國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

指導教授：劉明郎 博士

最小化風險值之
投資組合選擇模型

Portfolio Selection Model Based on Minimizing Value-at-Risk

碩士班學生：張殷華 撰

中華民國一百年六月

誌謝

喔，讀了三年的碩士班，現在終於要畢業了。要感謝的人好多，一生大概只有一次，那就來多言幾句吧！

首先要感謝指導教授劉明郎博士這三年來對學生的照顧。不論是授課時的細心講解，撰寫論文前的引導，撰寫論文時的字字斟酌與指點，讓學生看見做研究應有的態度，使學生獲益良多。同時也感謝口試委員吳柏林博士與劉宣谷博士撥空參與論文口試，對本篇論文提出許多寶貴的建議，使論文更加完善。

於系上修課三年，感謝系上姜志銘主任、陳天進老師、宋傳欽老師、張宜武老師、符聖珍老師與蔡炎龍老師在課業上對於學生的指導，感謝老師！

感謝碩班同學照誠在實變上對於我的指點，感謝雅慧與琬甯在資格考時對我的幫助，若沒有你們的幫忙我大概很難順利畢業，感謝你們。

感謝勝平學長與政儒學長週末常回來研究室指點，讓研究室充滿了我們歡樂的笑聲，開心一下午。

感謝陳亮、家盛、宣緯、玫芳、盈穎、雅雯、佳緯、虹仲、彥宏總是與我閒話家常，也特別感謝丞偉總是陪我打桌球，並讓我有地方可以住，感謝你！

碩二修習教育學程時，很高興能認識王淑俐老師。王淑俐老師不只在課堂上對於學生傳道授業解惑，私下更時不時關心同學們的生活，讓學生見識到一位教育工作者難能可見的態度，謝謝老師對於學生的指導。同時，在修課期間認識方婕、令婕、宣麟、怡蕙這幾位好夥伴，使得在上課的過程中總是充滿歡笑，與你們一起修課真是一件開心的事情。更感謝師資培育中心的陳玄惠助教，總是讓我在師培中心內“予取予求”，感覺就像是家一樣，給我很大的自由。

感謝來台北後最照顧我的黃叔叔與二舅一家人，把我照顧的無微不至，感謝你們！

感謝在政大三年週末常帶我去基隆釣魚的阿賢大哥與吳大哥，讓我釣了好多軟絲與龍蝦，可以與大家分享，哈哈！也感謝花蓮的釣魚朋友黃老先生、阿山哥、阿順仔與彭大哥，放假回花蓮時能與三五好友一起到海邊甩個幾竿，真是一件快樂的事情。

在此特別感謝張宣苹、張良卉這兩位張氏宗親，有你們的陪伴，讓我在苦悶的研究生生活中充滿了歡樂，與你們兩位在一起相處真的是一件很快樂的事情，認識你們真好！

呼～要謝謝的人好多。最重要的要感謝我的家人，我的爸爸、媽媽、姊姊以及我家可愛的小狗張小乖，還有從小到大帶我去釣魚的 uncle 老任，謝謝你們總是默默的支持我，讓我能無後顧之憂的在政大唸書，完成我的碩士學位。

在此謹將本篇論文，獻給曾經幫助過我的老師、朋友、同學與學弟妹，謝謝你們！

張殷華　謹誌

國立政治大學應用數學系

中華民國一百年六月

最小化風險值之投資組合選擇模型

張殷華

摘　要

被動式管理是指共同基金採用追蹤市場指數或特定標的指數的投資策略，這類型的共同基金近年來廣受投資人的歡迎。其建構方式係從股票市場內選定少數代表性股票種類，希望利用少數股票種類即可代表被追蹤指數的整體績效，使其與被追蹤指數的報酬率的追蹤誤差(tracking error)降至最低。風險值(Value-at-Risk, VaR)是近年來風險控管的新趨勢，是一種衡量與預測風險的指標，用來預測潛在可能的損失預估值。本論文結合指數追蹤與 VaR 之概念，將指數報酬率與投資組合報酬率的偏差視為損益，目標函數為最小化偏差之 VaR，建立一兼具指數追蹤與控管 VaR 的投資組合選擇模型。最後使用台灣股票市場的歷史資料做為實證的資料，用以驗證模型之可行性與效能。實證結果顯示當被追蹤指數呈現盤整震盪與持續下跌趨勢時，本模型所建立之投資組合的表現能有效超越被追蹤指數。

關鍵字：指數追蹤、VaR、混合整數非線性規劃

Portfolio Selection Model Based on Minimizing Value-at-Risk

Yin-Hua Chang

Abstract

Passive management is an investment strategy that a mutual fund is constructed to track the market or benchmark index. This type of mutual fund becomes popular for investors recently. The construction method of this type of mutual fund is to select relative few stocks from the market such that the performance of constructed mutual fund will be as close as the performance of benchmark index by minimizing the tracking error between mutual fund and benchmark. Value-at-Risk (VaR) is a widely used risk measure recently. VaR can be used as standardized risk indicators to predict the potential loss in the future. In this paper, we combine the concepts of index tracking and VaR into our portfolio selection model. The risk (loss) in this model is defined as the difference of index return and portfolio return. We propose a mathematical programming model to construct a portfolio that will both track a given benchmark and minimize the VaR value of loss. The proposed model will be applied in Taiwan's stock market to verify the effective and efficient of the model. The empirical results show that the performance of constructed portfolio is better than the benchmark index when the market is consolidation and bearish.

Key words: index tracking, Value-at-Risk, mixed integer nonlinear program

目　　錄

圖　目　錄

表　目　錄

第一章 緒論

1.1 前言

「你不理財，財不理你。」投資理財已是全民共同關注之議題。善用投資理財，除了能累積財富外，更可實現人生理財目標。藉由不同的管道，涉略各種生財之道，提高投資理財能力；依個人經濟負擔能力進行投資，同時採取適當的保險措施；對於每個人不同的需求，找出最適合自己的投資方式，實為投資理財之上策。

股票市場成立後，除了是許多企業籌資管道之外，亦為一般投資人作為投資理財的一項標的。傳統主動式投資理財觀念當中，如何於股票市場內賺取最多的報酬，一向是投資人關心之焦點。投資單一股票有時獲利驚人，行情有利時能明顯擴大其獲利範圍，但未來的表現不一定如過去績效同樣良好，所謂：「站的越高，跌的越深」。行情不利時單一股票損失跌幅將難以預期。俗話說：「不要將所有雞蛋放在同一個籃子裡」，「分散投資」實為最有效降低投資風險之投資管理策略。

為了改善主動式管理的缺失，近年來，被動式管理觀念孕育而生，ETF (exchange traded funds)股票指數基金逐漸興起，採用追蹤市場指數或標的指數的投資策略，其建構方式係從股票市場內選定少數代表性股票種類，希望利用少數股票種類即可代表被追蹤指數的整體績效，使其與被追蹤指數的報酬率的追蹤誤差(tracking error)降至最低。被動式管理最終目的不在於追求最多的財富，而是穩定的投資報酬，不但可以掌握投資趨勢，省去選擇單一個股的麻煩；更能分散投資風險，降低交易成本，對投資者來說，在不穩定的時代賺取穩定的獲利，實為保守投資人之最佳投資策略。

ETF 複製指數的策略最常見的有三種：完全複製法、代表性複製法、合成複製法。

1. 完全複製法(Fully Replication Method)

完全依照追蹤指數的成份及比重進行投資，當指數成份股變動時，持有股份作相同權重調整。完全複製法的好處在於誤差值最小，追蹤指數效果最佳，但大多數投資人無足夠之資金購買所有股票，且股票太多時買賣交易成本與管理成本會提高。

2. 代表性複製法(Representative Replication Method)

從股票市場中選出一些具代表性的成份股，建立一投資組合來貼近被追蹤指數。此方法選出股票數量較少，可降低交易成本，但與完全複製法相比較容易產生一定程度的追蹤誤差。

3. 合成複製法(Synthetic Replication)

投資組合成份不光只有股票，同時運用衍生性金融商品，如期貨、選擇權…等，同樣達到了追蹤標的指數的效果。

1989 年，加拿大多倫多交易所首先推出指數型商品—多倫多指數參與單位，這是最早具有 ETF 概念的指數商品，但並沒有完善的商品整體設施；1993 年由道富環球投資發行 SPDR S&P 500 為全球第一檔 ETF，在美國證券交易所上市，追蹤 S&P 500 指數，是目前市值最大的 ETF；而台灣第一檔 ETF 亦於民國 92 年 6 月 30 日由寶來投信發行，寶來台灣卓越 50 基金（台灣 50ETF）上市。回顧 ETF 之發展歷史，2000 年前以單一市場、單一國家、產業或區域性 ETF 為主，成份多為股票；2000 年後開始出現債券或期貨商品為標的指數的 ETF，世界各地 ETF 資產規模大幅增加。

自首檔 ETF 發行至今 ETF 已經盛行十餘年，ETF 迷人的魅力在於 ETF 可如同一般股票在證券交易所內進行交易，並可以平盤進行放空動作，作為避險工具之使用。由於 ETF 是一種指數追蹤產品，內含不同產業與股票，與投資單一股票相比，更具有分散投資風險效果，且交易成本比主動式管理手續費或管理費用要來的低廉，大幅降低買賣成本，增加投資利潤。

風險值(Value-at-Risk, VaR)是近年來風險控管的新趨勢，作為衡量與預測風險的標準化指標。國際清算銀行(Bank of International Settlements, BIS)自西元1996年起，已經將VaR 列為衍生性金融產品的必要公告事項。VaR是指在給定的機率範圍（信賴水準β）下，投資組合在持有期間內可能發生的最大損失值。例如，某投資組合在99%的信賴水準下，其VaR為50萬新台幣，則表示預測該投資組合在未來100天內損失超過50萬新台幣的次數最多只有一次。

VaR的實務運用最早是由J.P. Morgan 的前總裁Dennis Weatherstone 要求業務部門於每日交易結束後繳交一份報告，預測該公司在市場行情變動的風險，提供預測公司未來二十四小時之內潛在的損失預估值。我們可根據過去歷史資料或經由模擬，以統計的方式加以預測並計算出VaR。常見的VaR計算方法有變異數—共變異數(variance-covariance method)、歷史模擬法(historical simulation)、蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo simulation)、以及極端值理論(extreme value theory, EVT)，而股票市場常以歷史模擬法當作VaR的主要計算方式。

1.2 研究目的與架構

本論文結合指數追蹤與 VaR 之概念，將觀測期內指數報酬率與投資組合報酬率之偏差視為損益，以最小化偏差值之 VaR 為目標函數，建立一兼具指數追蹤與控管 VaR 的投資組合選擇模型。我們以歷史模擬法算出在給定信賴水準 β 下，各單一股票在觀測期內的 VaR，選取 VaR 最小的前段少數種股票作為投資組合的候選股。在建構投資組合的過程中，採用了 0-1 決策變數，計算指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值超過觀測偏差 VaR 的次數，也加入了交易手續費用的限制式。我們將模型應用在台灣加權股價指數的歷史資料上，用以驗證模型在股票市場中的表現與可行性。

此篇論文的主要架構簡述如下：

第一章為緒論。介紹本篇論文的研究動機與目的，以及內文架構。

第二章為文獻回顧。針對資產配置、指數追蹤與 VaR 的相關文獻，進行統整性的回顧與歸納。

第三章為相關數學模型的探討。本章將延續第二章文獻回顧內所提及的數學規劃模型進行探討。此章分成三部分：第一部分為資產配置選擇問題發展之歷程；第二部分為指數追蹤模型之演進；第三部分則是以 VaR 作為風險測度之相關模型探討。

第四章為建立最小化風險值之投資組合選擇模型。我們將觀測期內指數報酬率與投資組合報酬率之偏差視為損益，以最小化偏差值之 VaR 為目標函數，建立一投資組合選擇模型。同時加上交易手續費用限制，建構調整投資組合的數學規劃模型。

第五章為實證研究的結果與分析。本章以第四章所提出之規劃模型，實際應用於台灣加權股價指數歷史資料上，對模型之最適信賴水準、最適累積偏差容忍值、最適調整週期與模型建構投資組合之成效和表現進行分析與探討。

第六章為結論與建議。針對本文所實際驗證之研究結果作歸納與統整，並提出可供後續研究與改進之建議。

第二章 文獻回顧

現代投資組合理論主要針對在單位風險下，以獲得的最大化報酬為目的來進行資產配置，又稱為主動式管理。在平均值—變異數(mean-variance)風險架構下，投資者將標準差(standard deviation)當作最適合的風險測度，以預測未來可能的獲益與損失。與主動式管理相比，被動式管理則在追求貼近標的指數的績效，追蹤誤差便是一種評估投資組合與指數績效差距的風險評估方式。近年來 VaR 常被用來預測投資組合在持有期間內可能發生的最大損失，是一種新興的下方風險評估方式。

本章針對學者對風險評估的衡量方式，將文獻分成資產配置、指數追蹤與 VaR 三部分來介紹。

2.1 資產配置文獻之回顧

投資組合規劃模型文獻中，最早是由 Markowitz (1952)提出投資組合選擇問題(portfolio selection problem)。Markowitz (1952)要求投資組合至少需超過某個給定的投資報酬率 ρ 下，將報酬率的變異數 σ^2 視為投資風險做為規劃模型內的目標函數，尋找滿足給定投資報酬率且變異數最小的投資組合，此即平均變異數模型(mean-variance model, MV 模型)。此處的風險函數為變異數，是二次函數，故又稱為 L_2 - norm。

許多研究結果發現損益函數往往是非常態分配(non-normal distribution)，往往有不同的偏態(skewness)與峰態(kurtosis)，更進一步來說，許多基金經理人將損失與獲益視為非對稱性的。在財務上利用平均值—變異數策略來選取最佳投資組合，對於似乎已經是不太適合的選擇。因此，財務上需要一套對所有非常態分配損益函數更適合的風險測度評估方式，而出現了像是半變異數(semi-variance)為了單獨測量損失部分建構出的風險測度。

Konno 與 Yamazaki (1991)以 Markowitz (1952)的 MV 模型為基礎，提出了平均絕對偏差模型(mean-absolute deviation model, MAD 模型)，將風險函數定義成為投資組合報酬率的平均絕對偏差(mean-absolute deviation)定為風險，以最小化為目標。由 Konno 與 Yamazaki (1991)所定義的風險函數屬於 L_1 - norm，雖然可以替代 Markowitz (1952)定義之 MV 模型，但仍非一線性規劃模型，但經由引進一組新的變數，可以將原先之非線性轉換為線性規劃模型。此線性規劃模型去除了 MV 模型需計算投資組合變異數矩陣的困擾，大幅降低求解困難度；同時，當投資組合報酬率呈多變量常態分配(multivariate normally distributed)時，L_1 - norm 與 L_2 - norm 有倍數關係。

Speranza (1993)將Konno與Yamazaki (1991)的平均絕對偏差分為上方風險(upside risk)與下方風險(downside risk)，重新定義了半平均絕對值偏差(mean semi-absolute deviation)模型，將上方風險和下方風險分別視為平均報酬率的獲利與損失，並給予不同之權重，建立一權重風險函數 $N(x)$ 。此權重風險函數可提供投資人對風險趨避(risk aversion)、風險中立(risk neutral)、或風險愛好(risk loving)此三種不同風險忍受程度，選擇適當的風險權重。在上方風險與下方風險權重參數為一比一時，權重風險函數 $N(x)$ 與MAD模型相等價。同時Speranza (1993)也發現歷史資料新舊程度對於投資組合的選取會造成不同的結果，因此Speranza (1993)在模型內加入了時間參數，對於觀測資料的新舊，給予不同的時間權重參數 w_t ，同時將投資標的投資報酬率予以加權平均，建立了一個新的時間權重參數模型。研究結果發現，距離觀測時間越近，資產影響投資組合選取程度越大。

