學平均成績與一週上網時間的模糊區間

學生	數學平均分數 x_i	上網時間模糊區間 $Iy_{i,\alpha} = [y_{Li,\alpha}, y_{ui,\alpha}]$
A	88	[1.016，1.384]
B	83.5	[6.8，7.2]

C	67	［3.904，4.296］
D	92	［1.54，1.86］
E	45	［16.088，16.702］
F	72	［15.184，15.616］

由於模糊區間是一個連續區間由無線個實數點所組成，因此本研究處理模糊區間數的方式根據定義 2.13 將區間四等分，由三個四分位數及兩個端點等五個實數值作爲代表值代入，以求得模糊相關係數之模糊區間之極值，以獲取模糊相關係數之模糊區間。

$$\overline{X} = (88+83.5+67+92+45+72) \div 6 = 74.6$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2} = 38.756$$

1.左端點平均= $(1.016+6.8+3.904+1.54+16.088+15.184) \div 6 = 7.422$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2} = 14.935$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = -442.637$$

左端點相關係數=－0.765

2.第一四分位數平均= $(1.108+6.9+4.002+1.62+16.244+15.292) = 7.528$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2} = 15.007$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = -445.798$$

第一四分位數相關係數=－0.767

3.第二四分位數平均= $(1.2+7+4.1+1.7+16.4+15.4)=7.633$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=15.055$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\overline{y})=-447.9167$$

第二四分位數相關係數=－0.768

4.第三四分位數平均= $(1.292+7.1+4.198+1.78+16.551+15.508)=7.738$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(\mathrm{y_i}-\bar{\mathrm{y}})^2}=15.101$$

$$\sum_{i=1}^{6}(\mathrm{x_i}-\bar{\mathrm{x}})(\mathrm{y_i}-\overline{\mathrm{y}})=-451.0782$$

第三四分位數相關係數=－0.769

5.右端點平均= $(1.384+7.2+4.296+1.86+16.702+15.616)\div 6=7.843$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=15.146$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\overline{y})=-451.857$$

右端點相關係數=－0.77

表 3.3 未修正前睡眠時間和上網時間相關係數值

區分點	睡眠時間和上網時間相關係數值
左端點	－0.765
第一四分位數	－0.766
第二四分位數	－0.768
第三四分位數	－0.769
右端點	－0.77

本例中，我們調查「學生每週上網時數」，並紀錄「數學學業成績」，算出相關係數，因「學生每週上網時數」經過模糊統計，故爲一組模糊數，而「數學學業成績」爲一組實數，用定義 2.12 用學生上網區間中點方法當代表值，區間中點即第二四分位數，我們得到模糊相關係數爲－0.768。

本試驗再取 $\alpha = 0.8$ 時，將「學生每週上網時數」得到更適合的模糊區間得到模糊相關係數爲 $[-0.77, -0.765]$，

步驟 7：決定修正誤差值 β，修正模糊區間 $\hat{r}_{xy}$，得到更適當模糊相關區間 $\hat{R}_{xy}$

因 X 變數爲實數，非模糊數，故將廣義誤差公式化簡：

$$\hat{R}_{xy} = \hat{r}_{xy} \pm \beta(1 - e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x} - \frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}) = \hat{r}_{xy} \pm \beta(1 - e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|})$$

最大標準差時：[17,18]隸屬度 0.5，[0,1]隸屬度 0.5

$$\max F\sigma_y = \frac{a_k + a_{k+1} - a_1 - a_2}{4} = \frac{17 + 18 - 0 - 1}{4} = 8.5$$

$$\hat{R}_{xy} = \hat{r}_{xy} \pm \beta(1 - e^{-\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{6}\left|\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}) = \hat{r}_{xy} \pm \beta(1 - e^{-\frac{1}{60}\left|\frac{3.172}{8.5}\right|})$$

$$= \hat{r}_{xy} \pm 0.0062\beta$$

表 3.4 用廣義誤差公式修正後睡眠時間和上網時間相關係數值(不同β值)

β值	修正誤差量	定義 2.12 修正後模糊相關係數	定義 2.13 修正後模糊相關區間
$\beta=1$	0.0062	−0.761	$[-0.76353,-0.7588]$
$\beta=2$	0.0124	−0.755	$[-0.75733,-0.7526]$
$\beta=3$	0.0186	−0.749	$[-0.75113,-0.7464]$
$\beta=4$	0.0248	−0.743	$[-0.74993,-0.7402]$
$\beta=5$	0.031	−0.737	$[-0.73873,-0734]$

呈現高度負相關的關係，故「學生每週上網時數」影響「數學學業成績」，也就是說影響「數學學業成績」，上網時間佔有一定的因素。

3.2 睡眠時間與數學成就

爲了想再了解「影響數學成就因素」，將六位學生「週一到週五的睡眠時間」做模糊問卷調查，並求的模糊相關係數，將「週一到週五的睡眠時間」指標之問卷結果整理如表。

步驟 1：模糊問卷抽樣調查。

表 3.5 學生對「週一到週五晚上睡眠時間」指標之隸屬度

學生 \ 睡眠時間	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[6,7]	[7,8]	[8,9]
A			0.2	0.7	0.1	
B			0.2	0.8		
C			0.1	0.9		
D		0.4	0.4	0.2		
E			0.4	0.6		
F				0.1	0.9	

步驟 2：利用區間型組中點當代表值，求反模糊化值

根據定義 2.7，可得到以下數據

學生 A 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.2\times5.5+0.7\times6.5+0.1\times7.5=6.4$

學生 B 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.2\times5.5+0.8\times6.5=6.3$

學生 C 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.1\times5.5+0.9\times6.5=6.35$

學生 D 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.4\times 4.5+0.4\times 5.5+0.2\times 6.5=5.3$

學生 E 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.4\times 5.5+0.6\times 6.5=6.1$

學生 F 的睡眠時間之反模糊化值：

$0.1\times 6.5+0.9\times 7.5=7.35$

步驟 3：利用區間型中點和反模糊化值，求模糊標準差

根據定義 2.8.，可得到以下數據：

學生 A 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.2\times(5.5-6.4)^2+0.7\times(6.5-6.4)^2+0.1\times(7.5-6.4)^2}=0.539$$

學生 B 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.2\times(5.5-6.3)^2+0.8\times(6.5-6.3)^2}=0.4$$

學生 C 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$.\sqrt{0.1\times(5.5-6.35)^2+0.9\times(6.5-6.35)^2}=0.304$$

學生 D 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.4\times(4.5-5.3)^2+0.4\times(5.5-5.3)^2+0.2\times(6.5-5.3)^2}=0.748$$

學生 E 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.4\times(5.5-6.1)^2+0.6\times(6.5-6.1)^2}=0.488$$