為了更符合股票市場交易實務運作，Speranza (1996)考量股票市場實際交易問題，如單位交易成本和最低交易單位限制，建立一整數規劃模型，並實際運用於米蘭股市。該模型內變數皆為整數，並使用0-1變數代表股票的投資與否，為一混合整數線性規劃(mixed integer linear programming, MILP)模型。研究結果顯示只有在候選股票數量低於15至20時才能於合理時間內求解。因此Speranza (1996)發展出一套啟發式算法(heuristic algorithm)。啟發式算法除了可加快求解速度外，當投資金額增加時所求出之解誤差也會減少。

Young (1998)提出大中取小的投資組合選擇法(mini-max portfolio selection)，不同於以往風險測量函數的選擇方式，大中取小法是在給定固定報酬率之下，由歷史資料算出在觀測期間任一投資組合在不同時間的損失，選擇損失為最小的投資組合。由結果得知，當投資標的報酬率呈現常態分配時，大中取小法所建構之線性規劃模型之解近似於 MV 模型最佳解。

朱志達(民 99)利用建構指數基金的方法以及大中取小的概念，建立一超越指數報酬率績效為目標的投資組合選擇模型，在模型中同時考慮實務上交易所需的買賣交易手續費、整數交易單位與資產總類數等限制，為一混合整數非線性規劃問題(mixed integer nonlinear programming, MINLP)。當候選股數量過多時，容易遭遇求解效率不佳甚至無解的情形，因此朱志達(民 99)先從眾多的股票種類中篩選出滿足限制條件的股票當作候選股，再利用已篩選過較少量的股票進行整數規劃求解。

2.2 指數追蹤文獻之回顧

與主動式管理追求超越標的指數的績效相比,被動式管理採取追蹤市場指數或標的指數的投資策略。被動式管理經理人要求投資組合與標的指數的表現要相接近,希望利用少數股票種類即可代表股票市場整體績效,其目的在於縮小投資組合與市場指數或目標指數報酬率誤差。指數追蹤問題在於如何從股票市場中找出數種股票來複製指數的表現,而追蹤誤差就是一種測量投資組合與標的指數彼此間績效的評估方式。

Meade與Salkin (1989)首先定義了 $\varepsilon_1(P)$ 追蹤誤差,是測量投資組合投資報酬率與市場指數報酬率差距的一種函數,希望投資組合的報酬率與市場指數報酬率之間的平方誤差總和為最小。此追蹤誤差與Markowitz (1952)定義之MV模型類似,皆為二次函數,當變數過多時求解會有困難。

莊智祥(民 87)參考 Konno 與 Yamazaki (1993)中對 L_1 - norm 風險函數的觀念,將 Meade 與 Salkin (1989)提出的追蹤誤差重新定義一個新的測度函數 $\varepsilon_2(P)$,將追蹤誤差定義成投資組合之價格與市場指數之價格的絕對偏差,且證明 $\varepsilon_1(P)$ 函數會不大於 $\varepsilon_2(P)$ 函數的固定常數倍。莊智祥(民 87)並引進偏差變數,將目標函數線性化,並考量股票市場實際買賣情形,建構一整數規劃模型。

白惠琪(民 91)以莊智祥(民 87)定義的追蹤誤差為基礎,考量股票市場實際交易情形,如:最小交易量、股票買賣數量為交易單位或最小交易量之整數倍。模型內投資數量皆為整數,提出一混合整數線性規劃問題。當變數過多時,無法求得其最佳解。白惠琪(民 91)應用切面法(cutting-plane method)加入合理不等式,縮小可行解區域後,再根據模型內的對偶問題,發展一套有效率之啟發式演算法,研究結果發現切面法及啟發式演算法對 MILP 求解都有極佳的效率表現。

蘇代利(民 93)以莊智祥(民 87)定義的指數追蹤誤差，與白惠琦(民 91)發展出的啟發式演算法做為建構指數基金的方法，根據過一段時間後的新資料、新數據及目標規劃，來調整指數基金配置，進而達到最小化交易成本目的，探討調整指數基金投資組合的最佳時機。研究結果發現調整投資組合的時間如距離投資組合建立的時間越遠，所支付的交易成本越高；當調整成本小於追蹤誤差時，可考慮調整指數基金的投資組合。

2.3 VaR 文獻之回顧

VaR 是近年來風險控管的新趨勢，作為衡量與預測風險的標準化指標，用以預測未來可能遭遇到的最大損失。VaR 的概念起源於下方風險，因此不論是任何非常態分配的損益函數，我們都可以估計它們的風險值。VaR 是指在給定的信賴水準β下，投資組合在持有期間內可能發生的最大損失值。

Harlow (1991)提出了以下方風險作為測度的函數，將下方偏差動差(lower partial moments, LPMs)定義為低於目標損失(target)與目標損失差距的n階期望值，當n為 1 或 2 時，以最小化下方偏差動差為目標，當投資組合預期期望值不同時，目標函數的下方偏差動差也會有所不同。研究結果顯示，當目標損失越大時，投資於股票市場的比例越大，無風險資產的比例越小，且最佳投資組合的期望值與標準差結果皆比 MV 模型的最佳解要來的出色。

Campbell、Huisman 與 Koedijk (2001)以 VaR 取代變異數當作下方風險，建立了如同夏普指數(Sharp ratio)的規劃模型。Campbell、Huisman 與 Koedijk (2001) 模型中的 VaR 定義為最小獲利值，將投資組合報酬與無風險利率的差距當作獲益，無風險獲利扣除投資組合的 VaR 當作風險，將兩者相除後做為目標函數，以最大化為目標，並實際運用於美國 S&P 500 指數與政府公債上。研究結果顯示此模型求出的解與 MV 模型的解近乎相同。

Benati 與 Rizz (2007)以 Markowitz (1952)的模型做延伸，將 VaR 取代變異數當作風險，提出了一個混和整數線性規劃模型。此模型會導致成為一個 NP-Hard 的問題，但是當觀測時間期數T與資產個數n固定為一常數且該數並不大時，多項式時間演算法(polynomial time algorithms)仍存在。此外，實證結果顯示：觀測時間期數T與資產個數n大而風險值很小時，可在合理時間內求解。

第三章 數學相關模型探討

本章節將針對第二章文獻回顧內所提及之數學規劃模型進行探討，將數學模型分成資產配置、指數追蹤與 VaR 三大類來介紹。第一節為資產配置的數學規劃模型，Markowitz (1952) 所提出的 MV 模型；而後 Konno 與 Yamazaki (1991) 提出 MAD 模型，以及其線性規劃模型與相關模型之延伸；最後則是 Young (1998) 所提出的 mini-max 投資組合模型。第二節為指數追蹤模型，Meade 與 Salkin (1989) 首先定義指數追蹤誤差測量函數；莊智祥（民 87）提出投資組合價格與市場指數之價格的絕對偏差模型與其延伸。第三節則是 VaR 相關模型。Campbell、Huisman 與 Koedijk (2001)以 VaR 當作下方風險，建立了如同夏普指數(Sharp ratio)的規劃模型。Benati 與 Rizz (2007)以 Markowitz (1952)的模型做延伸，將 VaR 取代變異數當作風險，建立一混和整數線性規劃模型。

3.1 資產配置的數學相關模型

投資組合選擇問題主要在探討如何做資產配置，以降低投資風險並獲得最大投資報酬率。Markowitz (1952)所提出的 MV 模型，選定一個投資組合，使得投資報酬率最大化與投資風險最小化。Markowitz 將投資組合內的報酬與風險分別定義為個別資產期望報酬之線性組合，與投資組合報酬率的變異數，其定義如下：

報酬函數： $$\boldsymbol{r(x_1,\ldots,x_n)=E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)=\sum_{i=1}^{n}E(R_i)x_i=\sum_{i=1}^{n}r_i x_i}$$

風險函數：
$$\begin{aligned}L_2(x_1,\ldots,x_n)&=\sigma^2(x_1,\ldots,x_n)\\&=E\left[\sum_{i=1}^{n}R_i x_i-E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)\right]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}x_i x_j\sigma_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\end{aligned}$$

其中為 x_i 第 i 項資產的投資金額，R_i 為隨機變數，表示第 i 項資產的投資報酬率；r_i 表示第 i 項資產的期望報酬率，σ_{ij} 表示資產 i 與資產 j 投資報酬率的共變異數，σ_i^2 則為資產 i 投資報酬率的變異數，亦可表示成為 σ_{ii}。

為了要獲得投資組合的最大報酬與最小的投資風險，Markowitz (1952)要求在給定最小需求投資報酬率 ρ 下，求最小風險的投資組合，此即平均變異數模型(mean-variance model, MV 模型)，其定義如下：

模型 A：Markowitz 的 MV 模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq \rho M_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0$$

$$0 \leq x_i \leq U_i,\ \ i = 1, \cdots, n$$

參數：

n　資產投資總數

σ_{ij}　資產 i 與資產 j 投資報酬率之共變異數

r_i　資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

ρ　最小需求投資報酬率

M_0　投資總額

U_i　資產 i 之投資金額上限

變數：

x_i　資產 i 之投資金額

Markowitz 所提出的 MV 模型，因目標函數內變異數為二次型方程式(quadratic equation)，當變數過多時，會增加求解時間與困難度。

Konno 與 Yamazaki (1991)提出了平均絕對值偏差模型(mean-absolute deviation model, MAD 模型)，將風險函數定義成為投資組合報酬率的平均偏差。

定義 3.1 (Konno 與 Yamazaki，1991) L_1 - norm 風險函數 $w(x)$ 定義如下：

$$w(x) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right|\right]$$

定義 3.2 (Konno 與 Yamazaki，1991) L_2 - norm 風險函數 $\sigma(x)$ 定義如下：

$$\sigma(x) = \sqrt{E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right]^2}$$

定理 3.3 (Konno 與 Yamazaki，1991) 當$(R_1,\ldots,R_n)$呈多元常態分配時，則

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(x)$$

由上述定理得知，當$(R_1,\ldots,R_n)$呈多元常態分配時，$w(x)$與$\sigma(x)$呈現一個固定倍數關係，也就是說最佳化L_1 - norm 與最佳化L_2 - norm 是相等價的。Konno 與 Yamazaki (1991) 的 L_1 - norm 模型定義如下：

模型 B：Konno 與 Yamazaki 的 L_1 - norm 模型

min $\qquad w(x) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right|\right]$

s.t. $\qquad \sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i \ge \rho M_0$

$\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = M_0$

$\qquad 0 \le x_i \le U_i,\ i = 1,\cdots,n$

參數：

n 資產投資總數

ρ 最小需求投資報酬率

M_0 投資總額

U_i 資產 i 之投資金額上限

變數：

x_i 資產 i 之投資金額

由於 Konno 與 Yamazaki (1991)所定義的風險函數 L_1- norm，雖然可以代替 L_2- norm，但仍非一線性規劃模型，在求解上仍有其困難度，仍需要做進一步線性轉換步驟。Konno 與 Yamazaki (1991)引進另外一組新的偏差變數 y_t，經由轉換過程，將 L_1- norm 轉換成等價 MAD 線性規劃模型，其定義如下：

模型 C：Konno 與 Yamazaki 的 MAD 線性規劃模型

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq \rho M_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0$$

$$y_t + \sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \geq 0,\ t = 1, \cdots, T$$

$$y_t - \sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \geq 0,\ t = 1, \cdots, T$$

$$a_{it} = r_{it} - r_i,\ i = 1, \cdots, n,\ t = 1, \cdots, T$$

$$0 \leq x_i \leq U_i,\ i = 1, \cdots, n$$

$$y_t \geq 0,\ t = 1, \cdots, T$$

參數：

T 歷史資料觀測期數

n 資產投資總數

r_i 資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

r_{it}　資產 i 在時間 t 之投資報酬率

ρ　最小需求投資報酬率

M_0　投資總額

U_i　資產 i 之投資金額上限

變數：

x_i　資產 i 之投資金額

y_t　偏差變數

MAD 模型去除了 MV 模型需計算投資組合變異數矩陣的困擾，大幅降低求解困難度，在實務運用上比 MV 模型更具有便利性與實用性。

此外 Konno 與 Yamazaki 提出的 L_1 - norm 風險函數可進一步改寫成為：

$$\begin{aligned} w(x) &= E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right|\right] \\ &= E\left[-\min\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\} + \max\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\}\right] \end{aligned}$$

上式的前項即投資報酬率小於期望報酬率的部份稱之為下方風險(downside risk)，後項即投資報酬率大於期望報酬率的部份稱之為上方風險(upside risk)。對大多數投資人而言，希望上方風險越多越好，相反的，下方風險則是越少越好。在最小化 L_1 - norm 風險函數的過程中，也同時最小化上方風險與下方風險的和。對於投資人忍受風險程度的不同，Speranza (1993)分別給予上方風險與下方風險不同的權重，重新定義了一個新的風險函數：

定義 3.4 (Speranza，1993) 權重風險函數 $N(x)$ 定義如下：

$$N(x) = E\left[-\alpha \min\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\} + \beta \max\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\}\right]$$

其中 α 與 β 表示風險權重，為一實數。

此權重風險函數，可提供投資人對不同的風險忍受程度選擇適當的風險權重。此外 Speranza (1993)也在論文提及權重風險函數 $N(x)$ 與 L_1 - norm 風險函數的關聯性。

定理 3.5 (Speranza，1993) 當 $(R_1,...,R_n)$ 呈多重變異常態分配時，則

$$N(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}\,w(x)$$

由上述定理可知，當 $\alpha=\beta=1$ 時，權重風險函數 $N(x)$ 與 L_1 - norm 風險函數是相同的，亦即在特定條件下，Speranza (1993)所定義的權重風險函數模型和 Konno 與 Yamazaki (1991) 所定義的 MAD 模型是等價的。同時，Speranza (1993) 也發現歷史資料新舊程度對於投資組合的選取會造成不同的結果，因此 Speranza (1993)在模型內加入了時間參數 w_t，對於觀測資料的新舊，給予不同的時間權重參數 w_t，同時將投資標的投資報酬率予以加權平均，建立了一個新的時間權重參數模型，其模型如下：

模型D：Speranza 的時間權重模型

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{T} w_t y_t \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} r_i^{w} x_i \ge \rho M_0 \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = M_0 \\
& y_t + \sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \ge 0,\ \ t=1,\cdots,T \\
& a_{it} = r_{it} - r_i,\ \ i=1,\cdots,n,\ \ t=1,\cdots,T \\
& 0 \le x_i \le U_i,\ \ i=1,\cdots,n \\
& y_t \ge 0,\ \ t=1,\cdots,T \\
& 0 \le w_t \le 1,\ \ t=1,\cdots,T \\
& 0 \le x_i \le U_i,\ \ i=1,\cdots,n
\end{aligned}$$

$$v_t \ge 0,\ \ u_t \ge 0,\ \ t = 1, \cdots, T$$

參數：

T	歷史資料觀測期數
w_t	時間參數
n	資產投資總數
r_{it}	資產 i 在時間 t 之投資報酬率
r_i	資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$
r_i^w	資產 i 在 T 期內的加權平均投資報酬率，即 $r_i^w = \frac{\sum_t w_t r_{it}}{\sum_t w_t}$
ρ	最小需求投資報酬率
M_0	投資總額
U_i	資產 i 之投資金額上限

變數：

x_i	資產 i 之投資金額
y_t	偏差變數

Young (1998)提出大中取小的投資組合選擇法(mini-max portfolio selection)，不同於以往風險測量函數的選擇方式，大中取小法是在給定固定報酬率之下，由歷史資料算出在觀測期間任一投資組合在不同時間的損失，選擇損失為最小的投資組合，此即大中取小選擇法。換言之，若我們計算觀測期間內任一投資組合的報酬率，選擇最小的報酬為最大的投資組合，即小中取大法。Young (1998)的模型如下：

模型 E：Young 的 minimax 大中取小模型

max $\quad m$

s.t. $\quad \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \ge \rho M$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i \geq m, \ t = 1, \cdots, T$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$$

$$x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, n$$

參數：

T　　歷史資料觀測期數

n　　資產投資總數

r_i　　資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

r_{it}　　資產 i 在時間 t 之投資報酬率

ρ　　最小需求投資報酬率

M　　原始資產總額

變數：

m　　投資組合在觀測期間 t 內最小報酬，即 $m = \min \sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i$

x_i　　資產 i 之投資金額

朱志達(民 99)利用建構指數基金的方法以及大中取小的概念，建立一超越指數報酬率為目標的投資組合選擇模型，在模型中同時考慮實務上交易所需的買賣交易手續費、整數交易單位與資產總類數等限制，其模型如下：

模型 F：

min　　$Z = \sum_{t=1}^{T} y_t$

s.t.　　$y_t + (P_t - I_t - \rho) \geq 0, \ t = 1, \cdots, T$

$$P_t = \sum_{j=1}^{N_1} \frac{r_{jt} V_{jT}}{M} x_j, \ t = 1, \cdots, T$$

$$(1 + B) \sum_{j=1}^{N_1} x_j V_{jT} \leq M$$

$$x_j V_{jT} \le \delta^U d_j M , \quad j = 1, \cdots, N_1$$

$$x_j V_{jT} \ge \delta^L d_j M , \quad j = 1, \cdots, N_1$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j \le K^U$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j \ge K^L$$

$$y_t \ge 0 , \quad t = 1, \cdots, T$$

$$x_j \in Z^+ \cup \{0\}, \quad j = 1, \cdots, N_1$$

$$d_j = \{0,1\}, \quad j = 1, \cdots, N_1$$

參數：

P_t	投資組合在時間t的報酬率
I_t	標的指數在時間t的報酬率
ρ	希望超越指數報酬率的常數
N_1	第一步驟選出的股票種類數
r_{jt}	股票 j 在時間t的報酬率
B	買進股票時所需的比例交易費用
V_{jT}	j股票在決策時間T的價格
M	投資人在時間T的總資產
δ^U	單一股票投資比重上限
δ^L	單一股票投資比重下限
K^U	涵蓋股票種類數的上限
K^L	涵蓋股票種類數的下限
T	用來追蹤資料的時間長度

變數：

y_t	負偏差變數
x_j	買進股票 j 之張數，為一整數變數

$$d_j = \begin{cases} 1 & 當\ x_j > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

為了更符合股票市場的走勢，必須對所建立的投資組合做調整。因此朱志達(民 99)考慮股票市場買賣條件，建立調整投資組合的數學規劃模型，其模型如下：

模型 G：

$$\min \quad Z = \sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s.t.} \quad y_t + (P_t - I_t - \rho) \ge 0,\ t = 1, \cdots, T$$

$$P_t = \sum_{j=1}^{N_1} r_{jt} \frac{x_j V_{jT}}{M},\ t = 1, \cdots, T$$

$$x_j V_{jT} \le \delta^U d_j M,\ j = 1, \cdots, N_1$$

$$x_j V_{jT} \ge \delta^L d_j M,\ j = 1, \cdots, N_1$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j \le K^U$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j \ge K^L$$

$$\tilde{x}_j + b_j - s_j = x_j,\ j = 1, \cdots, N_1$$

$$b_j \times s_j = 0,\ j = 1, \cdots, N_1$$

$$B \sum_{j=1}^{N_1} b_j V_{jT} + S \sum_{j=1}^{N_1} s_j V_{jT} + \sum_{j=1}^{N_1} x_j V_{jT} \le M$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{x}_j V_{jT} + R = M$$

$$y_t \ge 0,\ t = 1, \cdots, T$$

$$x_j, b_j, s_j \in Z^+ \cup \{0\},\ j = 1, \cdots, N_1$$

$$d_j = \{0,1\},\ j = 1, \cdots, N_1$$

參數：

P_t　投資組合在時間 t 的報酬率

I_t　標的指數在時間 t 的報酬率

ρ　希望超越標的指數報酬率的常數

N_1　第一步驟選出的股票種類數

r_{jt}　股票 j 在時間 t 的報酬率

B　買進股票時所需的比例交易費用

S　賣出股票時所需的比例交易費用

V_{jT}　j 股票在決策時間 T 的價格

M　投資人在時間 T 的總資產

$\tilde{x}_j$　未調整前持有股票 j 的張數

R　上一期交易後剩下的現金

δ^U　單一股票投資比重上限

δ^L　單一股票投資比重下限

K^U　涵蓋股票種類數的上限

K^L　涵蓋股票種類數的下限

T　用來追蹤資料的時間長度

變數：

y_t　負偏差變數

x_j　調整後持有股票 j 之張數

b_j　買進股票 j 之張數

s_j　賣出股票 j 之張數

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_j > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

3.2 指數追蹤的數學相關模型

指數追蹤是指選定一個投資組合，希望利用少數股票價格變動，即可代表股票市場整體績效，使其與市場指數或指數報酬率追蹤誤差降至最低。亦即能「複製」標的指數，使投資人得以獲取該指數之報酬率，縮小投資組合與市場指數或目標指數報酬率誤差。指數追蹤問題在於如何從股票市場中找出數種股票來複製指數的表現，而追蹤誤差就是一種測量投資組合與標的指數彼此間績效的評估方式。其追蹤效果的好壞程度以追蹤誤差當作測量準則，傳統追蹤誤差的定義方式如下:

定義 3.6 (Meade 與 Salkin，1989) 追蹤誤差 $\varepsilon_1 : R^n \to R$ 是測量投資組合 P 投資報酬率與市場指數報酬率差距的一種函數。令 R_t^I 與 R_t^V 分別代表市場指數與投資組合在第 t 期的報酬率，則傳統追蹤誤差之定義為：

$$\varepsilon_1(P) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} (R_t^V - R_t^I)^2}$$

其中，$R_t^I = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$，$R_t^V = \dfrac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$，$I_t$ 和 V_t 分別代表市場指數和投資組合在第 t 期的價格。

莊智祥(民 87)參考 Konno 與 Yamazaki (1993)文中對 L_1 - norm 風險函數的觀念，提出一個新的測度方法 $\varepsilon_2(P)$，用來衡量追蹤指數的誤差，其定義如下：

定義 3.7(莊智祥，民 87) 令 $p_{it} \in R$，$x_i \in N \cup \{0\}$，p_{it} 和 x_i 分別表示股票 i 在時間 t 的價格及股票 i 的購買數量。則追蹤誤差為：

$$\varepsilon_2(P) = \sum_{t=1}^{T} |V_t - I_t| = \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i - I_t \right|$$

由定義 3.7 可知，莊智祥(民 87)將 $\varepsilon_2(P)$ 定義為投資組合之價格與市場指數之價格的絕對偏差，使用目標規劃的技巧，將絕對值函數轉換成線性函數，以方

便求解。莊智祥(民 87)並探討$\varepsilon_1(P)$與$\varepsilon_2(P)$兩函數間的關聯性。

定理 3.8（莊智祥，民 87）對任一投資組合P為指數基金建構模型中之一可行解(feasible solution)，且$\varepsilon_2(P)\le\delta$，$\delta\in R^+$，則

$$\varepsilon_1(P)\le K\varepsilon_2(P)$$

其中$K=\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}^2}$, $I_{\max}=\max\limits_{1\le t\le T}\{I_t\}$, $I_{\min}=\min\limits_{1\le t\le T}\{I_t,V_t\}$

莊智祥(民 87)考量股票市場實際買賣情形,設定股票i的買賣張數為正整數或 0，y_i表示購買股票i與否的二元變數，其目標為最小化追蹤誤差，建構一整數規劃模型，其模型描述如下：

模型 H：

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}p_{it}x_i-I_t\right|$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}y_i\le N_0$$

$$x_i\le M_iy_i,\ i=1,\cdots,n$$

$$x_i\in Z^+\bigcup\{0\},\ \ y_i\in\{0,1\},\ i=1,\cdots,n$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

I_t　市場指數在時間t的價值

p_{it}　股票i在時間t之價格

N_0　投資組合所選取股票總數之上限

M_i　表一正數，即$M_i=\dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}}\times w_i$，$w_i$為股票$i$之投資權重

變數：

x_i　股票 i 的購買數量

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

莊智祥(民 87)引進偏差變數 d_t^+ 與 d_t^-，分別代表在時間 t 指數基金的投資組合與市場指數價值的正負偏差，將目標函數線性化，其轉換後的目標規劃模型如下：

模型Ⅰ：

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it}x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t,\ \ t = 1,\cdots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0$$

$$x_i \le M_i y_i,\ \ i = 1,\cdots,n$$

$$x_i \in Z^+ \cup \{0\},\ \ y_i \in \{0,1\},\ i = 1,\cdots,n$$

$$d_t^+ \ge 0,\ d_t^- \ge 0,\ \ t = 1,\cdots,T$$

參數：

T 歷史資料觀測期數

n 股票投資總數

I_t 市場指數在時間 t 的價值

p_{it} 股票 i 在時間 t 之價格

N_0 投資組合所選取股票總數之上限

M_i 表一正數，即 $M_i = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}} \times w_i$，$w_i$ 為股票 i 之投資權重

變數：

x_i 股票 i 的購買數量

d_t^+ 在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之正偏差

d_t^- 在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之負偏差

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由於 MILP 問題求解較為困難，白惠琦(民 91)為了加快上述 MILP 模型之求解速度，提出了一套有效率的啟發式演算法。假設已知一組 y_i 解，則模型 I 可改寫成下列模型：

模型 J：

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^{T} (d_t^+ + d_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t,\ \ t = 1, \cdots, T \tag{3.1}$$

$$x_i \le M_i,\ i \in N_1 \tag{3.2}$$

$$x_i \in N \cup \{0\},\ i \in N_1$$

$$d_t^+ \ge 0,\ d_t^- \ge 0,\ t = 1, \cdots, T$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

I_t　市場指數在時間 t 的價值

p_{it}　股票 i 在時間 t 之價格

M_i　表一正數，即 $M_i = \dfrac{\max_t \{I_t\}}{\min_t \{p_{it}\}} \times w_i$，$w_i$ 為股票 i 之投資權重

N_1　已知投資股票之集合，即 $N_1 = \{ i \mid y_i = 1,\ i = 1, \cdots, n \} \subseteq N$

變數：

x_i　股票 i 的購買數量

d_t^+　在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之正偏差

d_t^-　在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之負偏差

令 λ_t 與 δ_i 分別為對應限制式(3.1)與(3.2)的對偶乘子(dual multiplier)，其轉換後之對偶模型如下：

模型K：

$$\max \quad W=\sum_{t=1}^{T} I_t\lambda_t-\sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^{T} p_{it}\lambda_t-\delta_i\le 0,\ \ i\in N_1$$

$$|\lambda_t|\le 1,\ t=1,\cdots,T$$

λ_t 不限正負值, $t=1,\cdots,T$

$$\delta_i\ge 0,\ i\in N_1$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

I_t　市場指數在時間 t 的價值

p_{it}　股票 i 在時間 t 之價格

M_i　表一正數，即 $M_i=\dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}}\times w_i$ ，w_i 為股票 i 之投資權重

N_1　已知投資股票之集合，即 $N_1=\{i\mid y_i=1,\ i=1,\cdots,n\}\subseteq N$

變數：

λ_t　限制式(3.1)的對偶乘子

δ_i　限制式(3.2)的對偶乘子

白惠琦(民 91)使用切平面法，加入合理不等式以縮小其解集合空間，進而提高求解速率。接著將局部放鬆所求得之實數解調整為合理之整數解，此演算法稱之為啟發式演算法。

蘇代利(民 93)以莊智祥(民 87)定義的指數追蹤誤差，與白惠琦(民 91)發展出的啟發式演算法做為建構指數基金的方法，再以最小化交易成本的概念，根據過一段時間後的新資料、新數據及目標規劃，來調整指數基金配置，進而達到交易成本最小化的目的，其模型如下：

模型 L：

$$\min \quad C(x-x^0)=\sum_{i=1}^{n}k_i^+\cdot\left|x_i-x_i^0\right|_+ +\sum_{i=1}^{n}k_i^-\cdot\left|x_i-x_i^0\right|_-$$

$$\text{s.t.} \quad Z=\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)\le Z^0\cdot(1+\delta)$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_{it}x_i+d_t^- - d_t^+ = I_t,\ \ t=1,\cdots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\le N_0$$

$$x_i\le M_i y_i,\ \ i=1,\cdots,n$$

$$x_i\in Z^+\cup\{0\},\ \ y_i\in\{0,1\},\ \ i=1,\cdots,n$$

$$d_t^+\ge 0,\ d_t^-\ge 0,\ \ t=1,\cdots,T$$

$$|a|_+ = |\max\{a,0\}|,\quad |a|_- = |\min\{a,0\}|$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

k_i^+　買進每單位股票 i 的交易成本

k_i^-　賣出每單位股票 i 的交易成本

x_i^0　原投資組合中，股票 i 的投資金額

Z^0　原指數基金投資組合所具有的追蹤誤差值

δ　投資者所能容忍的誤差程度，$\delta=\dfrac{Z-Z^0}{Z^0}$

I_t　市場指數在時間 t 的價值

p_{it}　股票 i 在時間 t 之價格

N_0　投資組合所選取股票總數之上限

M_i　表一正數，即 $M_i = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}} \times w_i$，$w_i$ 為股票 i 之投資權重

變數：

x_i　股票 i 的購買數量

d_t^+　在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之正偏差

d_t^-　在時間 t 時投資組合價值與市場指數價值之負偏差

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由於此模型之目標函數並不是線性函數，蘇代利(民 93)引進一組變數 u_i、v_i，使得

$$|x - x_i| = u_i + v_i,\ \ x - x_i = u_i - v_i,\ \ u_i、v_i \geq 0,\ \ u_i v_i = 0$$

其中 $u_i v_i = 0,\ i = 1, \cdots, n$ 為互補限制式(complementarity constraints)，消去後可得下述 MILP 模型：

模型M：

$$\min \quad C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ u_i + \sum_{i=1}^{n} k_i^- v_i$$

$$\text{s.t.} \quad Z = \sum_{t=1}^{T} (d_t^+ + d_t^-) \leq Z^0 \cdot (1 + \delta)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t,\ \ t = 1, \cdots, T$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq N_0$$

$$x_i \leq M_i y_i,\ i = 1, \cdots, n$$

$$x_i - x_i^0 = u_i - v_i,\ \ i = 1, \cdots, n$$

$$x_i \in Z^+ \bigcup \{0\},\ y_i \in \{0,1\},\ i = 1, \cdots, n$$

$$d_t^+ \geq 0,\ d_t^- \geq 0,\ \ t = 1, \cdots, T$$

$$u_i \geq 0,\ v_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, n$$

參數：

T　　歷史資料觀測期數

n　　股票投資總數

k_i^+　　買進每單位股票i的交易成本

k_i^-　　賣出每單位股票i的交易成本

x_i^0　　原投資組合中，股票i的投資金額

Z^0　　原指數基金投資組合所具有的追蹤誤差值

δ　　投資者所能容忍的誤差程度，即$\delta = \dfrac{Z - Z^0}{Z^0}$

I_t　　市場指數在時間t的價值

p_{it}　　股票i在時間t之價格

N_0　　投資組合所選取股票總數之上限

M_i　　表一正數，即$M_i = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}} \times w_i$，$w_i$為股票$i$之投資權重