學生 F 的睡眠時間之模糊標準差爲：

$$\sqrt{0.1\times(5.5-6.35)^2+0.9\times(6.5-6.35)^2}=0.304$$

步驟 4：從離散等距尺度區間型模糊數轉化成三角形模糊數(反模糊化值隸屬度爲 1，以兩個模糊標準差當模糊區間) 根據定義 2.10，可得三角形模糊數

圖 3.7 學生 A 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

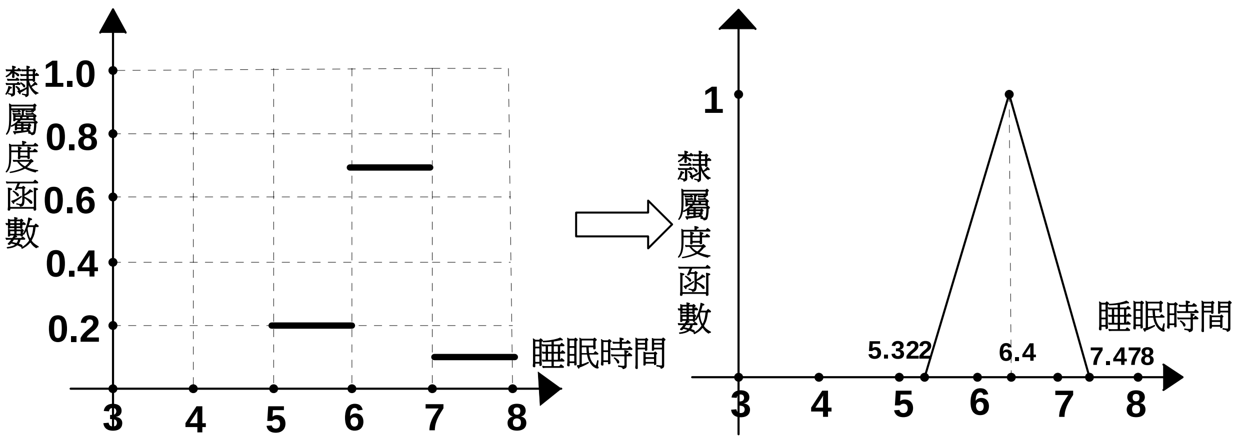


圖 3.8 學生 B 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

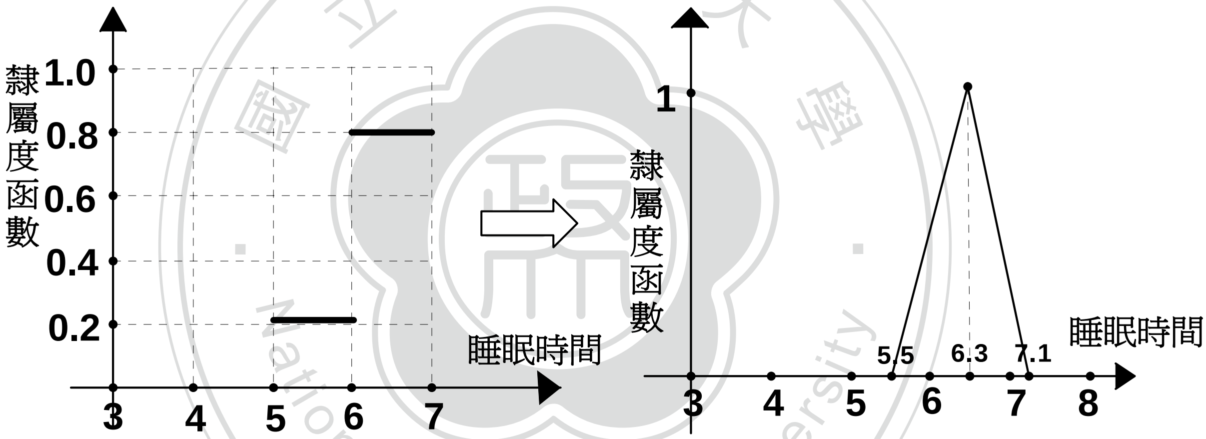


圖 3.9 學生 C 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

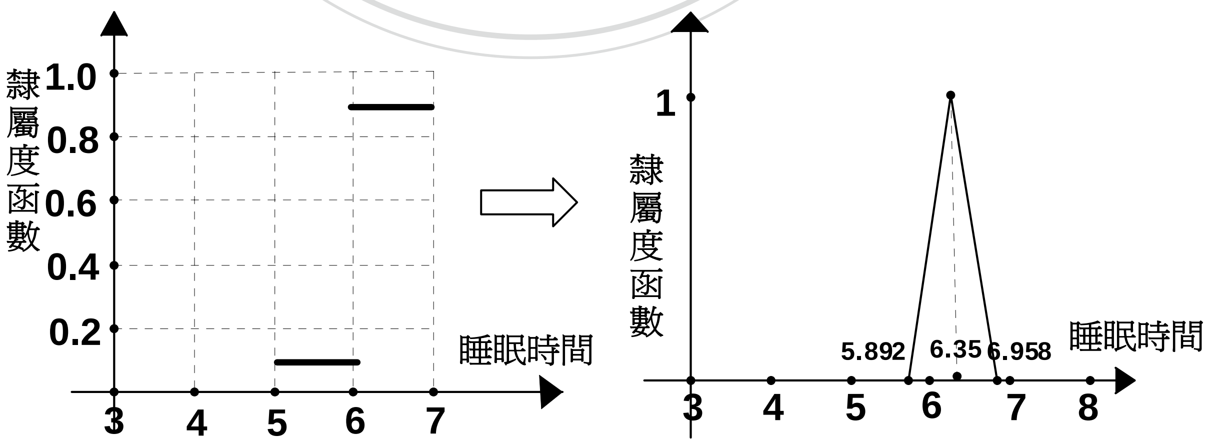


圖 3.10 學生 D 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

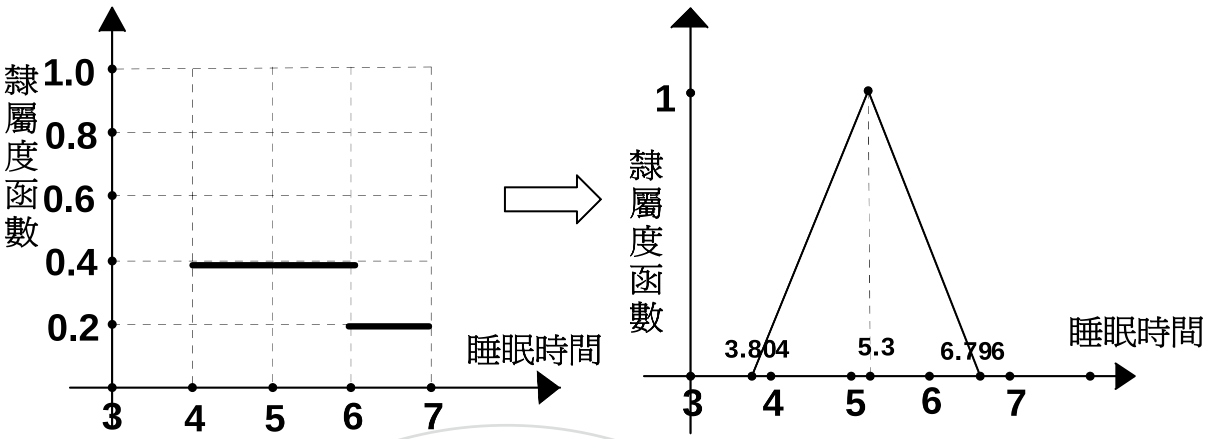


圖 3.11 學生 E 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數