變數：

x_i　　股票 i 的購買數量

d_t^+　　在時間t時投資組合價值與市場指數價值之正偏差

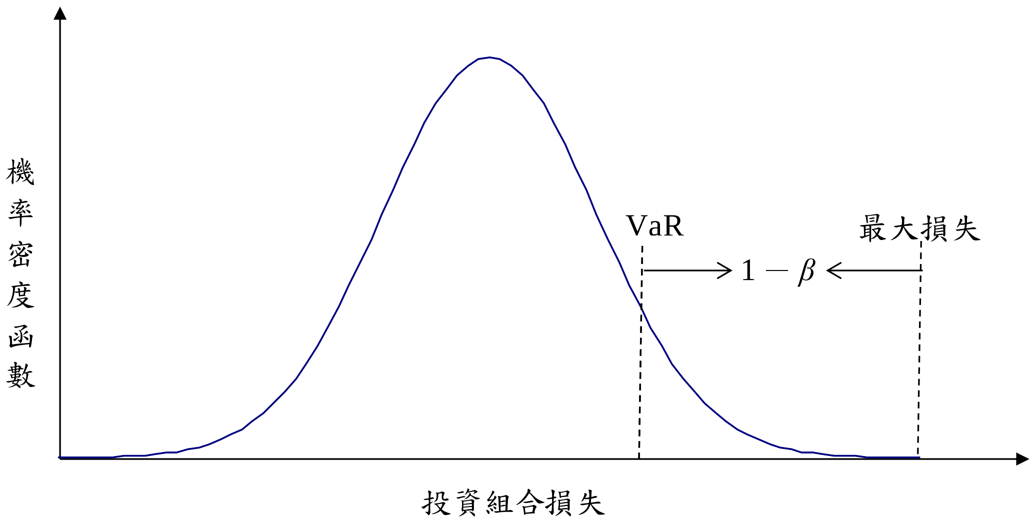
d_t^-　　在時間t時投資組合價值與市場指數價值之負偏差

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

3.3 VaR 的數學相關模型

VaR 除了可視為未來可能遭受到的最大損失外，亦可視為未來可能得到之最低獲利。在條件限制下，VaR 函數具有非凸集(nonconvex)、非平滑(nonsmooth)、與多重相對極值(multi-extremum)的特性，造成求解上之困難。到目前為止，研究學者仍無法發展出一套有效率求出 VaR 的演算法。

我們令 X 表示投資組合未來的報酬，為一隨機變數，令 $f_X(\cdot)$ 為 X 的機率密度函數，$F_X(\cdot)$ 表示 X 的累積分配函數，則該投資組合對應信賴水準 β 的 VaR，定義為該累積分配函數累積機率為 β 時，相對應 X 的值。



定義 3.9 (Jorion，1997) 令 $\beta \in (0,1)$，則 X 相對應信賴水準 β 的 VaR 定義為：

$$\mathrm{VaR}_{\beta}(X) = \inf\{\, x \mid F_X(\cdot) \ge \beta \,\}$$

如果 $F_X(\cdot)$ 為一連續且嚴格遞增函數，則 $\mathrm{VaR}_{\beta}(X) = F_X^{-1}(\beta)$。

舉例來說，假設給定信賴水準 β 為95%，表示投資組合未來可能發生損失不超過 $\mathrm{VaR}_{\beta}(X)$ 的機會為95%，投資組合未來損失超過 $\mathrm{VaR}_{\beta}(X)$ 的機會為5%。

Campbell、Huisman 與 Koedijk (2001)以 VaR 取代變異數當作下方風險，建立了如同夏普指數(Sharp ratio)的規劃模型，以最大化為目標。其模型如下：

模型 N：

$$\max \quad S_p = \frac{r_p - r_f}{\varphi(c,p)}$$

$$\text{s.t.} \quad W_0 + B = \sum_{i=1}^{n} x_i P_{i0}$$

$$\Pr\{W_0 - W(T,p) \geq \mathrm{VaR}^*\} \leq (1-c)$$

$$E(W(\mathrm{T},p)) = (W_0 + B)(1 + r_p) - B(1 + r_f)$$

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$$

$$\varphi(c,p) = W_0 r_f - \mathrm{VaR}(c,p)$$

$$B = \frac{W_0(\mathrm{VaR}^* - \mathrm{VaR}(c,p'))}{\varphi(c,p')}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, n$$

參數：

n 資產投資總數

r_f 無風險利率

c 給定信賴水準

r_i 資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

p_{it} 資產 i 在時間 t 之價格

B 無風險資金

W_0 原始投資總額

P_{i0} 資產 i 的原始價格

VaR^* 原本投資組合的 VaR 值

$\mathrm{VaR}(c,p)$　投資組合 p 在定信賴水準 c 下的 VaR 值

變數：

$W(T,p)$　投資組合 p 最後的總額

x_i　資產 i 投資權重

r_p　投資組合報酬率

Benati 與 Rizz (2007)以 Markowitz (1952)的模型做延伸，將 VaR 取代變異數當作風險，提出了一個混和整數線性規劃模型。

模型O：

$$\max \quad \sum_{t=1}^{T} p_t x_t$$

$$\text{s.t.} \quad x_t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_{it},\ t=1,\cdots,T$$

$$x_t \ge r^{\min} + (r^{\mathrm{VaR}} - r^{\min}) y_t,\ t=1,\cdots,T$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t (1-y_t) \le \alpha^{\mathrm{VaR}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$y_t \in \{0,1\},\ t=1,\cdots,T$$

$$\lambda_i \ge 0,\ i=1,\cdots,n$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

x_t　投資組合在時間 t 之報酬率

r_{it}　資產 i 在時間 t 之投資報酬率

r_i　資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

$r^{\min}$　每期投資組合最低報酬率，即 $r^{\min} = -100\%$

α^{VaR}　投資組合之信賴水準

p_t　投資組合在時間 t 之報酬率發生的機率

變數：

r^{VaR}　投資組合之風險值

λ_i　資產 i 的投資權重

$$y_t = \begin{cases} 0 & \text{當 } x_t < r^{\text{VaR}} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

除了考慮固定風險下求最大報酬，同時也可仿 Markowitz (1952)的模型，在固定期望報酬下，求最小風險，因此，Benati 與 Rizz(2007)同時提出了另一個新的混合整數線性規劃模型：

模型 P：

$$\begin{aligned}
\min \quad & r^{\text{VaR}} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t x_t \ge r^* \\
& x_t = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i r_{it},\ t = 1, \cdots, T \\
& x_t \ge r^{\min} + (r^{\text{VaR}} - r^{\min}) y_t,\ t = 1, \cdots, T \\
& \sum_{t=1}^{T} p_t (1 - y_t) \le \alpha^{\text{VaR}} \\
& \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \\
& y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \cdots, T \\
& \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　股票投資總數

r^*　最小需求投資報酬率

x_t　投資組合在時間 t 之報酬率

r_{it}　資產 i 在時間 t 之投資報酬率

r_i　資產 i 之期望報酬率，即 $r_i = E(R_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$

$r^{\min}$　每期投資組合最低報酬率，即 $r^{\min} = -100\%$

α^{VaR}　投資組合之信賴水準

p_t　投資組合在時間 t 之報酬率發生的機率

變數：

r^{VaR}　投資組合之風險值

λ_i　資產 i 的投資權重

$$y_t = \begin{cases} 0 & \text{當 } x_t < r^{\mathrm{VaR}} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

第四章 建立最小化風險值之投資組合選擇模型

ETF 指數基金是投資選擇的新選項之一，藉由挑選少數代表性股票，即可達到追蹤標的指數報酬率之效果；而 VaR 可視為衡量與預測風險的標準化指標，做為預估投資組合未來可能發生的損失。本章節中，將標的指數報酬率與投資組合報酬率之偏差視為損益，使用 VaR 的概念，預估投資組合未來報酬率低於標的指數報酬率的最大可能值，以最小化偏差 VaR 為目標，建構一最佳投資組合模型。當變數與限制式過多時，求最佳解時常有效率不佳或無法求出可行解的情況，因此我們首先減少建立投資組合時的候選股。在給定信賴水準β下，首先計算在觀測期T內各單一股票的 VaR，選取 VaR 最小的前段少數種股票作為投資組合的候選股當成模型的輸入資料，藉以求出最佳投資組合。

4.1 最小化風險值之投資組合選擇模型

我們考慮投資組合$x=(x_1,\cdots,x_n)$，其中x_i表示股票i的投資金額。股票i與標的指數I在時間t的投資報酬率r_{it}與I_t分別定義為：

$$r_{it}=\frac{p_{it}-p_{i,t-1}}{p_{i,t-1}}$$

$$I_t=\frac{i_t-i_{t-1}}{i_{t-1}}$$

其中p_{it}表示股票i在時間t的價格，i_t表示指數在時間t的觀測值，我們可以根據上述定義來表示投資組合x在時間t的投資報酬率R_t：

$$R_t=\sum_{i=1}^{n} r_{it}\frac{x_i}{W}$$

W表示可使用的資金總額。我們將為指數報酬率與投資組合報酬率的偏差值I_t-R_t視為損益，當I_t-R_t值為正時，表示在時間t時指數報酬率比投資組合報酬率要來的好；當I_t-R_t值為負時，表示在時間t時投資組合報酬率比指數報酬率要來的出色。我們從股票市場中，選出少數股票種類構成投資組合，計算觀測

期T內偏差 VaR，因此得到以下限制式：

$$I_t - R_t \le (r^{\mathrm{VaR}} - r^{\max}) \cdot d_t + r^{\max}$$

此處$r^{\max}$表示指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值的最大值，r^{VaR}為偏差 VaR。上式可解釋成找到一組投資組合，在觀測期T內當偏差值小於偏差 VaR 時，d_t值為 1，當偏差值大於偏差 VaR 時，d_t值為 0，在此d_t為 0-1 變數。在給定信賴水準β下，觀測測期T內偏差值大於偏差 VaR 發生的次數不可超過$T \cdot (1-\beta)$次，因此，我們又有底下的限制式：

$$\sum_{t=1}^{T} (1 - d_t) \le T \cdot (1 - \beta)$$

累積偏差值越大，表示投資組合的獲利越低；累積偏差值越小，表示投資組合的獲利越高。為了控制損失，在此我們要求在觀測期T內指數報酬率與投資組合報酬率的累積偏差值要在某個範圍之內，因此得到下式：

$$\sum_{t=1}^{T} (I_t - R_t) \le \rho$$

其中ρ為指數報酬率與投資組合報酬率的累積偏差容忍值，表示在觀測期T內累積的損失不可超過ρ。除此之外也要考慮購買股票的交易費用，交易費用金額與投資股票總額之和不可超過可使用的資金總額，因此有底下限制式：

$$(1 + B) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \le W$$

B表示購買股票時所需要之交易手續費比例，同時，我們允許不把所有資金投入股票市場，將剩餘現金m視為投資組合的一部分，關係式如下：

$$m = W - (1 + B) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$0 \le m \le \lambda \cdot W$$

λ為可存放於銀行現金之最大比例。在建立投資組合時，為了符合分散投資以降低風險的原則，也限制了單一股票投資比例限制：

$$0 \le x_i \le \delta \cdot W$$

其中δ為單一股票可投資現金的最大比例，同時股票禁止放空。根據以上關係式，我們希望在觀測期內偏差值函數的 VaR 為最小，所建立出之規劃模型如下：

<模型一>

$$\min \quad r^{\text{VaR}}$$

$$\text{s.t.} \quad R_t = \sum_{i=1}^{n} r_{it} \frac{x_i}{W},\ t = 1, \cdots, T \tag{4.1}$$

$$I_t - R_t \le (r^{\text{VaR}} - r^{\max}) \cdot d_t + r^{\max},\ t = 1, \cdots, T \tag{4.2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} (1 - d_t) \le T \cdot (1 - \beta) \tag{4.3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} (I_t - R_t) \le \rho \tag{4.4}$$

$$(1 + B) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \le W \tag{4.5}$$

$$m = W - (1 + B) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.6}$$

$$0 \le m \le \lambda \cdot W \tag{4.7}$$

$$d_t \in \{0,1\},\ t = 1, \cdots, T \tag{4.8}$$

$$0 \le x_i \le \delta \cdot W,\ i = 1, \cdots, n \tag{4.9}$$

$$r^{\text{VaR}} \in R \tag{4.10}$$

參數：

T　歷史資料觀測期數

n　候選股票總數

I_t　指數在時間 t 的報酬率

ρ　指數報酬率與投資組合報酬率的累積偏差容忍值

r_{it}　股票 i 在時間 t 之投資報酬率

$r^{\max}$　指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值的最大值

β　信賴水準

W　可使用的資金總額

δ　單一股票可投資現金的最大比例

B　買進股票的交易費用比例

λ　可存放於銀行現金之最大比例

變數：

R_t　投資組合在時間 t 的投資報酬率

r^{VaR}　指數報酬率與投資組合報酬率之偏差 VaR

x_i　股票 i 的投資金額

m　剩餘現金

$$d_t = \begin{cases} 0 & \text{當 } I_t - R_t > r^{\text{VaR}} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

4.2 調整投資組合的數學規劃模型

由於股票市場瞬息萬變，一開始建立的投資組合，隨著建立的時間變長，其報酬率可能與標的指數報酬率差距有擴大的趨勢，這時就必須經由調整投資組合的成份與比重，使投資組合能再度滿足指數追蹤及 VaR 最小的需求。

調整投資組合的數學規劃模型如同模型一，首先，在給定信賴水準 β 下，先計算各股票在觀測期 T 內各股票的 VaR，選取 VaR 最小的前段少數種股票作為投資組合的候選股，並從這些股票中，建立投資組合使得在觀測期 T 內投資組合報酬率與指數報酬率偏差值的 VaR 為最小。經過一段時間後，重新調整投資組合各股票的投資金額。假設 $\hat{x}_i$ 表示股票 i 在調整前的資產金額，在新的投資組合當中，因投資比重重新調整，股票 i 的投資金額可能與前一期所累積下來的金額會有所不同，因此股票 i 新的投資金額與調整前資產金額會有以下關係：

$$\hat{x}_i + b_i - s_i = x_i,\ \ i = 1, \cdots, n \tag{4.11}$$

x_i 為新投資組合中股票 i 的投資金額，b_i 表示股票 i 在新一期需多投入的資金總額，s_i 表示股票 i 在新一期減少的投資金額。在正常的情況下，投資人對單一股票不會同時進行買進與賣出的動作，所以 b_i 與 s_i 有以下關係：

$$b_i \times s_i = 0 \tag{4.12}$$

買進與賣出的交易手續費比例也不相同，調整後投資組合的資產總額與手續費用

總和必須小於或等於未調整前的總資產，因此有底下關係式：

$$B\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i+S\cdot\sum_{i=1}^{n}s_i+\sum_{i=1}^{n}x_i\le W \tag{4.13}$$

其中 B 為買進股票的交易費用比例，S 為賣出股票的交易費用比例，W 為當時股票總資產加上前期存放於銀行之現金，根據上敘限制式，我們建立調整的數學規劃模型如下：

<模型二>

min $\quad r^{\text{VaR}}$

s.t.

$$R_t=\sum_{i=1}^{n}r_{it}\frac{x_i}{W},\ t=1,\cdots,T \tag{4.1}$$

$$I_t-R_t\le(r^{\text{VaR}}-r^{\max})\cdot d_t+r^{\max},\ t=1,\cdots,T \tag{4.2}$$

$$\sum_{t=1}^{T}(1-d_t)\le T\cdot(1-\beta) \tag{4.3}$$

$$\sum_{t=1}^{T}(I_t-R_t)\le\rho \tag{4.4}$$

$$\hat{x}_i+b_i-s_i=x_i,\ i=1,\cdots,n \tag{4.11}$$

$$b_i\times s_i=0,\ i=1,\cdots,n \tag{4.12}$$

$$B\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i+S\cdot\sum_{i=1}^{n}s_i+\sum_{i=1}^{n}x_i\le W \tag{4.13}$$

$$m=W-(B\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i+S\cdot\sum_{i=1}^{n}s_i+\sum_{i=1}^{n}x_i) \tag{4.14}$$

$$0\le m\le\lambda\cdot W \tag{4.7}$$

$$d_t\in\{0,1\},\ t=1,\cdots,T \tag{4.8}$$

$$0\le x_i\le\delta\cdot W,\ i=1,\cdots,n \tag{4.9}$$

$$r^{\text{VaR}}\in R \tag{4.10}$$

參數：

T 歷史資料觀測期數

n 候選股票總數

I_t 指數在時間 t 的報酬率

ρ 指數報酬率與投資組合報酬率的累積偏差容忍值

r_{it} 股票 i 在時間 t 之投資報酬率

$r^{\max}$ 指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值的最大值

β 信賴水準

W 在時間 T 的資產總額

$\hat{x}$ 調整前股票 i 的資金總額

δ 單一股票可投資現金的最大比例

B 買進股票的交易費用比例

S 賣出股票的交易費用比例

λ 可存放於銀行現金之最大比例

變數：

R_t 投資組合在時間 t 的投資報酬率

r^{VaR} 指數報酬率與投資組合報酬率之偏差 VaR

x_i 調整後股票 i 的投資金額

b_i 調整後股票 i 增加的投資金額

s_i 調整後股票 i 減少的投資金額

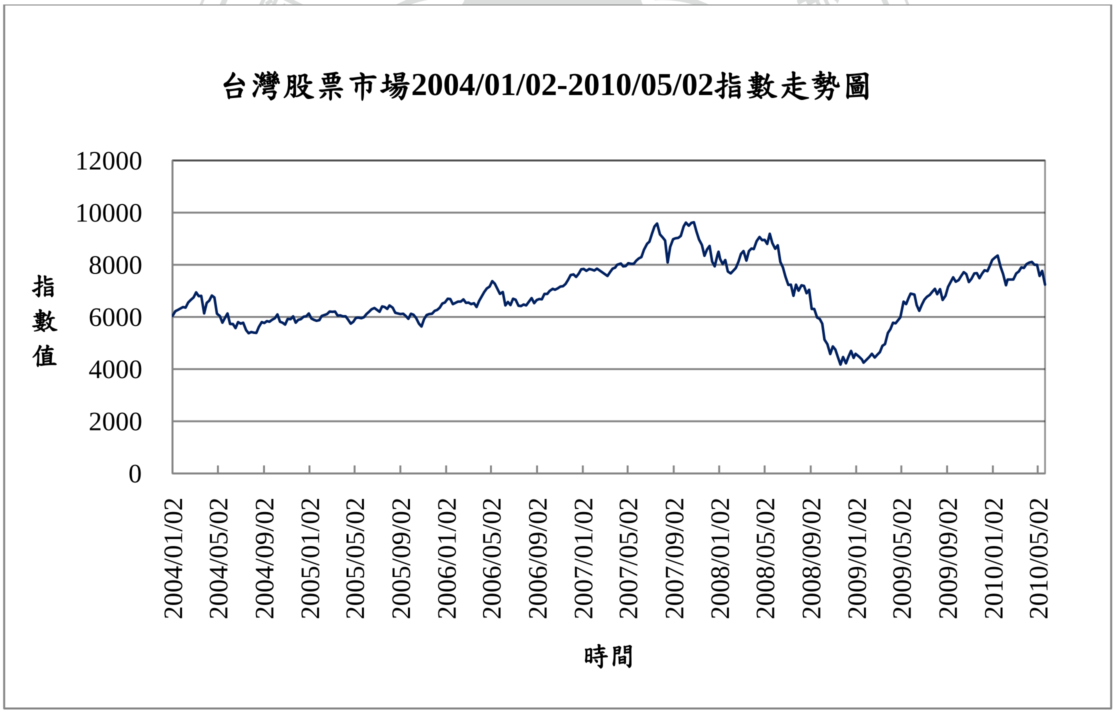
m 剩餘現金

$$d_t = \begin{cases} 0 & \text{當 } I_t - R_t > r^{\mathrm{VaR}} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

由於變數與限制式過多時，求 VaR 最佳解常有效率不佳或無法求出可行解的情況，因此我們首先減少要選取投資組合的候選股。在給定信賴水準 β 下，首先計算各股票在觀測期 T 內各股票的 VaR，選取 VaR 最小的前數種股票作為投資組合的候選股後，使用模型一與模型二建立與調整投資組合。

第五章 實證研究

本論文以台灣股票市場為實證研究的對象，採用台灣發行量加權股價指數做為標的指數，用以驗證模型之可行性與有效性。在發行量加權股價指數資料上，我們使用朱志達(民 99)相同的研究資料，資料內包含摩台指、台灣 50 及寶來與富邦證券發行的 ETF 中 173 家股票資料當作投資標的，這些候選股在市值、公眾流通量與流動性均通過嚴格的篩選程序。朱志達(民 99)使用資料的樣本時間段為 2004/01/01~2010/05/27 共 329 週除權息調整後週資料，資料來源取自於 TEJ 台灣經濟新報資料庫；因樣本時間段較長，在 173 家成分股中有 11 家投資標的於 2004/01/01 尚未上市，刪除 11 家後選擇其中 162 家股票當作投資組合內的投資標的，列於附表一：



圖一　台灣股票市場指數走勢圖

由圖一可知，在樣本期間內指數呈現大幅上漲，持續下跌與盤整震盪的走勢。我們選擇於樣本時間內其中三個時段作為我們驗證模型的時間段，資料起訖如下：

T1：2004/08/16~2005/10/21 在此時間段內指數呈現盤整震盪趨勢。

T2：2008/05/16~2008/11/21 在此時間段內指數呈現大幅度下跌趨勢。

T3：2009/01/21~2010/01/15 在此時間段內指數呈現大幅度上漲趨勢。

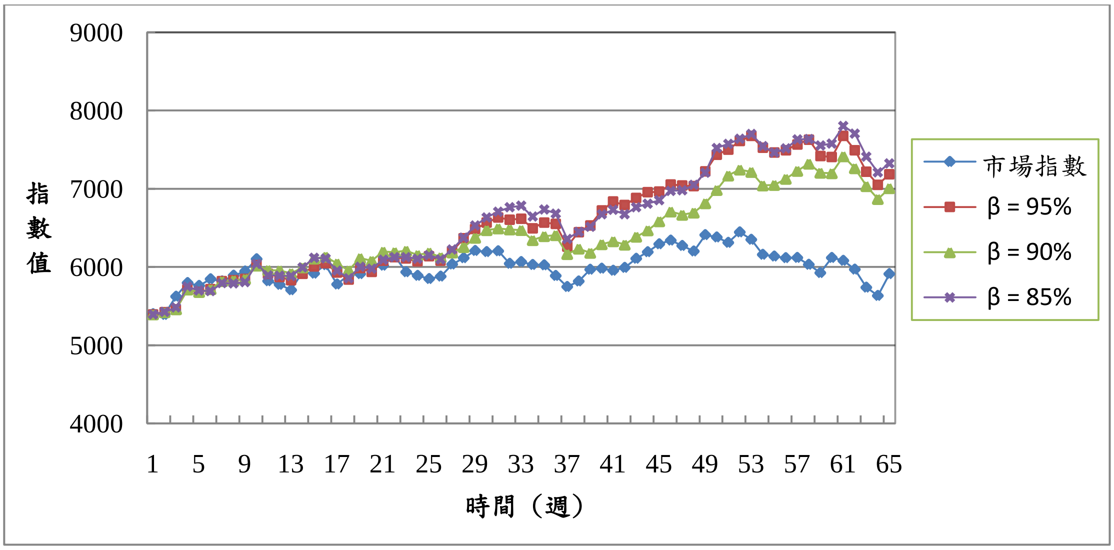
實證研究分為底下四部分：

1. 檢測模型最適信賴水準 β。
2. 檢測模型最適累積偏差報酬率容忍值 ρ。
3. 檢測模型最適調整週期。
4. 驗證模型於三個時間段之成效與表現。

本論文實證研究於 Intel Core Duo CPU i5 2.40GHz 的筆記型電腦下進行，並利用 GAMS (Brooke, Kendrick, and Meeraus，1988)軟體中的 DICOPT 模組求出規劃模型之解，所得驗證結果與討論分析如下：

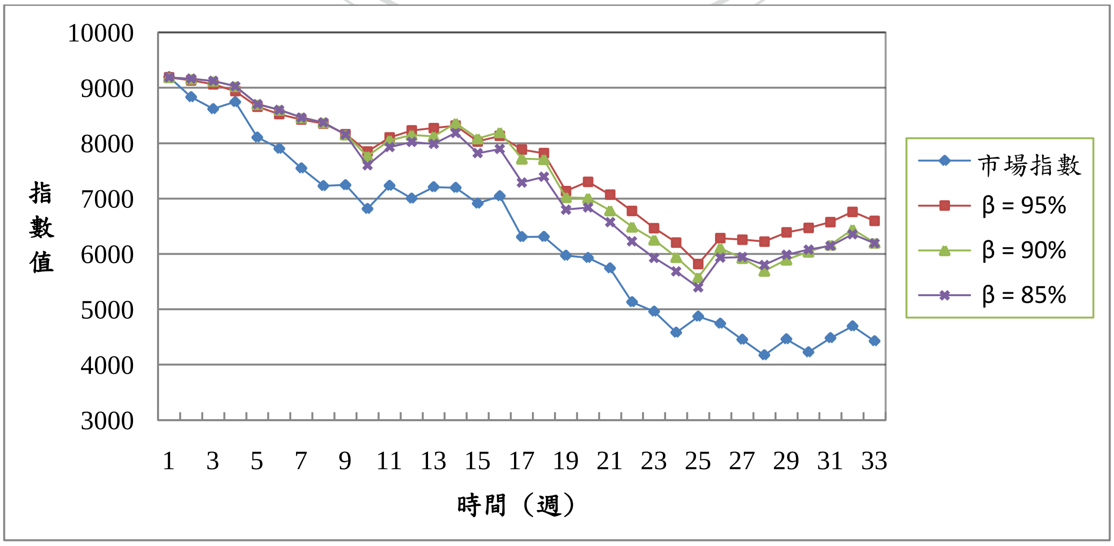
5.1 檢測模型最適信賴水準

VaR 的定義是在給定信賴水準 β 下，觀測值可能遭受到的最大損失。在本節中我們要探討信賴水準 β 與投資組合表現之關係，我們使用 T1、T2、T3 三個資料時間段進行討論。首先我們對於第四章節內的模型參數做設定，起始資金 W 為 1000 萬，內樣本時間段 T 為 30 週，指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值的最大值 $r^{\max}$ 設定為 14%，累積偏差容忍值 ρ 設定為 -0.1，買進股票固定交易費用比例 B 為 0.1425%，賣出股票固定交易費用與稅金比例 S 為 0.4425%，單一股票投資的最大比例上限 δ 為 10%，存放於銀行現金最大比例 λ 為 30%，即表示投資組合內最少有 8 種以上候選股組成。在給定 95% 的信賴水準下，我們先計算觀測期內各股票的 VaR，選取 VaR 最小的前 20 種股票當作投資組合的候選股，利用模型一建構投資組合，並且每隔 8 週後利用模型二重新調整投資組合。我們將模型內信賴水準 β 分別設定為 95%、90% 與 85%，驗證在不同信賴水準 β 下投資組合之表現。



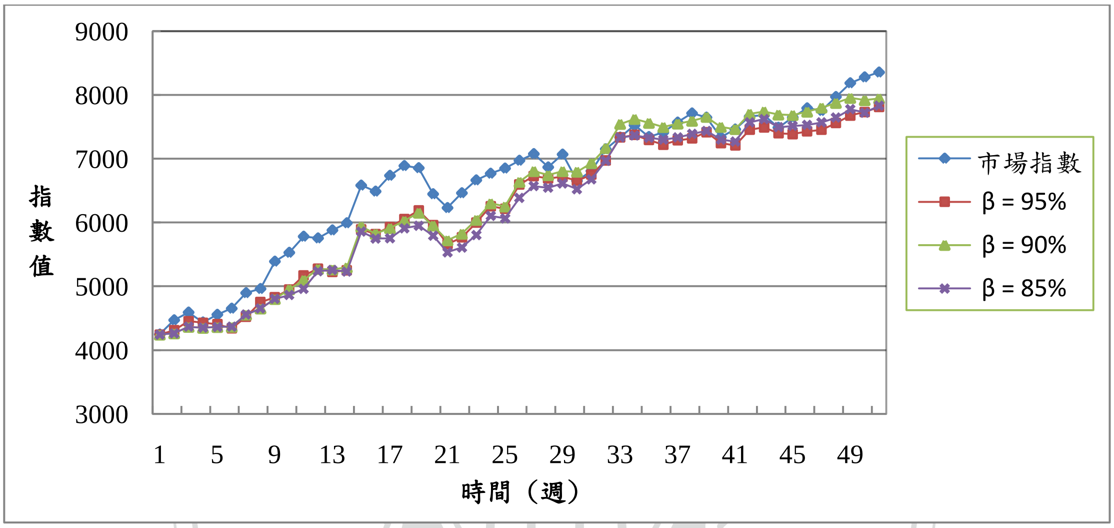
圖二　T1 時間段不同信賴水準下投資組合走勢圖

圖二表示 T1 時間段內在不同信賴水準 β 下投資組合的表現，橫軸部分為投資時間 t，以週為單位；縱軸表示市場指數與投資組合的指數值。我們於第一週時將市場指數與投資組合正規化，使市場指數與投資組合指數值相同。從圖形資料可看出三組投資組合的表現差異性不大，平均表現以 $\beta=95\%$ 與 $\beta=85\%$ 較為出色。在三十七週前三組投資組合表現差異不大，三十七週後 $\beta=95\%$ 與 $\beta=85\%$ 稍微拉開了與 $\beta=90\%$ 的差距。表現最佳的為 $\beta=85\%$，於樣本時間段結束時收在 7324.8 點；投資組合最低的則為 $\beta=90\%$，最後收在 7007.52 點，兩者相差了 317.28 點，年化報酬率相差約 4.71%。



圖三　T2 時間段不同信賴水準下投資組合走勢圖

圖三表示在 T2 時間段內不同信賴水準 β 下投資組合的表現，表現最佳的為 $\beta=95\%$，$\beta=90\%$ 與 $\beta=85\%$ 的表現則相距不遠。二十六週前三者表現差異不大，二十六週後 $\beta=95\%$ 的表現拉開了與另外兩組投資組合的差距。當樣本時間段結束時投資組合表現最佳為 $\beta=95\%$，最後收在 6595.17 點；表現最低的為 $\beta=85\%$，收在 6192.13 點，兩者相差了 403.04 點，$\beta=95\%$ 比 $\beta=85\%$ 減少了約 7.13% 的年化報酬率損失。



圖四　T3 時間段不同信賴水準下投資組合走勢圖

圖四表示在 T3 時間段內不同信賴水準 β 下投資組合的表現。從圖形資料可看出三組投資組合的表現差異性不大，以 $\beta=90\%$ 的表現最為出色，於樣本時間段結束時收在 7944.97 點。投資組合表現最佳的 $\beta=90\%$ 與投資組合表現最低的 $\beta=95\%$ 僅僅相差了一百多點，年化報酬率相差約 3.05%，並沒有明顯差距過大的表現。

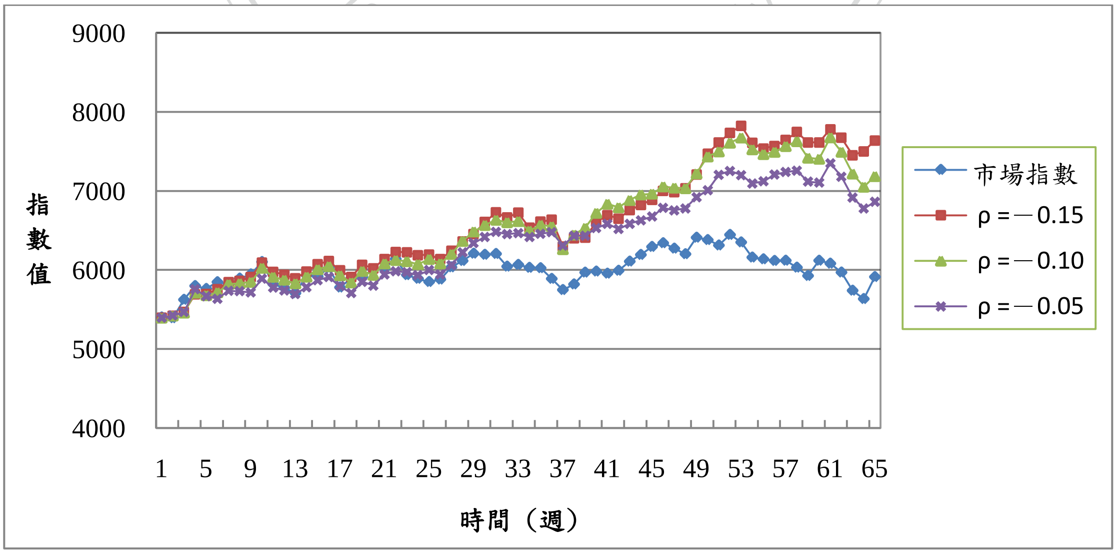
深入分析給定不同信賴水準 β 下，在三組樣本時間段內投資組合的表現。當 $\beta=95\%$ 時，要求條件較為嚴苛，於觀測期內指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值超過偏差 VaR 的次數累積只有一次，條件嚴格；而 $\beta=90\%$ 與 $\beta=85\%$ 時，指數報酬率與投資組合報酬率之偏差值超過偏差 VaR 的次數分別為三次與四次，條件較寬鬆。從三個時間段投資組合的表現來看，表現其實差不多，推測其原因