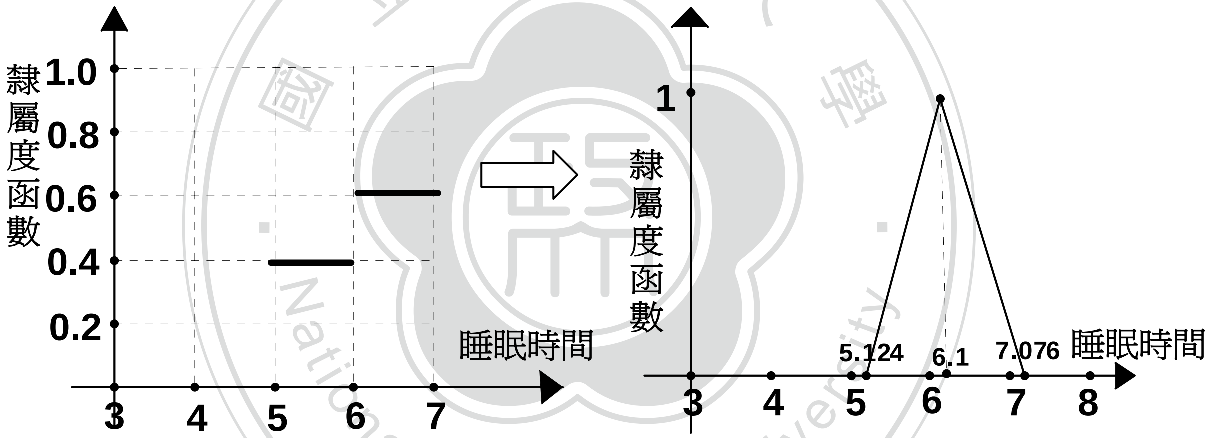
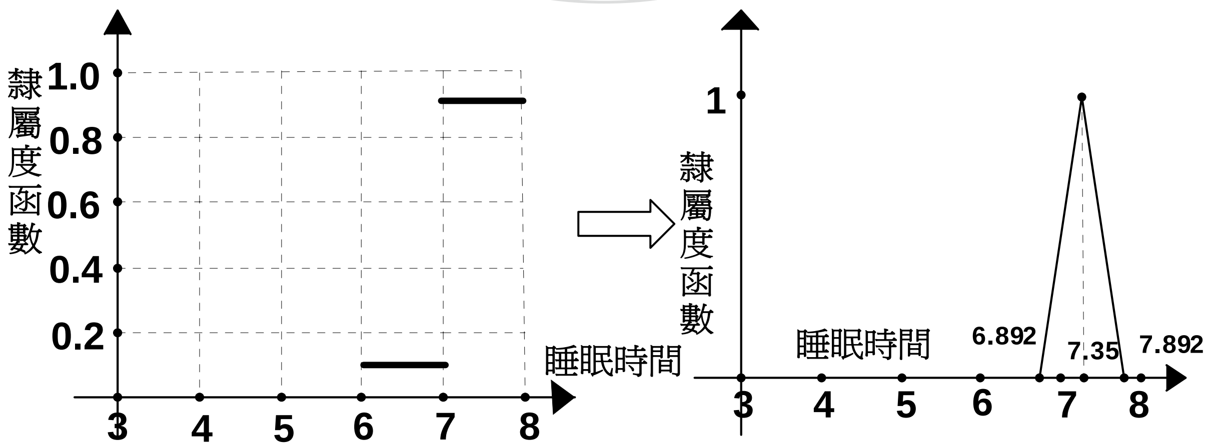


圖 3.12 學生 F 睡眠時間之離散等距區間數轉換成三角形模糊數



步驟 5：決定隸屬度α值，利用α截集，取得適合的等距區間型模糊數之模糊區間

取α＝0.8，可得到每個學生的模糊區間：

學生 A 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{A,0.8}=[6.4-0.2\times1.078, 6.4+0.2\times1.078]=[6.184, 6.616]$$

學生 B 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{B,0.8}=[6.3-0.2\times0.8, 6.3+0.2\times0.8]=[6.14, 6.46]$$

學生 C 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{C,0.8}=[6.35-0.2\times0.608, 6.35+0.2\times0.608]=[6.228, 6.472]$$

學生 D 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{D,0.8}=[5.3-0.2\times1.496, 5.3+0.2\times1.496]=[5.001, 5.6]$$

學生 E 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{E,0.8}=[6.1-0.2\times0.976, 6.1+0.2\times0.976]=[5.905, 6.295]$$

學生 F 睡眠時間的模糊區間爲：

$$Iy_{F,0.8}=[7.35-0.2\times0.608, 7.35+0.2\times0.608]=[7.228, 7.472]$$

步驟 6：算出未修正前的模糊線性相關係數

將六位學生的數學平均分數與週一到週五睡眠時間的模糊區間，整理如表 3.6

表 3.6 數學平均分數與週一到週五睡眠時間的模糊區間

學生	數學平均分數 x_i	睡眠時間模糊區間 $Iy_{i,\alpha}=[y_{Li,\alpha}, y_{ui,\alpha}]$
A	88	[6.184，6.616]
B	83.5	[6.14，6.46]
C	67	[6.228，6.472]

D	92	[5.001，5.6]
E	45	[5.905，6.295]
F	72	[7.228，7.472]

利用定義 2.13 求模糊相關係數，故先求算出以下各值：

$$\overline{X} = (88 + 83.5 + 67 + 92 + 45 + 72) \div 6 = 74.6$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2} = 38.756$$