在於觀測期時間段僅僅只有 30 天，在給定信賴水準β下，我們以觀測期時間段 VaR 最小的前 20 種股票做為候選股，資料本身有較佳的時效性，選出之投資組合相類似。

從三組不同信賴水準下投資組合的表現來看，差異性不大。綜合表現來看，$\beta=95\%$的限制條件較為嚴苛，建議模型內選用$\beta=95\%$做為投資組合之信賴水準。

5.2 檢測模型最適累積偏差容忍值

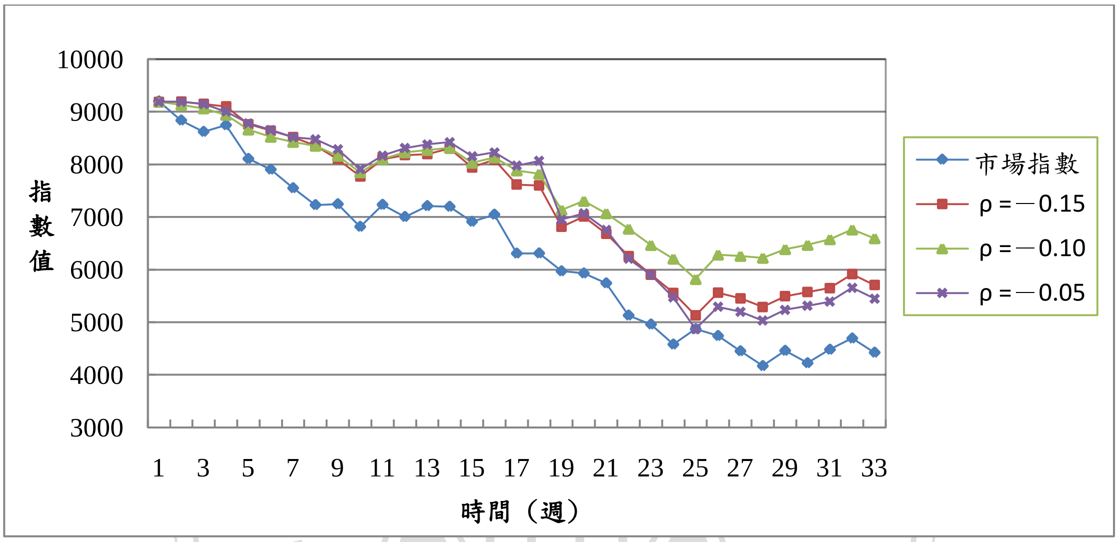
設定不同累積偏差容忍值，會影響到投資組合中應該積極進場或保守觀望的投資策略。本節主要在驗證不同累積偏差容忍值ρ下投資組合之表現。我們同樣使用 T1、T2、T3 三個資料時間段進行討論，並將模型內不同累積偏差容忍值ρ設定為-0.05、-0.1與-0.15，即在觀測期內投資組合報累積酬率比指數累積報酬率分別多出5%、10%與15%，信賴水準β設定為95%，建立投資組合後每 8 週重新調整一次投資組合，其餘參數設定相同。



圖五　T1 時間段不同累積偏差容忍值下投資組合走勢圖

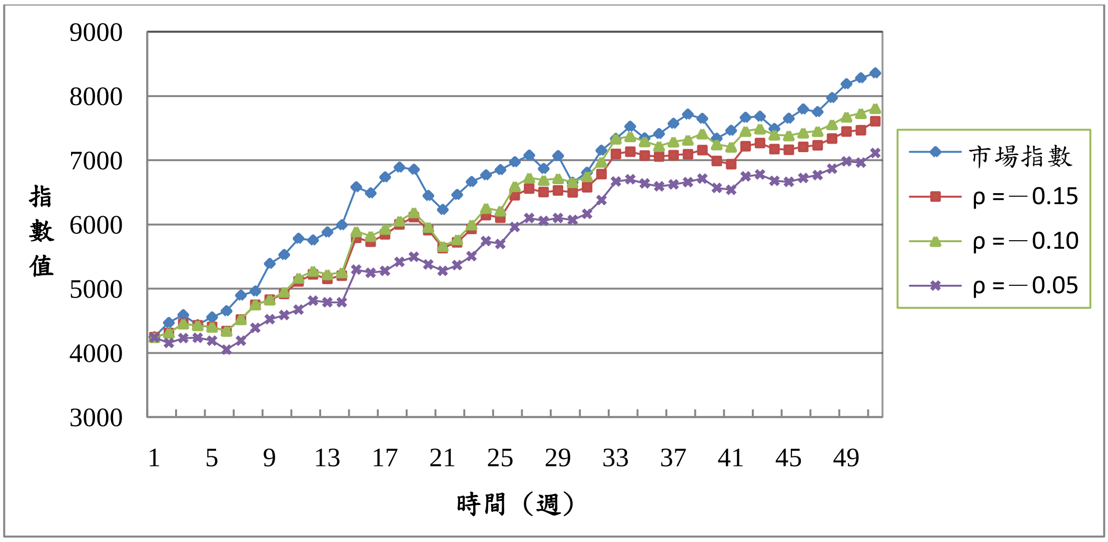
圖五表示在 T1 時間段內不同累積偏差容忍值ρ下投資組合的表現。從圖形

的走勢來看，三組不同累積偏差容忍值ρ在前三十九週的表現差異不大，從三十九週之後開始有了些許的差別，$\rho=-0.1$與$\rho=-0.15$的表現稍稍拉大與$\rho=-0.05$的差距。表現最好的$\rho=-0.15$於觀測期結束收在7637.91點，表現次之的$\rho=-0.1$收在7185.88點，再次之的$\rho=-0.05$收在6861.33點，表現最好的$\rho=-0.15$與表現最低的$\rho=-0.05$在觀測期結束時差距776.58點，投資報酬率差距約為14.38%，年化報酬率相差約11.51%。



圖六　T2時間段不同累積偏差容忍值下投資組合走勢圖

圖六表示投資組合在T2時間段內不同累積偏差容忍值ρ下投資組合的表現。在前十九週三組不同ρ值的指數值差異不大，並沒有特別突出或是走弱的表現；在十九週之後$\rho=-0.1$的表現明顯比$\rho=-0.05$與$\rho=-0.15$要來的好，觀測期結束$\rho=-0.1$最後收在6595.17點，與指數值最低的$\rho=-0.05$相差了1145.58點，減少約20.26%的年化報酬率損失。而$\rho=-0.05$與$\rho=-0.15$的表現差異性不大，觀測期結束最後$\rho=-0.15$的表現僅比$\rho=-0.05$多出258.92點，減少約4.58%的年化報酬率損失。



圖七　T3 時間段不同累積偏差容忍值下投資組合走勢圖

圖七表示投資組合在 T3 時間段內不同累積偏差容忍值 ρ 下投資組合的表現，以 $\rho=-0.1$ 的表現最佳，收在 7811.97 點，$\rho=-0.1$ 與 $\rho=-0.15$ 的表現差異不大，觀測期結束兩者指數值僅差距 205.95 點，年化報酬率相差約 5.05%。而 $\rho=-0.05$ 的表現明顯與另兩組 ρ 值資料有些差距，當觀測期結束 $\rho=-0.05$ 的投資組合表現最後收在 7114.08 點，落後表現最佳的 $\rho=-0.1$ 有 697.89 點，年化報酬率相差約 17.03%。

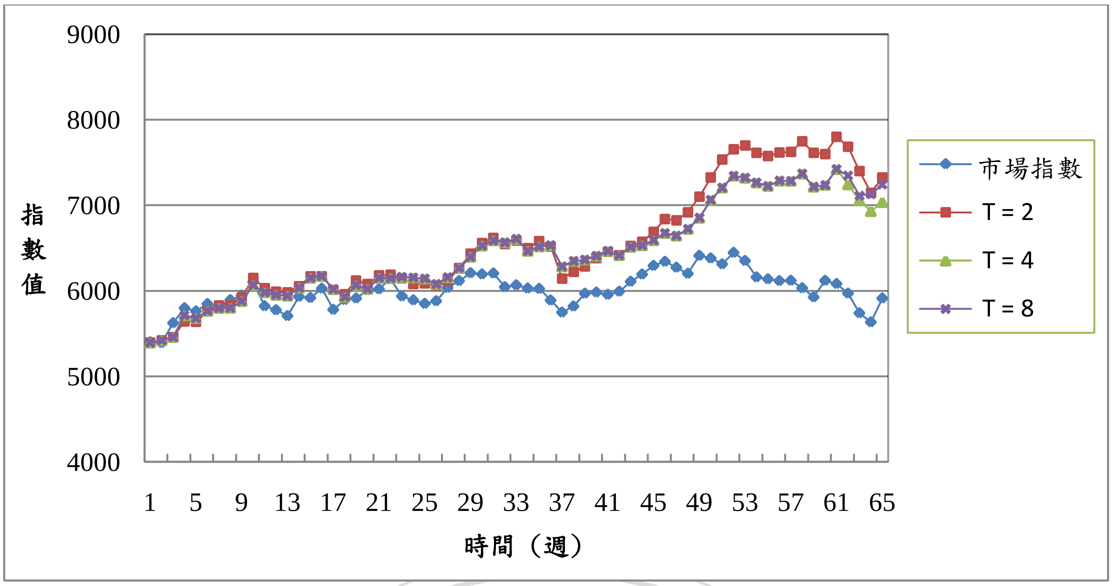
綜合以上投資組合設定不同 ρ 下在三組時間段的表現，當股票市場呈現盤整震盪時，$\rho=-0.1$ 與 $\rho=-0.15$ 的表現會比較好；當股票市場呈現持續上漲或下跌走勢時，$\rho=-0.1$ 會有較佳的表現。進一步來分析，候選股的組成是選取觀測期內 VaR 最小的前 20 種股票做為候選股，與其他股票相比候選股本身較具有抗跌的特性，相對來說波動度較小，當 ρ 取較大時，表示在觀測期內投資組合總報酬率超越市場指數總報酬率較少，投資組合會採取比較保守的投資策略，保留現金的比重較高，相對而言也會有較低的投資風險。但當股票市場呈現持續上漲的趨勢時，因為保守的投資策略而抑制了投資組合的成長幅度，在 T1、T2 與 T3 三個時間段內，$\rho=-0.05$ 的投資組合並沒有特別亮眼的表現，指數值在三組投資組合中總是最低。

當 ρ 取較小時，表示在觀測期內投資組合總報酬率超越市場指數總報酬率較多，投資組合是採取比較積極的投資策略，以獲取更高投資報酬率為目的，因此將大部份的資金投入股票市場內。當 $\rho=-0.15$ 時，表示在觀測期內投資組合總報酬率要多出市場指數報酬率 15%，投資組合較易有高投資報酬率。以 T3 時間段的圖形走勢可看出，最後投資組合表現雖沒有超越指數，但 $\rho=-0.15$ 有最接近市場指數的表現。目標投資報酬率較高，相對來說投資組合的波動度也大，在 T2 時間段時，前二十五週 $\rho=-0.15$ 的投資組合指數是最低的，以上分析也表示當 ρ 取越小，投資組合的漲幅與跌幅也越大。ρ 取越小，表示要求的報酬率越高，當股票市場呈現大幅上揚的趨勢時，在限制條件內模型可能會有求不出解之可能。

當 $\rho=-0.1$ 時，除了追求穩定的報酬率之外，也能維持其避險的策略，在三個樣本時間段內除了在 T1 時間段最後表現稍不如 $\rho=-0.15$ 之的表現外，於 T2 與 T3 時段期表現皆為三個參數中最好的，因此我們建議模型內投資組合累積偏差容忍值參數取 $\rho=-0.1$，會使得投資組合有較佳之表現。

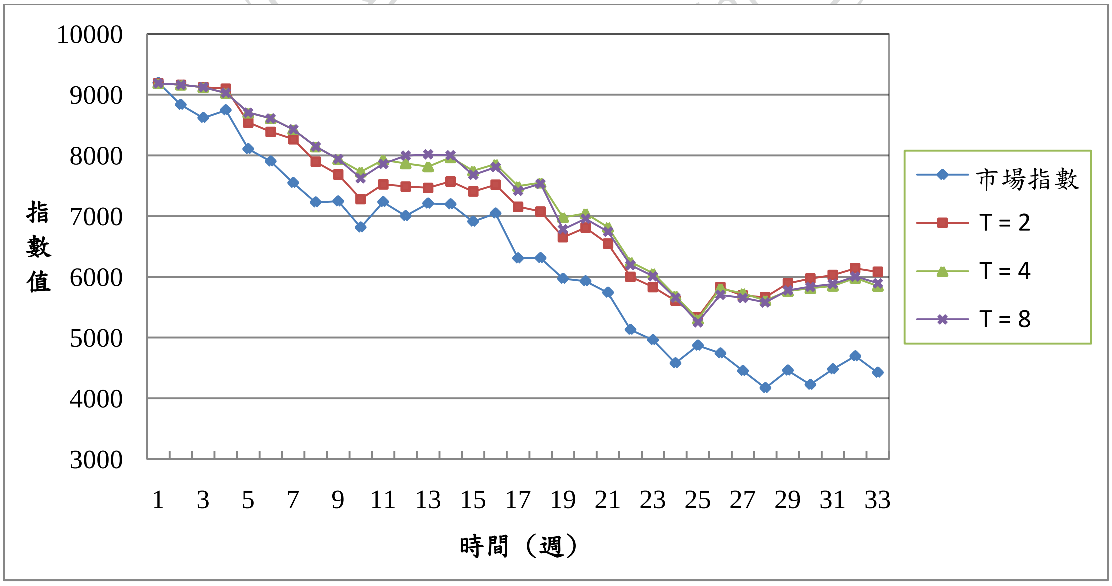
5.3 檢測模型最適調整週期

股票市場瞬息萬變，適時的調整投資組合，可以更符合投資者需求；但如過度頻繁調整投資組合，則可能因花費過多交易手續費用使得投資獲利減少，因此在本節中我們將探討模型的最適調整週期。我們同樣使用 T1、T2、T3 三個資料時間段進行討論。我們將模型內調整週期分別設定為 $T=2$、$T=4$ 與、$T=8$，即每 2 週、4 週與 8 週調整一次投資組合，信賴水準 β 設定為 95%，累積偏差容忍值 ρ 設定為 -0.1，其餘參數設定相同。



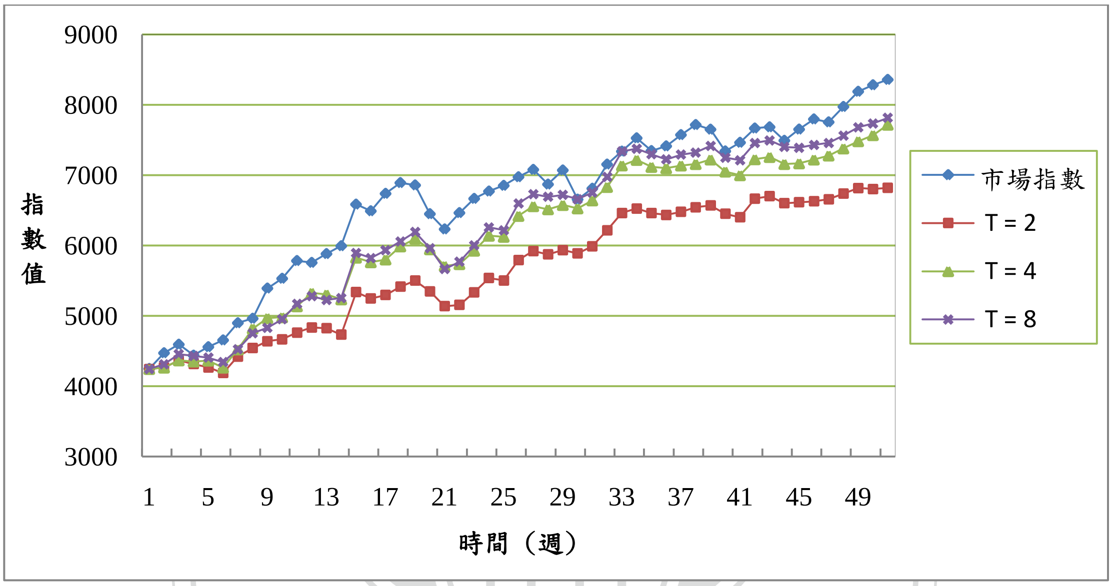
圖八　T1 時間段不同調整週期下投資組合走勢圖

圖八為 T1 時間段內不同調整週期下投資組合的表現，從圖形資料可看出三組調整週期下投資組合的差異性不大，在四十三週前三組調整週期的投資組合表現皆差不多，四十三週後$T=2$的表現稍微拉開了與另兩組調整週期的差距，於樣本時間段結束時收在 7323.5 點；投資組合指數值表現最低的$T=4$，於觀測期結束時收在 7034.47 點，與表現最佳的$T=2$年化投資報酬率僅相差約 4.29%，並沒有明顯過大的差距。



圖九　T2 時間段不同調整週期下投資組合走勢圖

圖九為 T2 時間段內不同調整週期下投資組合的表現，從圖形資料可看出三組調整週期下投資組合的表現仍舊差異不大。於樣本時間段內$T=2$的表現長時間落後其他兩組調整週期，但於二十五週後$T=2$的表現開始領先另兩組調整週期。於觀測期結束時$T=2$的投資組合收在 6083.51 點，比投資組合指數值表現最低的$T=4$減少了約 4.02% 的年化報酬率損失，並沒有明顯過大的差距。



圖十　T3 時間段不同調整週期下投資組合走勢圖

圖十為 T3 時間段內不同調整週期下投資組合的表現，從圖形資料可看出三組調整週期投資組合表現有了些許的差別。於觀測期內$T=4$與$T=8$的表現差不多，兩組調整週期的表現很明顯要比$T=2$來得傑出。投資組合表現最好的$T=8$於觀測期結束時收在 7811.97 點，與表現次佳的$T=4$年化報酬率僅相差約 2.35%；而表現最差的$T=2$於觀測期結束收在 6817.33 點，與表現最佳的$T=8$年化報酬率相差約 21.55% 之多。

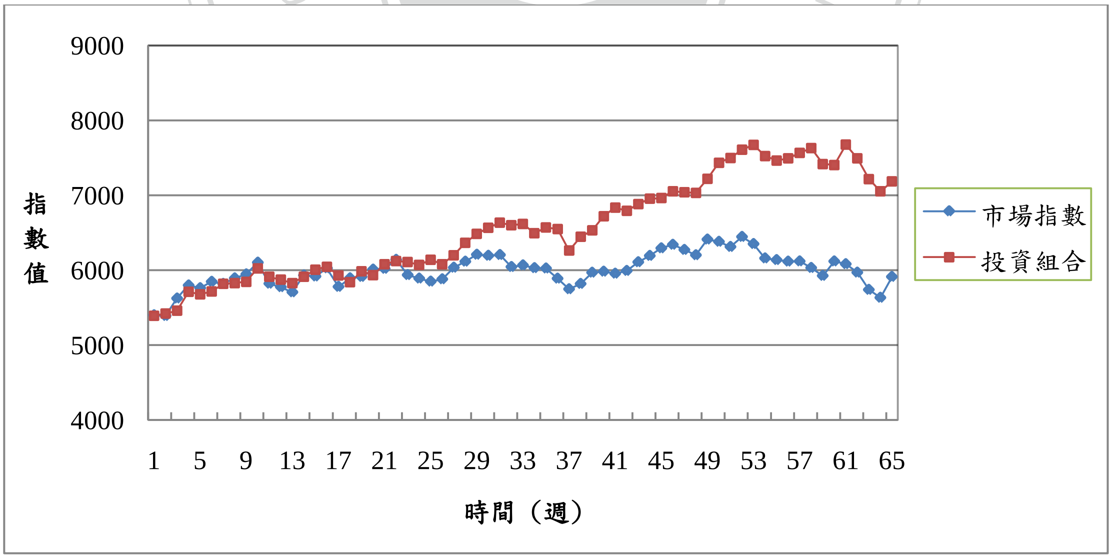
深入分析在不同調整週期下，三組樣本時間段內投資組合的表現。三組調整週期的投資組合於 T1 與 T2 時間段的表現差不多，並沒有很明顯的差別；但於 T3 時間段時，$T=4$與$T=8$的表現差不多，兩組調整週期的表現卻很明顯要比$T=2$來得傑出。推測其原因在於兩週調整一次投資組合的交易次數較多，相對而言所花手續費的比例也會較高，因而減少投資獲利。T3 時間段後期投資組合

爬升的幅度遠不如$T=4$與$T=8$。$T=4$代表每一個月調整一次投資組合，較能即時更新市場資訊，符合時效性；$T=8$表示兩個月調整一次投資組合，時效性雖沒有$T=4$要來的好，但因為候選股抗跌的性質與較少交易手續費用的緣故，在三組樣本時間段內$T=8$的整體表現也不輸$T=4$的投資組合表現。

從三組不同調整週期下投資組合的表現來看，建議模型內選用$T=8$做為投資組合之調整週期。

5.4 不同時間投資組合之成效與表現

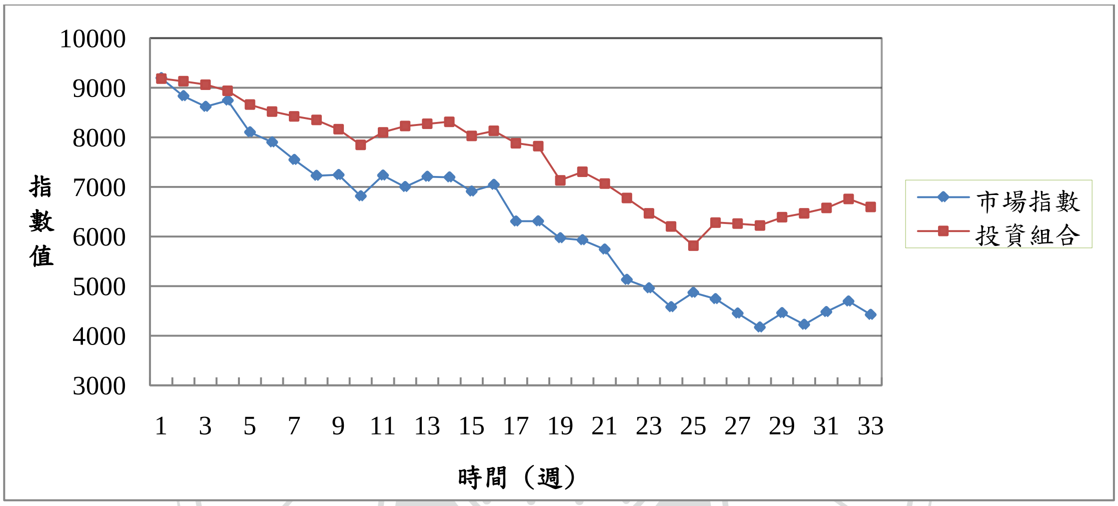
在本章前三節中，我們已找出模型內最適信賴水準β、最適累積偏差容忍值ρ與最佳調整週期。我們將模型中此三個參數設定為實證結果之最適值，代入模型中驗證於不同時間段投資組合之成效與表現。我們將模型內信賴水準β設定為95%，指數報酬率與投資組合報酬率的累積偏差容忍值ρ設定為-0.1，建立投資組合後每8週重新調整一次投資組合，其餘參數設定相同。



圖十一　T1 時間段投資組合與指數走勢圖

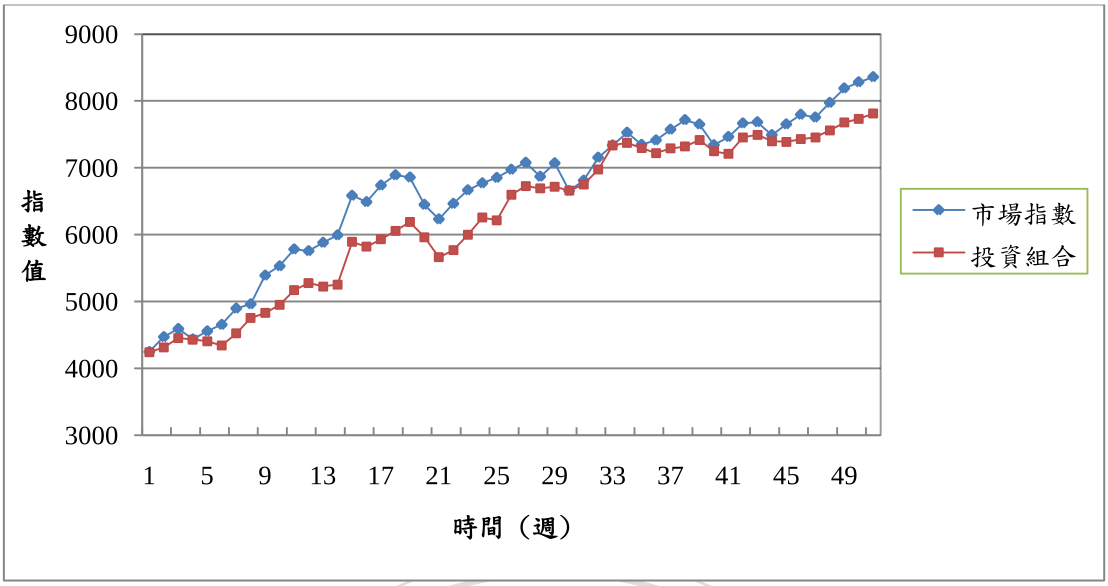
圖十一為投資組合與市場指數在 T1 時間段內的表現走勢圖。在 T1 時段中，市場整體呈現盤整震盪走勢。在六十五週觀測期內，前二十八週投資組合表現與

市場整體差不多，並沒有明顯差距；二十八週之後，投資組合表現明顯要比市場指數來的好，開始拉大與市場指數的差距。投資組合最高於第六十一週收在7676.71 點，而於觀測期結束投資組合收在 7185.88 點，市場指數則收在 5911.74點，投資組合最後比大盤整整多出 1274.14 點。在六十五週觀測期內，投資組合總共上漲 23.62%，年化報酬率約為 18.90%，而股價指數總共上漲了約 9.49%，年化報酬率約為 7.59%，投資組合報酬率約為市場指數的 2.49 倍，整整比市場指數多出了約 11.31%的年報酬率。



圖十二　T2 時間段投資組合與指數走勢圖

圖十二為 T2 時間段投資組合與市場指數走勢圖。在 T2 時間段內，市場指數從最高 9197.41 點一路下跌至 4425.08 點，市場整體呈現明顯熊市下跌的情況，從圖形來看投資組合的表現從一開始就比市場整體要來得抗跌，二十三週後市場整體稍為呈現盤整振盪，投資組合還有呈現小幅穩定上揚之表現。投資組合於樣本時間段結束時收在 6595.17 點，投資組合整整比市場指數多出 2170.09 點，跌幅明顯比市場指數要來得低許多。在三十三週觀測期結束時，市場指數報酬率為－81.76%，而投資組合報酬率為－44.58%，投資組合比市場指數約減少了37.18%的損失。由此可知，在熊市下跌的情況下，經由模型二所選出的投資組合，明顯的要比指數來得抗跌。



圖十三　T3 時間段投資組合與指數走勢圖

圖十三為 T3 時間段投資組合與市場指數走勢圖。在 T3 時間段內，市場指數從最低點 4247.97 點一路爬升至最高點 8356.89 點，市場呈現明顯牛市狀態。在樣本時間段投資組合的表現在大部分時間略輸於指數的表現，但整體表現仍與指數相距不遠。第三十週時投資組合一度有超越市場指數之表現。在觀測期內市場指數曾有數次回檔的走勢，投資組合大多呈現穩定上漲的表現，並在市場指數下跌時展現其抗跌的特性，拉近與市場指數的差距。投資組合在觀測期結束時收在 7811.97 點，投資組合年化報酬率約為 84.08%，而指數年化報酬率約為 96.73%，與指數相比，投資組合仍有不錯之表現。

從投資組合在三個樣本時間的指數走勢分析，在 T1 與 T2 樣本時間段時，投資組合表現比市場整體要來的優異許多，在 T3 時間段投資組合最終表現雖不如市場指數，但仍有不錯之表現。追究其原因，我們利用觀測期 VaR 最小的前 20 種股票做為候選股，候選股本身抗跌的能力就比其他股票要來的強，當市場整體開始下跌的時候，投資組合與市場整體相比跌幅本身就會比較低；加上要求在觀測期內指數報酬率與投資組合報酬率的偏差 VaR 要最小，再次控制投資組合與指數報酬率損失的差距；我們同時加入限制式(4.14)，允許保留部分資金存入銀行的條件，當股票市場低迷不振呈現持續下跌的趨勢時，保留部分資金等同於減少投資的虧損，綜合以上所述，模型內如同有三種強而有利的條件控制投資

組合的損失。

進一步分析，由 T3 時間段可知當指數穩定上漲時，投資組合不易有超越指數之表現,原因在於投資組合的成份股是屬於抗跌型股票,股票本身波動度較小,當指數大幅上漲時，因為其較穩定的特性，漲幅會稍低於指數，但仍有不錯之表現；從 T2 時間段可知當指數持續下跌時，投資組合展現其抗跌特性有效抗跌，表現大幅超越指數；在市場整體上漲時投資組合表現與市場指數差不多，市場整體下跌時又有明顯優於市場的情況下，因此當指數出現類似於 T1 時段盤整震盪趨勢時，投資組合長時間表現會比指數要來得優異。

實證結果顯示，在市場整體呈現盤整震盪與大幅下跌趨勢時，透過規劃模型建立之投資組合皆能有超越指數之表現；在指數呈現持續上漲趨勢時，投資組合表現雖沒有超越指數表現，但仍有不錯之投資報酬率。

第六章 結論與建議

本論文結合指數追蹤與 VaR 之概念，將觀測期內標的指數報酬率與投資組合報酬率之偏差視為損益，以偏差值之 VaR 最小化為目標，建立一投資組合選擇模型，並將此模型應用在台灣股票市場歷史資料上，找出模型內最適參數設定後，再用以驗證模型之可行性。因股票種類繁多，我們在給定信賴水準下，先計算觀測期內各股票的 VaR，選取 VaR 最小的前數種股票當作投資組合的候選股，再利用規劃模型建構投資組合，於觀測時間段內驗證投資組合之表現，並且隔數週後重新調整投資組合。實證結果顯示，在市場整體呈現盤整震盪與大幅下跌趨勢時，透過規劃模型建立之投資組合皆能有超越指數之表現；在指數呈現持續上漲趨勢時，投資組合表現雖沒有超越指數表現，但仍有不錯之投資報酬率。

信賴水準越高，表示要求條件較為嚴苛，控管風險的表現越傑出。當市場整體呈現盤整震盪時，風險控管表現稍不如預期；市場整體呈現穩定下跌與上漲趨勢時，模型內有較佳之風險控管表現。在信賴水準 β 分別為 95%、90% 與 85% 下，投資組合於樣本時間段內表現差異不大，推測其原因在於觀測期時間段不長，資料本身有較佳的時效性，選出投資組合之成份與權重相類似。

累積偏差報酬率容忍值設定較大時，投資組合會採取比較穩健保守的投資策略，會有較低的投資風險。但當股票市場呈現持續上漲的趨勢時，因為保守的投資策略而抑制了投資組合的成長幅度；反之當累積偏差報酬率設定較小時，投資組合採取比較積極的投資策略，以獲取更高投資報酬率為目的，相對來說投資組合的波動度也大。且在限制條件內規劃模型有求不出可行解的情形發生。設定適當累積偏差報酬率，除了可追求穩定的報酬率之外，也能維持其避險的策略。

適時的調整投資組合，可以更符合投資者需求，增加獲利機會；但如過度頻繁調整投資組合，則可能因花費過多交易手續費用而減少投資報酬。於研究中發現模型內每八週調整一次投資組合，因為候選股抗跌的性質與較少交易手續費用的緣故，整體表現較為傑出。

本論文之模型除了追求報酬率外，同時也控制投資風險。後續可因應股票市場實際交易狀況，將整數交易限制加入條件式中，做進一步的分析，更能符合實務上之需求。但因 VaR 本身為一非線性、非凸集、同時具有多重極值之函數，當變數過多時不易求解，如再加上整數交易限制，使求解更加困難。因此，發展一套更有效率的演算法或朝向 CVaR 研究，將是未來可以進一步研究之方向。

參考文獻

Benati, S. and R. Rizzi, A mixed integer programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem, *European Journal of Operational Research* **176**, 423-434 (2007).