表 3.7 數學平均分數週一到週五睡眠時間各等分點相關係數

區分點	平均($\bar{y}$)	$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i - \bar{y})^2}$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	相關係數 r_{xy}
左端點	6.114	1.594	－15.773	－0.255
第一四分位數	6.207	1.531	－14.506	－0.244
第二四分位數	6.3	1.468	－13.25	－0.232
第三四分位數	6.393	1.406	－11.995	－0.220
右端點	6.486	1.346	－10.709	－0.205

本例中，我們調查「學生週一到週五平均睡眠時數」，並紀錄「數學學業成績」，算出相關係數，因「學生順眠時數」經過模糊統計，故爲一組模糊數，而「數學學業成績」爲一組實數，用定義 2.12 用學生上網區間中點方法當代表值，區間中點即第二四分位數，我們得到模糊相關係數爲－0.232。

本試驗再取 $\alpha = 0.8$ 時，將「學生週一到週五睡眠時數」得到更適合的模糊區間得到模糊相關係數爲[–0.255,–0.205]。

步驟七：決定修正誤差值 β，修正模糊區間 $\hat{r}_{xy}$，得到更適當模糊相關區間 $\hat{R}_{xy}$

因 X 變數爲實數，非模糊數，故將廣義誤差公式化簡：

$$\hat{R}_{xy}=\hat{r}_{xy}\pm\beta\left(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}\right)=\hat{r}_{xy}\pm\beta\left(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}\right)$$

最大標準差時：[8,9] 隸屬度 0.5，[0,1] 隸屬度 0.5

$$\max F\sigma_y=\frac{a_k+a_{k+1}-a_1-a_2}{4}=\frac{8+9-3-4}{4}=2.5$$

$$\hat{R}_{xy}=\hat{r}_{xy}\pm\beta\left(1-e^{-\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{6}\left|\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}\right)=\hat{r}_{xy}\pm\beta\left(1-e^{-\frac{1}{60}\left|\frac{2.783}{2.5}\right|}\right)$$

$$=\hat{r}_{xy}\pm0.018\beta$$

表 3.8 數學平均分數週一到週五睡眠時間修正後相關係數(不同 β 值)

β 值	修正誤差量	修正後模糊相關係數	修正後模糊相關區間
$\beta=1$	0.018	－0.214	[-0.237,-0.187]
$\beta=2$	0.036	－0.196	[-0.219,-0.169]
$\beta=3$	0.054	－0.178	[-0.201,-0.151]
$\beta=4$	0.072	－0.16	[-0.183,-0.133]
$\beta=5$	0.09	－0.142	[-0.165,-0.115]

呈現低負相關的關係，故「學生睡眠時數」影響「數學學業成績」，也就是說影響「數學學業成績」，睡眠時間影響不大，但有些許關係。

3.3 睡眠時間與上網時間

我們關心「週一到週五的學生睡眠時間」和「學生一週上網時間」是否有相關，兩組皆爲模糊數，且爲離散區間型模糊數，我們取$\alpha = 0.8$時，得到下列模糊區間。如表 3.9：

步驟 6：算出未修正前的模糊線性相關係數

表 3.9. 學生睡眠時間模糊區間和上網時間模糊區間

學生	睡眠時間模糊區間 $Ix_{i,\alpha} = [x_{Li,\alpha}, x_{ui,\alpha}]$	上網時間模糊區間 $Iy_{i,\alpha} = [y_{Li,\alpha}, y_{ui,\alpha}]$
A	[6.184，6.616]	[1.016，1.384]
B	[6.14，6.46]	[6.8，7.2]
C	[6.228，6.472]	[3.904，4.296]
D	[5.001，5.6]	[1.54，1.86]
E	[5.905，6.295]	[16.088，16.702]
F	[7.228，7.472]	[15.184，15.616]

根據學生睡眠時間的模糊區間和學生一週上網模糊區間，利用定義 2.12 和定義 2.13 算出未修正的相關係數。如表 3.10 和 3.11。

表 3.10 學生睡眠時間和上網時間運算相關係數過程表

區分點	睡眠時間平均 $(\bar{x})$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}$	上網時間平均 $(\bar{y})$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i - \bar{y})^2}$
左端點	6.114	1.594	7.422	14.935
第一四分位數	6.207	1.531	7.528	15.007
第二四分位數	6.3	1.468	7.633	15.055
第三四分位數	6.393	1.406	7.738	15.101
右端點	6.486	1.346	7.843	15.146

表 3.11 學生週一到週五睡眠時間模糊區間和上網時間模糊區間修正前相關係數

區分點	$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\overline{y})$	睡眠時間和上網時間修正前相關係數 $\hat{r}_{xy}$
左端點	12.868	0.541
第一四分位數	12.016	0.523
第二四分位數	11.515	0.521
第三四分位數	11.013	0.519
右端點	10.5	0.515

本例中，我們將「學生週一到週五平均睡眠時數」,「學生一週上網時數」算出相關係數，因兩組數據皆爲離散型區間模糊數，用定義 2.12 用學生上網區間中點方法當代表值，區間中點即第二四分位數，我們得到模糊相關係數爲 0.521。

本試驗再取 $\alpha=0.8$ 時，將「學生週一到週五睡眠時數」和「學生一週上網時數」得到更適合的模糊區間，並用區間等分法算出模糊相關係數爲 [0.515,0.543]。

步驟 7：決定修正誤差值 β，修正模糊區間 $\hat{r}_{xy}$，得到更適當模糊相關區間 $\hat{R}_{xy}$

因 X 、 Y 變數皆爲離散區間模糊數，則利用廣義誤差公式

$$\hat{R}_{xy}=\hat{r}_{xy}\pm\beta\left(1-e^{-\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F\sigma_{x_i}}{\max F\sigma_x}-\frac{F\sigma_{y_i}}{\max F\sigma_y}\right|}\right)=\overline{r_{xy}}\pm 0.012\beta$$

表 3.12 學生週一到週五睡眠時間和一週上網時間修正後相關係數(不同 β 值)

β 值	修正誤差量	修正後模糊相關係數	修正後模糊相關區間
$\beta=1$	0.012	0.509	[0.503,0.531]
$\beta=2$	0.024	0.497	[0.491,0.517]
$\beta=3$	0.036	0.485	[0.451,0.479]
$\beta=4$	0.048	0.473	[0.439,0.467]
$\beta=5$	0.06	0.461	[0.427,0.455]

呈現中度正相關的關係，表示「學生週一到週五睡眠時數」和「學生一週上網時數」有一定的關係。

4.結論

近年來，由於科技知識水準的提高與智慧科技多元發展，造就了現今財金，經濟與教育心理研究環境的多變與複雜化。以往的社會科學研究多利用傳統的統計分析方法，以漸漸不符合現今多變的環境(吳柏林,2005)。而模糊統計是參考人類思維方式而建構出來的，故模糊統計和模糊相關性日漸受到重視。

而相較於傳統的皮爾森相關係數，由於模糊數所取得的模糊線性相關係數所傳遞的相關關係更具有解釋能力。本研究主要討論區間型模糊數爲主，並將區間相關係數分成兩種類型：(1)離散等距尺度區間型模糊數和(2)連續型模糊數(區間內均勻分配)。而離散型區間模糊數因無法直接算出相關係數，故轉換成對稱連續三角形模糊(中心；半徑)，再用定義2.12求出模糊相關係數和定義2.13求出模糊相關區間。而連續型模糊數本文討論(上界；下界)是均勻分配情形，也可利用定義2.12求出模糊相關係數和定義2.13求出模糊相關區間。

因離散區間樣本離散程度不一和連續區間樣本區間長度不同，故本研究定義廣義誤差公式(2.2)(2.4)修正相關係數，可減少集中密度不同的情形。而最大離散度和區間最大長度也可因使用者針對模糊樣本不同定出合理值，並建議使用者在β使用範圍取$0 \le \beta \le 5$內。利用本研究作出相關係數可適用兩組變數在實數和模糊數不同情形，若兩組變數都爲實數將退化成皮爾森相關係數，故本方法能適用於變數在不同情形的組合。