Brooke, A., D. Kendrick, and A. Meeraus, *GAMS-A User's Guide*, The Scientific Press, Redwood City, CA (1988)

Campbell, R., R. Huisman, and K. Koedijk, Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework, *Journal of Banking & Finance* **25,** 1789-1804 (2001)

Harlow, W. V., Asset allocation in a downside-risk framework, *Financial Analysts Journal* **47** (Sep/Oct), 28-40 (1991)

Jorion, P., *Value-at-Risk: the new benchmark for controlling market risk*, McGraw-Hill, New York (2000)

Konno, H. and H. Yamazaki, Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market, *Management Science* **37**, 519-531 (1991).

Luenberger, D. G., *Investment science*, Oxford University Press, New York (1998).

Meade, N. and G. R. Salkin, Index funds-construction and performance measurement, *Journal of the Operational Research Society* 40, 871-879 (1989).

Markowitz, H., Portfolio selection, *Journal of Finance* **7**, 77-91 (1952).

Speranza, M. G., Linear programming models for portfolio optimization, *Finance* **14**, 107-123 (1993).

Speranza, M. G., A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market, *Computers & Operations Research* **23**, 433-441 (1996).

Young, M. R., A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science* **44**, 673-683 (1998).

莊智祥，*使用目標規畫建立指數基金*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民國 87 年）。

白惠琦，*指數基金追蹤模型的最佳化*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民國 91 年）。

蘇代利，*調整指數基金的最小成本模型*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民國 93 年）。

朱志達，*超越指數績效的投資組合最佳化模型*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民國 99 年）。

附錄 附表

附表一　台灣股票市場候選成份股

公司名稱	股票代碼	公司名稱	股票代碼	公司名稱	股票代碼	公司名稱	股票代碼
台泥	1101	國巨	2327	華固	2548	中信金	2891
亞泥	1102	廣宇	2328	長榮	2603	第一金	2892
味全	1201	台積電	2330	新興	2605	遠百	2903
統一	1216	友訊	2332	裕民	2606	統一超	2912
台塑	1301	旺宏	2337	榮運	2607	潤泰全	2915
南亞	1303	華邦電	2344	陽明	2609	大立光	3008
中石化	1314	聯強	2347	華航	2610	聯詠	3034
東陽	1319	錸德	2349	中航	2612	智原	3035
台化	1326	環電	2350	萬海	2615	欣興	3037
遠東新	1402	佳事達	2352	長榮航	2618	揚志	3041
福懋	1434	宏碁	2353	晶華	2707	健鼎	3044
士電	1503	鴻準	2354	彰銀	2801	台灣大	3045
東元	1504	英業達	2356	京城銀	2809	和鑫	3049
華新	1605	華碩	2357	台中銀	2812	華晶科	3059
榮化	1704	致茂	2360	旺旺保	2816	網龍	3083
長興	1717	藍天	2362	中壽	2823	緯創	3231
台肥	1722	大同	2371	台產	2832	遠傳	4904
中碳	1723	佳能	2374	台壽	2833	正文	4906
台玻	1802	微星	2377	台企銀	2834	力晶	5346
永豐餘	1907	瑞昱	2379	高雄銀	2836	世界	5347
中鋼	2002	廣達	2382	萬泰銀	2837	中光電	5371
東鋼	2006	勝華	2384	聯邦銀	2838	遠雄	5522
中鴻	2014	群光	2385	遠東銀	2845	群益證	6005
豐興	2015	正崴	2392	大眾銀	2847	凱基證	6008
南港	2101	億光	2393	新產	2850	金鼎證	6012
台橡	2103	研華	2395	中再保	2851	彩晶	6116
中橡	2104	南科	2408	第一保	2852	新普	6121
正新	2105	友達	2409	寶來證	2854	佳必琪	6197
建大	2106	中華電	2412	統一證	2855	力成	6239
裕隆	2201	晶電	2448	元富證	2856	茂迪	6244
中華	2204	創見	2451	華南金	2880	立錡	6286
和泰	2207	聯發科	2454	富邦金	2881	台塑化	6505
光寶科	2301	義隆	2458	國泰金	2882	建興電	8008
聯電	2303	可成	2474	開發金	2883	華寶	8078
台達電	2308	華映	2475	玉山金	2884	寶成	9904
日月光	2311	兆赫	2485	元大金	2885	中保	9917
神達	2315	瑞軒	2489	兆豐金	2886	巨大	9921
鴻海	2317	宏達電	2498	台新金	2887	中鼎	9933
中環	2323	國建	2501	新光金	2888	潤泰新	9945
仁寶	2324	國產	2504	國票金	2889		
矽品	2325	興富發	2542	永豐金	2890		

附表二　T1 時間段投資組合表現

週	市場指數	投資組合	指數報酬率(%)	投資組合報酬率(%)	偏差值(%)	週	市場指數	投資組合	指數報酬率(%)	投資組合報酬率(%)	偏差值(%)
1	5399.16	5393.78	0	0	0	34	6028.75	6495.21	–0.61	–1.84	1.23
2	5389.93	5420.96	–0.17	0.50	–0.67	35	6024.07	6569.00	–0.08	1.14	–1.21
3	5622.86	5458.07	4.32	0.68	3.64	36	5888.37	6550.54	–2.25	–0.28	–1.97
4	5797.71	5710.66	3.11	4.63	–1.52	37	5747.09	6261.16	–2.40	–4.42	2.02
5	5761.14	5678.93	–0.63	–0.56	–0.08	38	5818.07	6445.75	1.24	2.95	–1.71
6	5846.19	5715.33	1.48	0.64	0.84	39	5967.96	6531.63	2.58	1.33	1.24
7	5818.39	5818.44	–0.48	1.80	–2.28	40	5981.48	6720.77	0.23	2.90	–2.67
8	5892.21	5829.41	1.27	0.19	1.08	41	5954.69	6836.04	–0.45	1.72	–2.16
9	5945.35	5846.68	0.90	0.30	0.61	42	5991.55	6790.95	0.62	–0.66	1.28
10	6102.16	6025.22	2.64	3.05	–0.42	43	6107.95	6883.19	1.94	1.36	0.58
11	5820.82	5911.27	–4.61	–1.89	–2.72	44	6192.35	6953.93	1.38	1.03	0.35
12	5774.67	5873.79	–0.79	–0.63	–0.16	45	6293.56	6963.75	1.63	0.14	1.49
13	5705.93	5828.90	–1.19	–0.76	–0.43	46	6340.69	7055.34	0.75	1.32	–0.57
14	5931.31	5912.85	3.95	1.44	2.51	47	6272.14	7040.21	–1.08	–0.21	–0.87
15	5917.16	6007.46	–0.24	1.60	–1.84	48	6201.40	7033.06	–1.13	–0.10	–1.03
16	6026.55	6045.88	1.85	0.64	1.21	49	6410.59	7220.10	3.37	2.66	0.71
17	5778.65	5930.29	–4.11	–1.91	–2.20	50	6380.73	7434.75	–0.47	2.97	–3.44
18	5893.27	5839.31	1.98	–1.53	3.52	51	6311.98	7498.60	–1.08	0.86	–1.94
19	5911.63	5985.04	0.31	2.50	–2.18	52	6446.01	7608.65	2.12	1.47	0.66
20	6009.32	5935.45	1.65	–0.83	2.48	53	6350.90	7674.56	–1.48	0.87	–2.34
21	6019.42	6080.43	0.17	2.44	–2.27	54	6158.94	7525.20	–3.02	–1.95	–1.08
22	6139.69	6123.80	2.00	0.71	1.28	55	6136.55	7464.78	–0.36	–0.80	0.44
23	5935.99	6108.82	–3.32	–0.24	–3.07	56	6116.05	7493.14	–0.33	0.38	–0.71
24	5889.52	6071.61	–0.78	–0.61	–0.17	57	6119.06	7566.34	0.05	0.98	–0.93
25	5848.91	6137.33	–0.69	1.08	–1.77	58	6031.24	7628.28	–1.44	0.82	–2.25
26	5879.93	6081.17	0.53	–0.92	1.45	59	5925.54	7418.70	–1.75	–2.75	0.99
27	6034.60	6200.86	2.63	1.97	0.66	60	6118.61	7405.56	3.26	–0.18	3.44
28	6115.43	6365.82	1.34	2.66	–1.32	61	6081.84	7676.71	–0.60	3.66	–4.26
29	6207.83	6485.27	1.51	1.88	–0.37	62	5969.07	7493.52	–1.85	–2.39	0.53
30	6193.62	6567.04	–0.23	1.26	–1.49	63	5738.76	7217.98	–3.86	–3.68	–0.18
31	6204.23	6633.36	0.17	1.01	–0.84	64	5632.97	7051.47	–1.84	–2.31	0.46
32	6043.95	6602.02	–2.58	–0.47	–2.11	65	5911.74	7185.88	4.95	1.91	3.04
33	6065.91	6616.91	0.36	0.23	0.14	平均	5993.45	6552.88	0.16	0.46	–0.30

附表三　T2 時間段投資組合表現

週	市場指數	投資組合	指數報酬率(%)	投資組合報酬率(%)	偏差值(%)
1	9197.41	9188.24	0	0	0
2	8834.73	9132.66	−3.94	−0.60	−3.34
3	8619.08	9063.34	−2.44	−0.76	−1.68
4	8745.35	8939.95	1.47	−1.36	2.83
5	8105.59	8660.24	−7.32	−3.13	−4.19
6	7902.44	8522.95	−2.51	−1.59	−0.92
7	7548.76	8426.33	−4.48	−1.13	−3.34
8	7228.41	8352.44	−4.24	−0.88	−3.37
9	7244.76	8162.56	0.23	−2.27	2.50
10	6815.32	7848.83	−5.93	−3.84	−2.08
11	7233.62	8103.6	6.14	3.25	2.89
12	7002.54	8229.08	−3.19	1.55	−4.74
13	7209.04	8273.05	2.95	0.53	2.41
14	7196.5	8315.34	−0.17	0.51	−0.69
15	6911.64	8030.62	−3.96	−3.42	−0.53
16	7046.11	8131.47	1.95	1.26	0.69
17	6307.28	7883.96	−10.49	−3.04	−7.44
18	6310.68	7820.44	0.05	−0.81	0.86
19	5970.38	7135.36	−5.39	−8.76	3.37
20	5929.63	7304.5	−0.68	2.37	−3.05
21	5742.23	7070.51	−3.16	−3.20	0.04
22	5130.71	6775.93	−10.65	−4.17	−6.48
23	4960.4	6467.13	−3.32	−4.56	1.24
24	4579.62	6206.59	−7.68	−4.03	−3.65
25	4870.66	5819.28	6.36	−6.24	12.60
26	4742.33	6283.33	−2.63	7.97	−10.61
27	4452.7	6259.52	−6.11	−0.38	−5.73
28	4171.1	6223.42	−6.32	−0.58	−5.75
29	4460.49	6388.34	6.94	2.65	4.29
30	4225.07	6468.97	−5.28	1.26	−6.54
31	4481.27	6576.15	6.06	1.66	4.41
32	4694.52	6761.03	4.76	2.81	1.95
33	4425.08	6595.17	−5.74	−2.45	−3.29
平均	6311.983	7558.192	−2.1475	−0.98063	−1.16688

附表四　T3 時間段投資組合表現

週	市場指數	投資組合	指數報酬率(%)	投資組合報酬率(%)	偏差值(%)	週	市場指數	投資組合	指數報酬率(%)	投資組合報酬率(%)	偏差值(%)
1	4247.97	4243.74	0	0	0	27	7077.71	6728.4	1.50	2.00	–0.51
2	4471.25	4311.59	5.26	1.60	3.66	28	6868.65	6690.97	–2.95	–0.56	–2.40
3	4592.5	4454.66	2.71	3.32	–0.61	29	7069.51	6718.47	2.92	0.41	2.51
4	4436.94	4428.58	–3.39	–0.59	–2.80	30	6654.8	6657.14	–5.87	–0.91	–4.95
5	4557.15	4404.83	2.71	–0.54	3.25	31	6809.86	6750.76	2.33	1.41	0.92
6	4653.63	4341.35	2.12	–1.44	3.56	32	7153.13	6975.15	5.04	3.32	1.72
7	4897.39	4522.48	5.24	4.17	1.07	33	7337.14	7335.25	2.57	5.16	–2.59
8	4961.62	4752.21	1.31	5.08	–3.77	34	7526.55	7373.23	2.58	0.52	2.06
9	5390.7	4828.29	8.65	1.60	7.05	35	7345.22	7294.32	–2.41	–1.07	–1.34
10	5529.63	4950.2	2.58	2.52	0.05	36	7411.88	7221.56	0.91	–1.00	1.91
11	5781.96	5169.51	4.56	4.43	0.13	37	7571.96	7289.82	2.16	0.95	1.21
12	5755.38	5277.61	–0.46	2.09	–2.55	38	7715.1	7318.81	1.89	0.40	1.49
13	5880.77	5224.05	2.18	–1.01	3.19	39	7649.28	7416.12	–0.85	1.33	–2.18
14	5992.57	5252.54	1.90	0.55	1.36	40	7340.08	7245.86	–4.04	–2.30	–1.75
15	6583.87	5893.13	9.87	12.20	–2.33	41	7463.05	7209.61	1.68	–0.50	2.18
16	6489.09	5820.18	–1.44	–1.24	–0.20	42	7665.63	7455.43	2.71	3.41	–0.70
17	6737.29	5930.64	3.82	1.90	1.93	43	7682.97	7492.93	0.23	0.50	–0.28
18	6890.44	6056.77	2.27	2.13	0.15	44	7490.91	7398.33	–2.50	–1.26	–1.24
19	6856.74	6189.1	–0.49	2.18	–2.67	45	7650.91	7386.94	2.14	–0.15	2.29
20	6448.23	5960.71	–5.96	–3.69	–2.27	46	7795.07	7429.58	1.88	0.58	1.31
21	6231.15	5662.54	–3.37	–5.00	1.64	47	7753.63	7454.83	–0.53	0.34	–0.87
22	6463.56	5767.63	3.73	1.86	1.87	48	7972.59	7559.54	2.82	1.40	1.42
23	6665.4	5998.53	3.12	4.00	–0.88	49	8188.11	7678.35	2.70	1.57	1.13
24	6769.86	6255.52	1.57	4.28	–2.72	50	8280.9	7733.76	1.13	0.72	0.41
25	6850.99	6214.64	1.20	–0.65	1.85	51	8356.89	7811.97	0.92	1.01	–0.09
26	6973.28	6596.3	1.78	6.14	–4.36	平均	6645.9	6277.146	1.41	1.26	0.15