最後要提出幾點建議，對於往後的研究可以參考依此方向繼續探討。

1.本研究中取類似傳統統計中的標準差觀念，以便將模糊問卷所取得的離散區間模糊資料轉換成連續區間模糊數，此連續區間模糊數爲對稱三角形隸屬度函數，但因模糊問卷中離散區間集中密度不一，後續研究者可考慮轉換成非對稱三角形函數或其他函數形式(S 函數、Z 函數、三角形函數、梯形函數、高斯函數)，找出更合理的轉換公式。

2.本研究在討論連續型區間函數時，針對(上界；下界)情形求出相關係數，本研究並未對(中心；半徑)作相關係數，或模糊資料非均勻分配，而是其他常用的分配，則相關係數亦是值得探討的部份。

5.參考文獻

[1]王文俊 (1997)。認識Fuzzy。台北：全華書局。

[2]阮亭中、吳柏林(2000)。模糊數學與統計應用。台北：俊傑書局。

[3]吳柏林(2005)。模糊統計導論：方法與應用。台北：五南書局。

[4]吳柏林(003)。現代統計學。台北：五南書局。

[5]吳柏林(1997)。社會科學研究中的模糊邏輯與模糊統計分析。國立政治大學研究通訊，7，17-38。

[6]吳柏林(1995)。模糊統計分析：問卷調查研究的新方向。國立政治大學研究通訊，2，65-80。

[7]林原宏(2007)。模糊理論在社會科學研究的方法論之回顧。量化研究學刊，第一卷，第一期，2007，53-84。

[8]林原宏(2004)。模糊相關係數。教育研究月刊，第122期，教育學科教室，心理測驗與統計，122,148-149。

[9]馮國臣、任麗偉(2007)模糊理論－基礎與應用。台北：新文京開發。

[10]Carrano A. L., Taylor, J. B., Young, R E., Lemaster R. L. and Saloni, D. E. (2004). Fuzzy knowledge-based modeling and statistical regression in abrasive wood machining, *Forest Products Journal*, 54(5), 66-72.

[11]Chaudhuri, B. B., and Bhattacharya, A. (2001). On correlation between two fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 118,447-456.

[12]Dorsey, D. W., and Coovert, M. D. (2003). Mathematical modeling of decision making: A soft and fuzzy approach to capturing hard decisions, *Human Factors*, 45(1), 117.

[13]Gorsevski, P. V., Gessler, P. E., and Jankowsk, P. (2003). Integrating a fuzzy k-means classification and a Bayesian approach for spatial prediction of landslide hazard, *Journal of Geographical Systems*, 5(3),223.

[14]Hung, W. L, and Wu, J. W. (2001). A note on the correlation of fuzzy numbers by Expected interval. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9,517-523.

[15]Klir,G.F. and Folger,T.A.(1988) *Fuzzy Sets,Uncertainly and Information.* Englewood Gliffs,NJ: Prentice Hall.

[16]Liu, S. T. ,& Kao, C.(2002). Fuzzy measures for correlation of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems, 128,267-275.*

[17]Park, K. and Kim, S. (1996). A note on the fuzzy weighted additive rule. *Fuzzy Sets and Systems*, 77, 315-320.

[18]Regin, C. C. (2000). *Fuzzy-Set social science.* Chicago: University of Chicago Press.

[19]Smithson,M. (1987). *Fuzzy Set analysis for behavioral and social sciences.* New

York. Springer-Verlag.
[20]Yu, C. (1993) Correlation of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and System*s 55,303-307.
[21]Zadeh L.A. (1965) Fuzzy set. *Information and Control*, Vol. 8,338-353.
[21]Zadeh, L. A., 1975, The concept of a linguistic variable and its application to Approximate reasoning. *Information Science*, 8, 199-249(I), 301-357(II).
[22]Zadeh, L. A., 1978, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3-28.
[23]Zimmermann, H.J. (1991) *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Boston: Kluwer Academic.